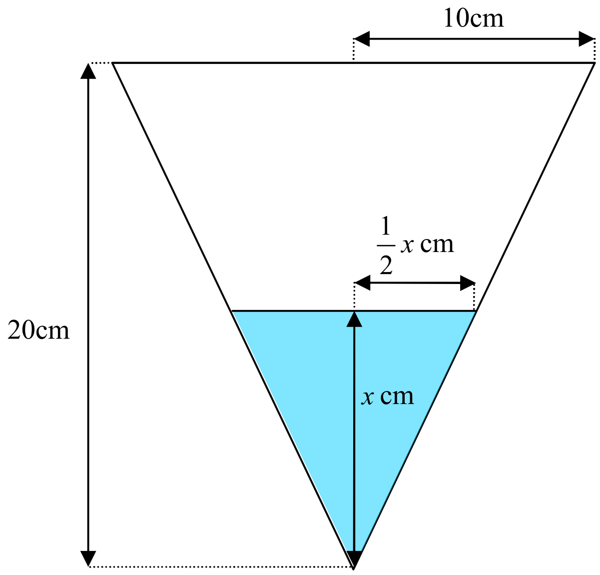
微分法の応用 7　速度と加速度

357



ポイント

注ぎ始めてから t 秒後の水の深さを x，体積を V，面積を S とすると，
x, V, S は t の関数である。

水面の上昇する速さ

上図より，

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2\cdot x$$
$$=\frac{\pi}{12}x^3$$

よって，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{12}\frac{dx^3}{dt}$$
$$=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{dx^3}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{\pi}{4}x^2\cdot\frac{dx}{dt}$$

これと $\frac{dV}{dt}=3$ より，$\frac{\pi}{4}x^2\cdot\frac{dx}{dt}=3$　$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{12}{\pi x^2}$

したがって，$x=6$ のとき $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3\pi}$

ゆえに，$\frac{1}{3\pi}$ cm/s　・・・（答）

水面の面積の増加する速さ

解法 1

$$S=\pi\left(\frac{1}{2}x\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}x^2$$

より,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{4}\frac{dx^2}{dt}$$
$$=\frac{\pi}{4}\frac{dx^2}{dx}\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{\pi}{2}x\frac{dx}{dt}$$

ここで, $\frac{dx}{dt}=\frac{12}{\pi x^2}$ より,

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}x\cdot\frac{12}{\pi x^2}$$
$$=\frac{6}{x}$$

よって, $x=6$ のとき $\frac{dS}{dt}=1$

ゆえに, $1\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

解法 2

$V=\frac{1}{3}Sx$ より,

$$\frac{dV}{dt}=\frac{1}{3}\frac{dSx}{dt}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{dS}{dt}x+S\frac{dx}{dt}\right)$$

ここで, $\frac{dV}{dt}=3,\ S=\frac{\pi}{4}x^2,\ \frac{dx}{dt}=\frac{12}{\pi x^2}$ より,

$$3=\frac{1}{3}\left(\frac{dS}{dt}x+3\right)\qquad\therefore\frac{dS}{dt}=\frac{6}{x}$$

よって, $x=6$ のとき $\frac{dS}{dt}=1$

ゆえに, $1\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$

358

出発してからの時間を t，角速度を ω，速さを v，加速度の大きさを a とする。

点 P の座標は $(x, y)=(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ と表せるから，

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)=(-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$$

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)=(-r\omega^2\cos\omega t, -r\omega^2\sin\omega t)$$

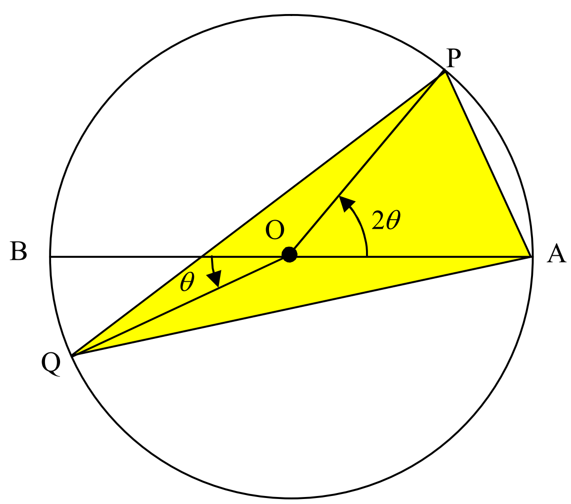
よって，一般に

$$\begin{aligned} v&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\ &=\sqrt{(-r\omega\sin\omega t)^2+(r\omega\sin\omega t)^2}\\ &=\sqrt{(r\omega)^2(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t)}\\ &=r|\omega| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a&=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}\\ &=\sqrt{(-r\omega^2\cos\omega t)^2+(-r\omega^2\sin\omega t)^2}\\ &=\sqrt{(r\omega^2)^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}\\ &=r\omega^2 \end{aligned}$$

ゆえに，$\omega=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$v=\dfrac{\pi}{6}r$，$a=\dfrac{\pi^2}{36}r$

359



条件より，$\angle \mathrm{BOQ}=\theta$ とすると，$\angle \mathrm{AOP}=2\theta$，$0 \leq 2\theta \leq \pi$

よって，△APQ の面積を $S(\theta)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
S(\theta) &= \Delta\mathrm{AOP}+\Delta\mathrm{POQ}+\Delta\mathrm{AOQ} \\
&= \frac{1}{2}a^2 \sin\angle\mathrm{AOP}+\frac{1}{2}a^2 \sin\angle\mathrm{POQ}+\frac{1}{2}a^2 \sin\angle\mathrm{AOQ} \\
&= \frac{1}{2}a^2\left[\sin 2\theta+\sin\{(\pi+\theta)-2\theta\}+\sin(\pi-\theta)\right] \\
&= \frac{1}{2}a^2(\sin 2\theta+2\sin\theta)
\end{aligned}
$$

ただし，$0 \leq 2\theta \leq \pi$ より，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\therefore S'(\theta) &= \frac{1}{2}a^2(2\cos 2\theta+2\cos\theta) \\
&= a^2(\cos 2\theta+\cos\theta) \\
&= a^2(2\cos^2\theta-1+\cos\theta) \\
&= a^2(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)
\end{aligned}
$$

$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $S'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ また $\cos\theta$ は単調減少する。

したがて，増減表は次のようになる。

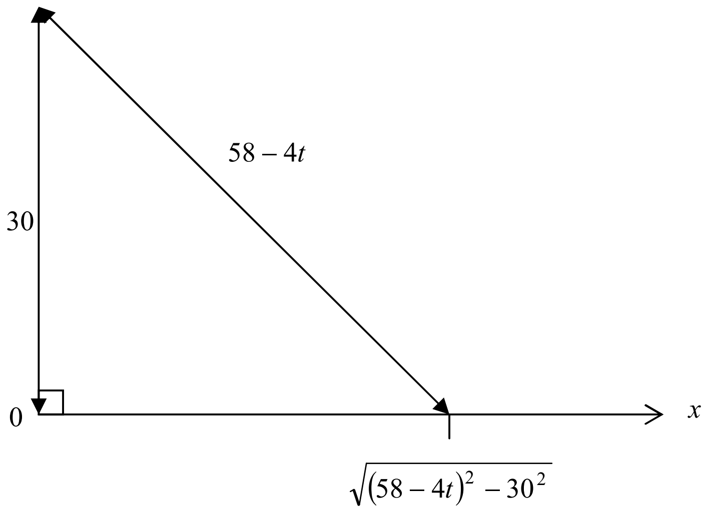
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$	/	$+$	0	$-$	/
$S(\theta)$	0	↑	極大	↓	a^2

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき△APQ の面積は最大値

$$
\begin{aligned}
S\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}a^2\left(\sin\frac{2}{3}\pi+2\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2
\end{aligned}
$$

をとる。

360



船の岸壁からの距離を x m，たぐり始めてからの時間を t 秒とすると，

$$x=\sqrt{(58-4t)^2-30^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{d}{dt}\left\{(58-4t)^2-30^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\left\{(58-4t)^2-30^2\right\}\right]\left\{(58-4t)^2-30^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-4)(58-4t)\cdot\frac{1}{\sqrt{(58-4t)^2-30^2}}\\&=-\frac{4(58-4t)}{\sqrt{(58-4t)^2-30^2}}\end{aligned}$$

よって，2 秒後の，すなわち $t=2$ のときの速さは $\left|\dfrac{dx}{dt}\right|=\left|-\dfrac{4\cdot 50}{40}\right|=5$ m/s

あるいは，

$58-4t=u$ とおくと，$\dfrac{du}{dt}=-4$ ・・・①

$x^2+30^2=u^2$ （$x>0$）より，$\dfrac{dx^2}{dt}=\dfrac{du^2}{dt}$ $\therefore 2x\dfrac{dx}{dt}=2u\dfrac{du}{dt}$ ・・・②

①，②より，$2x\dfrac{dx}{dt}=-8u$ $\therefore \dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4u}{x}$

これと $u=58-4t$，$x=\sqrt{(58-4t)^2-30^2}$ から，$\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{4(58-4t)}{\sqrt{(58-4t)^2-30^2}}$

よって，2 秒後の，すなわち $t=2$ のときの速さは $\left|\dfrac{dx}{dt}\right|=\left|-\dfrac{4\cdot 50}{40}\right|=5$ m/s

361

$\dfrac{dx}{dt}=2\omega(1-\cos\omega t)$，　$\dfrac{dy}{dt}=2\omega\sin\omega t$ より，

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}|&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\\
&=\sqrt{\{2\omega(1-\cos\omega t)\}^2+(2\omega\sin\omega t)^2}\\
&=2\omega\sqrt{(1-\cos\omega t)^2+\sin^2\omega t}\qquad(\because \omega>0)\\
&=2\omega\sqrt{2-2\cos\omega t}\\
&=2\sqrt{2}\omega\sqrt{1-\cos\omega t}
\end{aligned}
$$

よって，$\omega t=(2n-1)\pi$ （n は自然数）のとき $|\vec{v}|$ は最大値 4ω をとる。

362

$$
\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix} e^{-t}\sin t\\ e^{-t}\cos t\end{pmatrix}
$$

$$
\vec{v}=\begin{pmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{d}{dt}\left(e^{-t}\sin t\right)\\ \dfrac{d}{dt}\left(e^{-t}\cos t\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^{-t}(\sin t-\cos t)\\ -e^{-t}(\sin t+\cos t)\end{pmatrix}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=-e^{-t}\sin t\cdot e^{-t}(\sin t-\cos t)+e^{-t}\cos t\cdot\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}\\
&=-e^{-2t}
\end{aligned}
$$

また，$\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角 θ を使うと，

$$
\begin{aligned}
\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=|\vec{v}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta\\
&=\sqrt{\{-e^{-t}(\sin t-\cos t)\}^2+\{-e^{-t}(\sin t+\cos t)\}^2}\sqrt{(e^{-t}\sin t)^2+(e^{-t}\cos t)^2}\cos\theta\\
&=\sqrt{2}e^{-2t}\cos\theta
\end{aligned}
$$

よって，$\sqrt{2}e^{-2t}\cos\theta=-e^{-2t}$　　$\therefore\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

θ をなす角の小さい方とすると，$0\leq\theta\leq\pi$ より，$\theta=\dfrac{3}{4}\pi$