微分法の応用 6　演習問題

53

(1)

$y=x\cos x$ 上の点 $(t,t\cos t)$ の接線が原点を通るとすると，

$y'=\cos x-x\sin x$ より，

接線の方程式は $y=(\cos t-t\sin t)(x-t)+t\cos t$，すなわち $y=(\cos t-t\sin t)x+t^2\sin t$

したがって，$t^2\sin t=0$

よって，$t^2=0$ または $\sin t=0$

$t^2=0$ のとき

　$t=0$ より，接線の方程式は $y=x$

$\sin t=0$ のとき

　$t=n\pi$ （n は整数）

　このとき，$\cos n\pi=(-1)^n$，$\sin n\pi=0$ となるから，

　接線の方程式は

　n が偶数のとき $y=x$

　n が奇数のとき $y=-x$

以上より，$y=x, y=-x$

(2)

$f'(x)=-\dfrac{2(x-1)(x+2)}{(x^2+2)^2}$ より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\uparrow$	1	$\downarrow$

よって，$x=-2$ のとき極小値 $-\dfrac{1}{2}$，$x=1$ のとき極大値 1

(3)

$f(x)=x\log x-2x$ とすると，$f'(x)=\log x-1$ より，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	$\downarrow$	$-e$	$\uparrow$

よって，最小値は $-e$

(4)

$y' = 2x^{-3}e^{-x^{-2}}$ より,

$$\begin{aligned} y'' &= -6x^{-4}e^{-x^{-2}} + 4x^{-6}e^{-x^{-2}} \\ &= -2x^{-6}e^{-x^{-2}}\left(3x^2 - 2\right) \end{aligned}$$

よって, $y'' = 0$ かつ $x > 0$ を満たす x 座標は $x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ であり,

$0 < x < \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき $y'' > 0$, $\dfrac{\sqrt{6}}{3} < x$ のとき $y'' < 0$ となるから,

$x = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ は変曲点の x 座標である。

54

$$f'(x) = \frac{e^{kx}\left(kx^2 - 2x + k\right)}{\left(x^2 + 1\right)^2}$$

ここで, $\dfrac{e^{kx}}{\left(x^2 + 1\right)^2} > 0$ より, $f(x)$ が極値をもつためには,

$kx^2 - 2x + k$ の値の正負が変化するような x が存在すればよい。

すなわち, x の 2 次方程式 $kx^2 - 2x + k = 0$ が異なる 2 実数解をもてばよい。

このとき, この 2 次方程式の判別式を D とすると, $D > 0$ より, $\dfrac{D}{4} = 1 - k^2 > 0$ となる。

これと条件 $k > 0$ より, $0 < k < 1$

55

$P(0,t)$ とおき，$f(t)=AP+BP+CP$ とすると，$f(t)=2\sqrt{t^2+1}+|t-1|$

【ⅰ】$t\geq 1$ のとき

$f(t)=2\sqrt{t^2+1}+t-1$ より，$f'(t)=\dfrac{2t+\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

$f'(t)>0$ より，$f(t)$ は単調増加する。
よって，最小値は $f(1)=2\sqrt{2}$

【ⅱ】$t<1$ のとき

$f(t)=2\sqrt{t^2+1}-t+1$ より，$f'(t)=\dfrac{2t-\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t^2+1}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\neq 0$ だから，$f'(t)=0$ のとき $2t-\sqrt{t^2+1}=0$　$\therefore 2t=\sqrt{t^2+1}$

$2t=\sqrt{t^2+1}$ ならば $(2t)^2=\left(\sqrt{t^2+1}\right)^2$ より，$3t^2=1$

よって，$2t=\sqrt{t^2+1}$ を満たす解の候補は $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

このうち，$2t=\sqrt{t^2+1}$ を満たすのは $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ゆえに，$2t=\sqrt{t^2+1}$ の解，すなわち $f'(t)=0$ の解は $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

これより，$f(t)=2\sqrt{t^2+1}-t+1$ の増減は次のようになる。

t	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	$-$	0	$+$	/
$f(t)$	$\downarrow$	$1+\sqrt{3}$	$\uparrow$	/

よって，最小値は $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=1+\sqrt{3}$

【1】と【2】の最小値を比較することにより，求める P の y 座標は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となる。

56

(1)

$f'(x)=-\dfrac{(x+3)(x-1)}{x^4}$ より，増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{5}{27}$	$\nearrow$	/	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって，$f(x)$ は $x=-3$ のとき極小値 $-\dfrac{5}{27}$ をとる。

(2)

$x=0$ のとき，左辺＝1，右辺＝0 だから，$x=0$ は方程式の解でない。

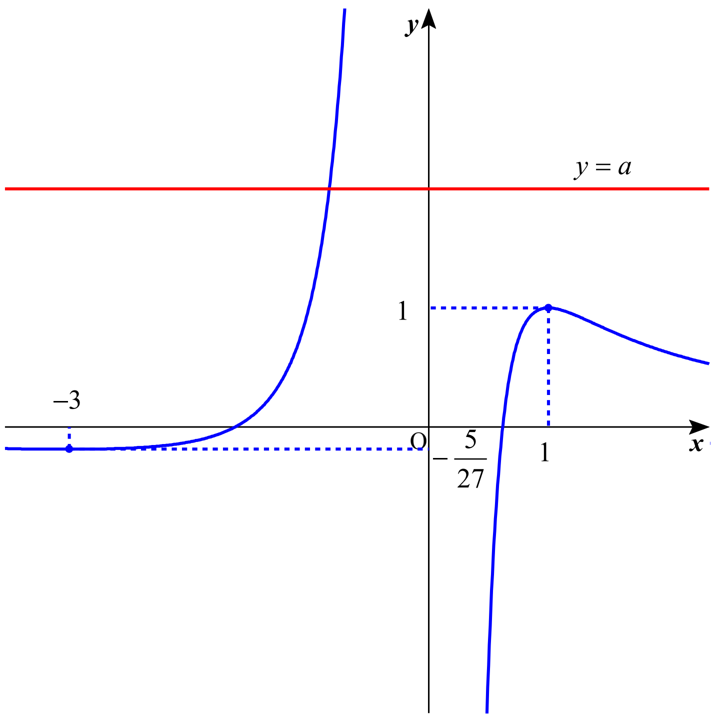
したがって，$a=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ と変形でき，$y=f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ とすると，

$\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

これと(1)の増減表より，グラフは下図のようになる。

実数解は $y=a$ と $y=f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$ の交点の x 座標だから，

実数解が 1 個であるときの，a のとりうる値の範囲は $a<-\dfrac{5}{27}$，$1<a$



57

(1)

$g(x)=\log(1+x)-\dfrac{x}{1+x}$ とおくと，$gf(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}>0$ より，$x>0$ のとき，$g'(x)>0$

これより，$g(x)$ は $x\geq 0$ で単調増に加する。よって，$g(x)>g(0)=0$

ゆえに，$x>0$ のとき，$\log(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$

(2)

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\left\{\log(1+x)-\dfrac{1}{1+x}\right\}=-\dfrac{g(x)}{x^2}$

(1)より，$g(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加するから，$f(x)$ は $x>0$ で単調に減少する。

(3)

条件より，$f(a)>f(b)$ が成り立つ。すなわち $\dfrac{\log(1+a)}{a}>\dfrac{\log(1+b)}{b}$

よって，$\log(1+a)^b>\log(1+b)^a$　$\therefore (1+a)^b>(1+b)^a$

58

(1)

$x>0$ より，$\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{6}{x}\Leftrightarrow x^3<6e^x\Leftrightarrow 6e^x-x^3>0$

したがって，$6e^x-x^3>0$ を証明すればよい。

$f(x)=6e^x-x^3$ とおくと，$f'(x)=6e^x-3x^2$，$f''(x)=6e^x-6x$，$f'''(x)=6(e^x-1)$

$x>0$ のとき $f'''(x)>0$ より，$f''(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加するから，$f''(x)>f''(0)=6>0$

これより，$f'(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加するから，$f'(x)>f'(0)=6>0$

よって，$f(x)$ は $x\geq 0$ で単調に増加し，$f(x)>f(0)=6>0$　$\therefore 6e^x-x^3>0$

(2)

$x>0$ のとき $0<\dfrac{x^2}{e^x}<\dfrac{6}{x}$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

59

$f(x)=\log(\log x)$ とおくと，$f(x)$ は $x>1$ で微分可能で，$f'(x)=\dfrac{1}{x\log x}$

したがって，平均値の定理より，$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}=\dfrac{1}{c\log c}$　（$e\leq p<c<q$）

を満たす実数 c が存在し，$e<c$ より，$e\log e<c\log c$　$\therefore \dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{c\log c}$

ゆえに，$\dfrac{\log(\log q)-\log(\log p)}{q-p}=\dfrac{1}{c\log c}<\dfrac{1}{e}$ より，$\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$

60

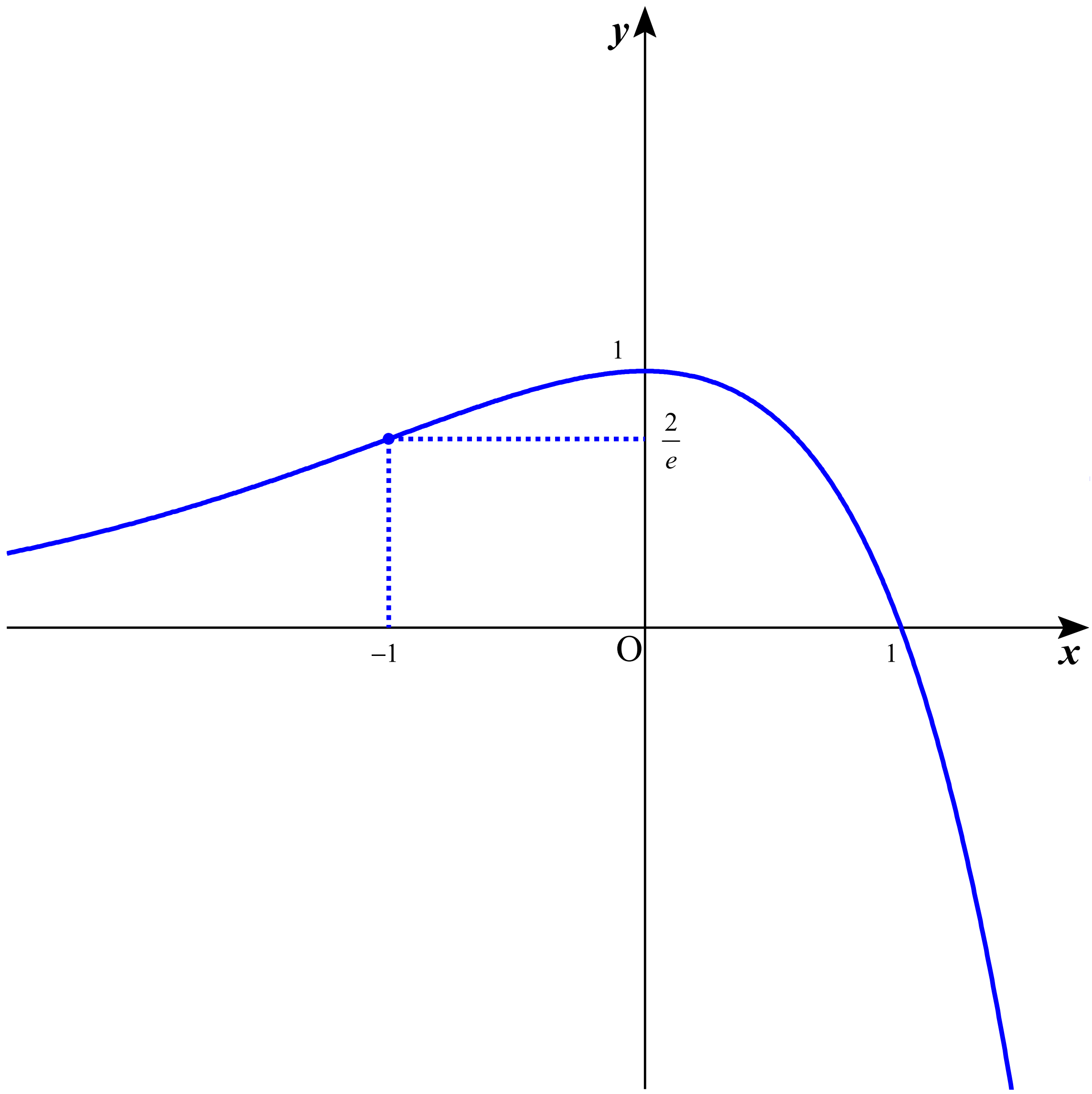
(1)

$f'(x) = -xe^x$， $f''(x) = -e^x(1+x)$ より，グラフの振る舞いは次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\uparrow\cup$	$\frac{2}{e}$	$\uparrow\cap$	1	$\downarrow\cap$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(1-x)e^x = -\infty$， $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(1-x)e^x = 0$

変曲点は$\left(-1, \frac{2}{e}\right)$， 極大点は$(0,1)$



(2)

接点を$\left(t,(1-t)e^t\right)$とすると，$f'(t)=-te^t$ より，

接線の方程式は$y=-te^t(x-t)+(1-t)e^t$

この直線が点$(a,0)$を通るならば，$0=-te^t(a-t)+(1-t)e^t$ より，

$e^t\{t^2-(a+1)t+1\}=0$，すなわち$t^2-(a+1)t+1=0$を満たす実数tが存在する。

よって，接線の本数はtの 2 次方程式$t^2-(a+1)t+1=0$の実数解の数と一致する。

そこで，この方程式の判別式をDとすると，$D=(a+1)^2-4=(a+3)(a-1)$より，

接線の本数が 2 のとき

　異なる 2 つの実数解をもつから，$D>0$ より，$a<-3, 1<a$

接線の本数が 1 のとき

　重解をもつから，$D=0$ より，$a=-3,1$

接線の本数が 0 のとき

　実数解をもたないから，$D<0$ より，$-1<a<3$

以上より，

$a<-3, 1<a$ のとき 2 本，$a=-3,1$ のとき 1 本，$-1<a<3$ のとき 0 本

61

(1)

円の方程式は$(x-1)^2+y^2=1$

点$(1+t,s)$はこの方程式を満たすから，$\{(1+t)-1\}+s^2=1$　$\therefore s^2=1-t^2$

これと点$(1+t,s)$は第 1 象限にあることから，$s>0$ より，$s=\sqrt{1-t^2}$

(2)

$(x-1)^2+y^2=1$をxで微分すると，

$$\frac{d(x-1)^2}{dx}+\frac{dy^2}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{d(x-1)^2}{dx}+\frac{dy^2}{dy}\frac{dy}{dx}=0 \text{ より，} 2(x-1)+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$y\neq 0$ だから，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-1}{y}$

よって，点$(1+t,s)$における接線の方程式は$y=-\dfrac{(1+t)-1}{s}\{x-(1+t)\}+s$

この方程式を整理すると，$sy=-tx+t+t^2+s^2$

ここで，$(1+t,s)$は$(x-1)^2+y^2=1$を満たすから，$t^2+s^2=1$

ゆえに，$tx+sy-t-1=0$

　補足：円の接線の公式を用いると，

　点$(1+t,s)$における接線の方程式は，$\{(1+t)-1\}(x-1)+sy=1$ より，$tx+sy-t-1=0$

点 A のy座標が 0 であることと$t\neq 0$から，点 A のx座標は$x=\dfrac{1+t}{t}$

(3)

$tx+sy-t-1=0$ （$0<t<1$）より，$\dfrac{x}{\dfrac{1+t}{t}}+\dfrac{y}{\dfrac{1+t}{s}}=1$

よって，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1+t}{t},0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\dfrac{1+t}{s}\right)=\left(0,\dfrac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$であり，

これより，

$$L=\sqrt{\left(\frac{1+t}{t}\right)^2+\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{(1+t)^2}{t^2(1-t^2)}}$$
$$=\sqrt{\frac{1+t}{t^2(1-t)}}$$

(4)

$f(t)=\dfrac{1+t}{t^2(1-t)}$ （$0<t<1$）とおくと，$f(t)>0$，$L=\sqrt{f(t)}$ より，

$f(t)$が最小となるとき，Lが最小となる。

したがって，$f(t)$が最小となるtの値を求めればよい。

$$f'(t)=\left\{\frac{1+t}{t^2(1-t)}\right\}'$$
$$=\left(\frac{1+t}{t^2-t^3}\right)'$$
$$=\frac{(t^2-t^3)-(1+t)(2t-3t^2)}{(t^2-t^3)^2}$$
$$=\frac{2t^3+2t^2-2t}{t^4(1-t)^2}$$
$$=\frac{2(t^2+t-1)}{t^3(1-t)^2}$$

$0<t<1$より，

$f'(t)=0$の解は，$t^2+t-1=0$の解であるから，

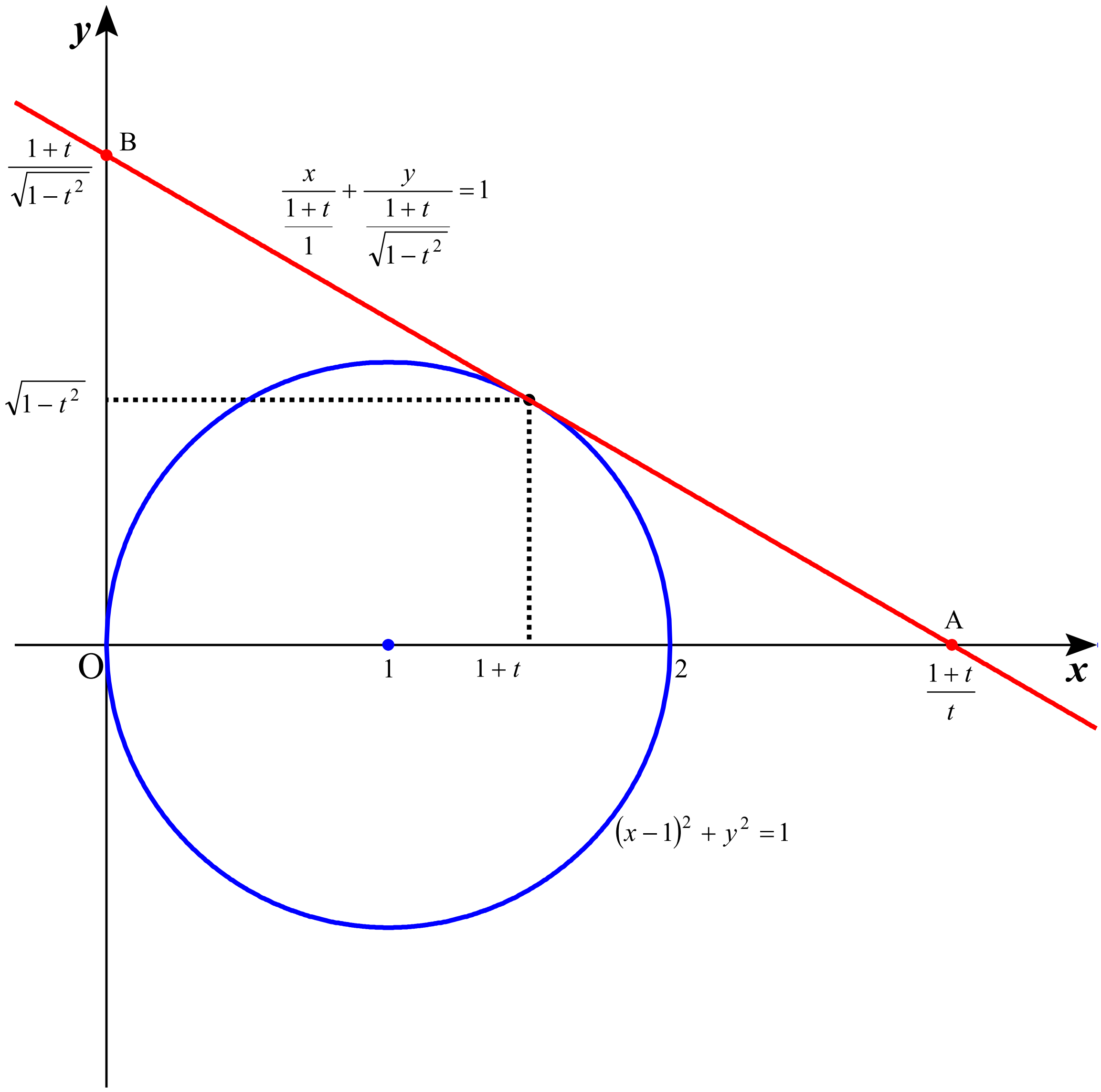
$t^2+t-1=0$を解くことにより，$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$f'(t)$の正負もt^2+t-1の正負で決まる。

よって，$f(t)$の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(t)$	/	↓	極小	↑	/

ゆえに，L が最小となる t の値は $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$



62

$f(x)=a\log(x+a)+\dfrac{a}{2}x^2-x$ とおくと，

与えられた方程式の個数は曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の個数と等しいから，
曲線 $y=f(x)$ と x 軸との共有点の個数について調べればよい。

$$f'(x)=\frac{a}{x+a}+ax-1$$
$$=\frac{ax\left(x+a-\dfrac{1}{a}\right)}{x+a}$$

より，

$f'(x)=0$ の解は $x=0,-a+\dfrac{1}{a}$

これと $f(x)$ の定義域が $x+a>0$ より，$x>-a$ （$-a<0$）だから，

a の範囲を $0<-a+\dfrac{1}{a}$，$0=-a+\dfrac{1}{a}$，$-a+\dfrac{1}{a}<0$ の 3 つの場合に分けて

$f(x)$ の増減について調べることにする。

【ｉ】 $0<-a+\dfrac{1}{a}$ のとき

$a>0$ かつ $0<-a+\dfrac{1}{a}$ より，$0<a<1$　・・・①

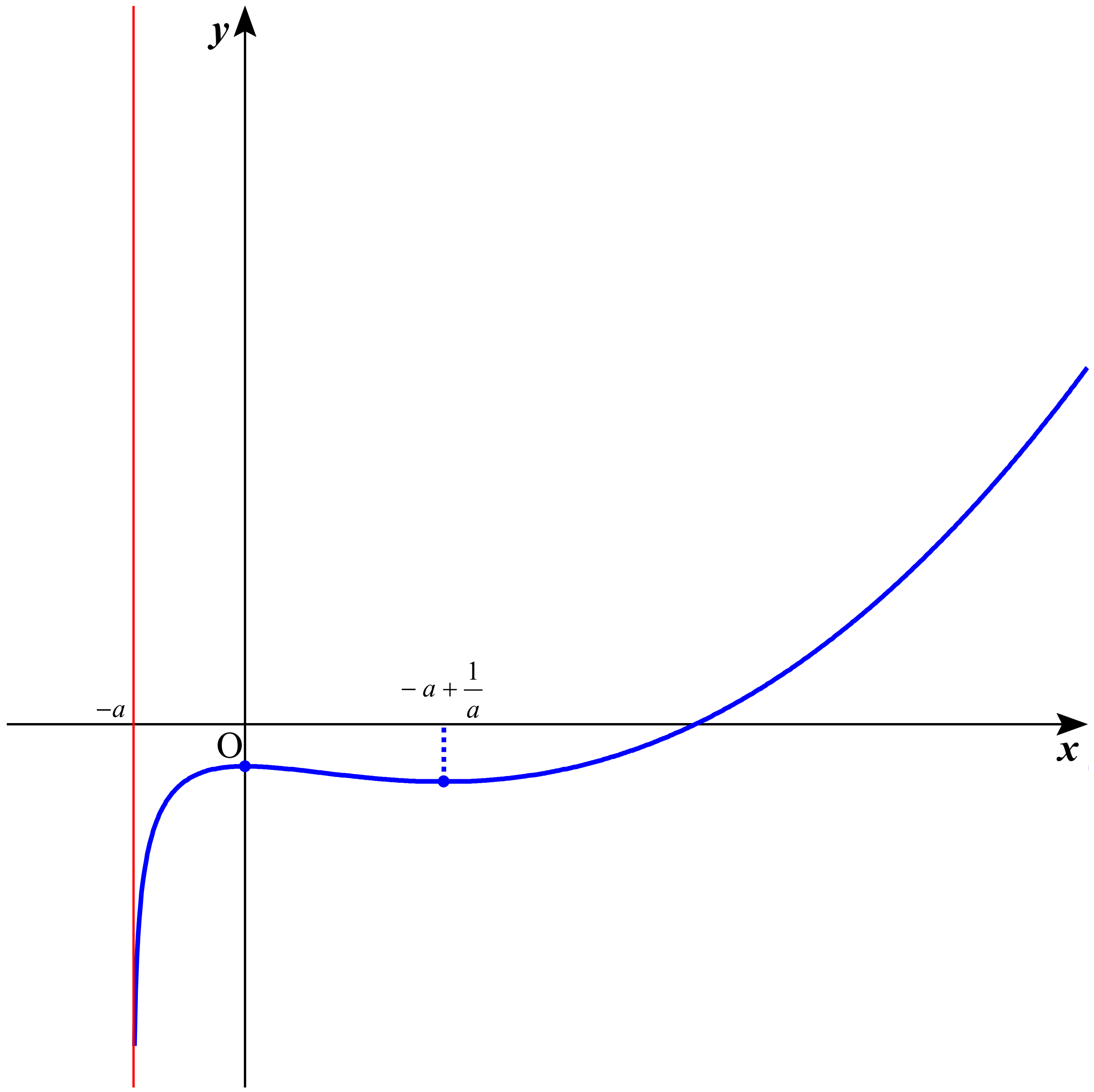
増減表は次のようになる。

x	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$	$-a+\dfrac{1}{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↑	極大値	↓	極小値	↑

よって，
$y=f(x)$ は $x=0$ で極大値 $f(0)=a\log a$ をとり，これと①より，$f(0)<0$
また，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{a\log(x+a)+\frac{a^2}{2}x^2-x\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{a\log(x+a)+\frac{a^2}{2}x^2\left(1-\frac{2}{a^2x^3}\right)\right\}$$
$$=\infty$$

ゆえに，$y=f(x)$ は $x>-a+\dfrac{1}{a}$ において x 軸とただ 1 つの共有点をもつ。


y
x
O
$-a$
$-a+\frac{1}{a}$

【ⅱ】 $0=-a+\dfrac{1}{a}$ のとき

$a>0$ かつ $0=-a+\dfrac{1}{a}$ より, $a=1$ ・・・②

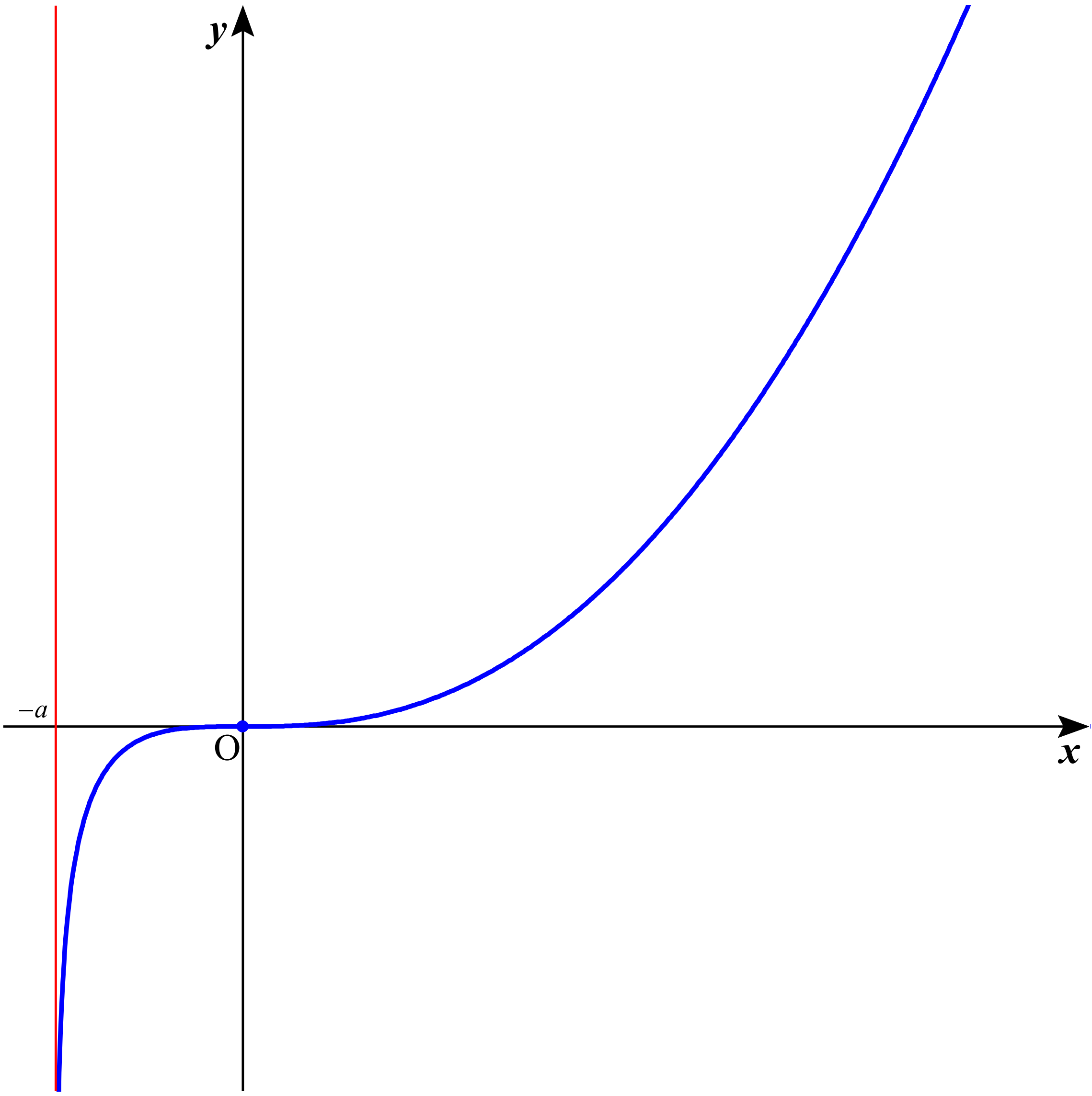
増減表は次のようになる。

x	$-a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$+$
$f(x)$	/	↑	$f(0)$	↑

よって, $y=f(x)$ は定義域において単調に増加し,

$f(x)=\log(x+1)+\dfrac{1}{2}x^2-x$ より, $f(0)=0$

ゆえに, $y=f(x)$ は $x=0$ において x 軸とただ 1 回だけ交わる。



【iii】 $-a+\dfrac{1}{a}<0$ のとき

$a>0$ かつ $-a+\dfrac{1}{a}<0$ より，$a>1$ ・・・②

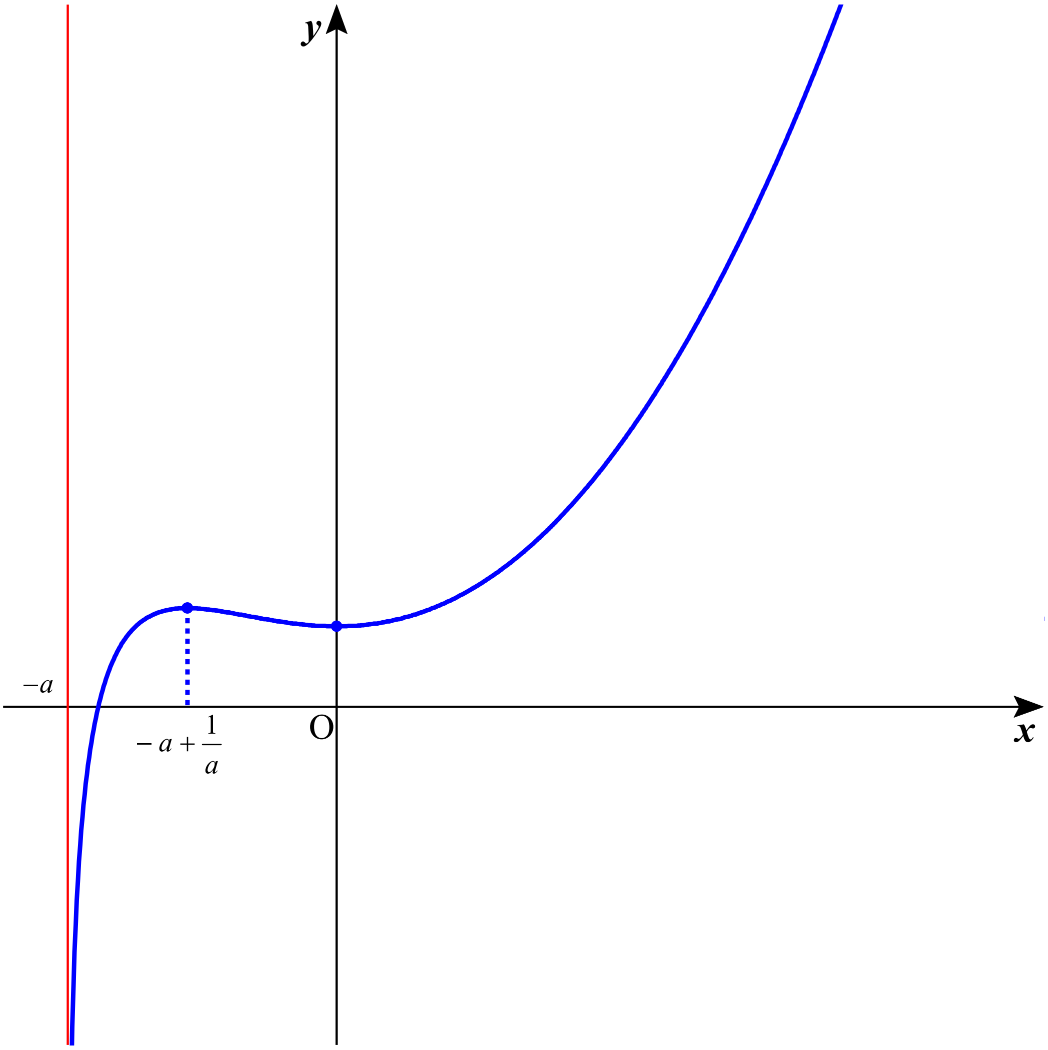
増減表は次のようになる。

x	$-a$	$\cdots$	$-a+\dfrac{1}{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	/	↑	極大値	↓	極小値	↑

よって，$y=f(x)$ は $x=0$ で極小値を $f(0)=a\log a$ をとり，これと②より，$f(0)>0$

また，$\displaystyle\lim_{x\to -a+0} f(x)=\lim_{x\to -a+0}\left\{a\log(x+a)+\frac{a^2}{2}x^2-x\right\}=-\infty$

ゆえに，$y=f(x)$ は $-a<x<-a+\dfrac{1}{a}$ において x 軸とただ 1 つの共有点をもつ。



【ⅰ】～【ⅲ】より，曲線 $y=f(x)$ は x 軸とただ 1 つの共有点をもつ。
ゆえに，与式の方程式はただ 1 つの実数解をもつ。

63

(1)

$f(x)=\log x$ とすると，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能だから，

平均値の定理より，$\dfrac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f'(c)$ （$x<c<x+1$）を，

すなわち $\log(x+1)-\log x=\dfrac{1}{c}$ （$x<c<x+1$）　・・・①

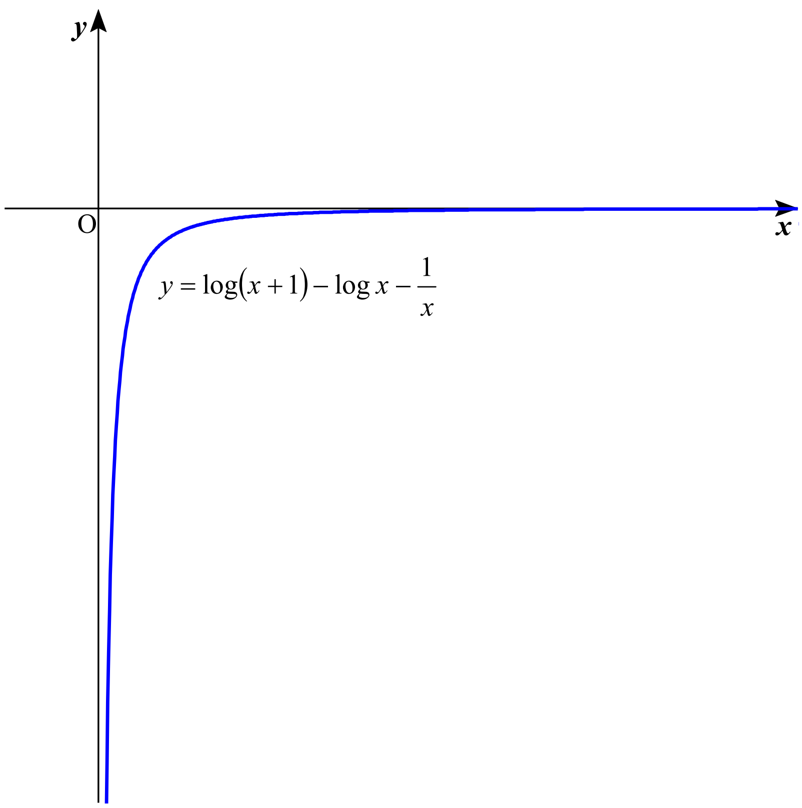
を満たす実数 c が存在する。

また，$x<c<x+1$ より，$\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{x}$　・・・②

よって，①，②より，$\log(x+1)-\log x<\dfrac{1}{x}$ が成り立つ。

補足

$f(x)=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x}$ の増減から示してもよい。



(2)

$g(x)=x\log x-(x-1)\log(x+1)$ とすると，

$$g'(x)=\log x+1-\log(x+1)-\frac{x-1}{x+1}$$
$$=-\{\log(x+1)-\log x\}+\frac{2}{x+1}$$

ここで，(1)より，$-\{\log(x+1)-\log x\}>-\dfrac{1}{x}$

$$\therefore g'(x)>-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{x-1}{x(x+1)}$$

ゆえに，$g(x)$ は $x\geq 1$ において単調に増加し，$g(x)\geq g(1)=0$ より，
$x\geq 1$ のとき $x\log x\geq (x-1)\log(x+1)$ が成り立つ。