微分法の応用 8　近似式

$|x|$が十分小さいとき　$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

$|h|$が十分小さいとき $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$

関数 $y=f(x)$において，x の増分 Δx に対する y の増分を Δy とすると

$|x|$が十分小さいとき　$\Delta y\approx y'\Delta x$

覚え方

$|x|$が十分小さいとき　$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\approx f'(0)$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x$

また，一般に，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\cdots$

$|h|$が十分小さいとき　$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}\approx f'(a)$ より，$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h$

また，一般に，$f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h+\dfrac{1}{2}f''(a)h^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+\cdots$

関数 $y=f(x)$において，x の増分 Δx に対する y の増分を Δy とすると

$|x|$が十分小さいとき　$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\approx y'$　$\therefore \Delta y\approx y'\Delta x$

363

(1)

$f(x)=\sqrt[4]{1+x}$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}}$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1+\dfrac{1}{4}x$

(2)

$f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}$ とすると，$f'(x)=-3(1+x)^{-4}$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1-3x$

(3)

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}$ とすると，$f'(x)=-\dfrac{2}{3}(1+x)^{-\frac{5}{3}}$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1-\dfrac{2}{3}x$

(4)

$f(x)=\sin x$ とすると，$f'(x)=\cos x$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=x$

(5)

$f(x)=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1+2x$

(6)

$f(x)=\log_{10}(1+x)$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)\log 10}$ より，$f(x)\approx f(0)+f'(0)x=\dfrac{x}{\log 10}$

364

(1)

$$\sqrt{100.2}=\sqrt{100+0.2}=\sqrt{100\left(1+\frac{2}{1000}\right)}=10\sqrt{1+\frac{2}{1000}}$$

ここで，$f(x)=\sqrt{1+x}$ について，$|x|$ が十分小さいとき $f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1+\dfrac{1}{2}x$

よって，$\sqrt{100.2}=10\sqrt{1+\dfrac{2}{1000}}\approx 10\left(1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{1000}\right)=10.01$

(2)

$$\frac{1}{\sqrt{99.8}}=\frac{1}{\sqrt{100-0.2}}=\frac{1}{\sqrt{100\left(1-\frac{2}{1000}\right)}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{1000}\right)}}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ について，$|x|$ が十分小さいとき $f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1-\dfrac{1}{2}x$

よって，$\dfrac{1}{\sqrt{99.8}}=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(-\frac{2}{1000}\right)}}\approx\dfrac{1}{10}\left\{1-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{2}{1000}\right)\right\}=0.1001$

(3)

$$\sqrt[3]{730}=\sqrt[3]{9^3+1}=\sqrt[3]{9^3\left(1+\frac{1}{9^3}\right)}=9\sqrt[3]{1+\frac{1}{9^3}}$$

ここで，$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ について，$|x|$ が十分小さいとき $f(x)\approx f(0)+f'(0)x=1+\dfrac{1}{3}x$

よって，$\sqrt[3]{730}=9\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{9^3}}\approx 9\left(1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{9^3}\right)=9+\dfrac{1}{243}=9.0041\cdots\approx 9.004$

(4)

$$\sin 30.5^\circ=\sin(30^\circ+0.5^\circ)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{360}\right)$$

ここで，$f(x)=\sin x$ について，$|h|$ が十分小さいとき $f(a+h)\approx f(a)+f'(a)h=\sin a+h\cos a$

よって，$\sin 30.5^\circ=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}\right)\approx\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{360}\cos\dfrac{\pi}{6}=0.5+\dfrac{\pi}{360}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.5075574\approx 0.5076$

(5)

$$\tan 59° = \tan(60° - 1°) = \tan\left\{\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\right\}$$

ここで，$f(x) = \tan x$ について，$|h|$ が十分小さいとき $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h = \tan a + \dfrac{h}{\cos^2 a}$

よって，

$$\tan 59° = \tan\left\{\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{180}\right)\right\} = \tan\frac{\pi}{3} + \frac{-\dfrac{\pi}{180}}{\cos^2\dfrac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{180}\cdot 4 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{45} \approx 1.66223 \approx 1.6622$$

(6)

$$\log 100.001 = \log 100\left(1 + \frac{1}{10^5}\right) = \log 100 + \log\left(1 + \frac{1}{10^5}\right)$$

ここで，$f(x) = \log(1+x)$ について，$|x|$ が十分小さいとき $f(x) \approx f(0) + f'(0)x = x$

よって，$\log 100.001 = \log 100 + \log\left(1 + \dfrac{1}{10^5}\right) \approx 4.60517 + \dfrac{1}{10^5} = 4.60518$

365

解法 1

$S = 4\pi r^2$ において，$\dfrac{\Delta S}{S} = 0.01$ より，半径の増分 Δr は十分小さいとしてよいから，

$$\frac{\Delta S}{\Delta r} \approx S' = 8\pi r \quad \therefore \Delta S = 8\pi r \Delta r$$

よって，$\dfrac{\Delta S}{S} = \dfrac{8\pi r \Delta r}{4\pi r^2} = \dfrac{2\Delta r}{r}$

これと $\dfrac{\Delta S}{S} = 0.01$ から，$\dfrac{2\Delta r}{r} = 0.01 \quad \therefore \dfrac{\Delta r}{r} = 0.005$

ゆえに，半径は約 0.5%増加する。

また，$\dfrac{\Delta V}{\Delta r} \approx V' = 4\pi r^2$ より，$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$

$$\therefore \frac{\Delta V}{V} = \frac{4\pi r^2 \Delta r}{\dfrac{4}{3}\pi r^3} = 3\cdot\frac{\Delta r}{r} \approx 3\cdot 0.005 = 0.015$$

ゆえに，体積は約 1.5%増加する。

解法 2

$S=4\pi r^2$ において，$\dfrac{\Delta S}{S}=0.01$ より，半径の増分 Δr は十分小さいとしてよいから，

$$\frac{S(r+\Delta r)}{S(r)}=\frac{4\pi(r+\Delta r)^2}{4\pi r^2}=\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)^2\approx 1+2\cdot\frac{\Delta r}{r}$$

これと $\dfrac{S(r+\Delta r)}{S(r)}=1.01$ より，$1+2\cdot\dfrac{\Delta r}{r}\approx 1.01$　$\therefore \dfrac{\Delta r}{r}\approx 0.005$

よって，半径は約 0.5%増加する。

また，$\dfrac{V(r+\Delta r)}{V(r)}=\dfrac{\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\left(1+\dfrac{\Delta r}{r}\right)^3\approx 1+3\cdot\dfrac{\Delta r}{r}\approx 1+3\cdot 0.005=1+0.015$

よって，体積は 1.5%増加する。

366

0.03 は 0 に近いから，$(x+1)(x-2)=0.03$ の解は $-1, 2$ に近い値をとる。

そこで，解を $x=-1+h, 2+k$　($|h|<<1, |k|<<1$)，$f(x)=(x+1)(x-2)$ とおくと，

$f(-1+h)=f(2+k)=0.03$　・・・①

$f(-1+h)\approx f(-1)+f'(-1)h=-3h$　・・・②

$f(2+k)=f(2)+f'(2)k=3k$　・・・③

①，②，③より，$h\approx -0.01, k\approx 0.01$

よって，$(x+1)(x-2)=0.03$ の解の近似値は $-1.01,\ 2.01$

367

(1)

$f(x)=(1+x)^4$ とすると，$f'(x)=4(1+x)^3$，$f''(x)=12(1+x)^2$ より，

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2=1+4x+6x^2$$

(2)

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$f''(x)=\dfrac{2}{(1-x)^3}$ より，

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2=1+x+x^2$$

(3)

$f(x)=xe^x$ とすると，$f'(x)=e^x(1+x)$，$f''(x)=e^x(2+x)$ より，

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2=1+x+x^2$$