積分法 8　定積分の種々の問題

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$ について,

$f(t)$ の原始関数を $F(t)$ とすると,

$$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x$$
$$= F(x) - F(a)$$

よって,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d\{F(x) - F(a)\}}{dx}$$
$$= f(x)$$

423

(1)

$\cos^2 t$ の原始関数を $F(t)$ とすると,

$$y = \int_x^{2x} \cos^2 t dt$$
$$= [F(t)]_x^{2x}$$
$$= F(2x) - F(x)$$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{F(2x) - F(x)\}$$
$$= (2x)' F'(2x) - F'(x)$$
$$= 2\cos^2 2x - \cos^2 x$$

(2) 解法は(1)と同じ

$e^t \sin t$ の原始関数を $F(t)$ とすると,

$y = F(x^2) - F(x)$

よって,

$$\frac{dy}{dx} = (x^2)' F'(x^2) - F'(x)$$
$$= 2xe^{x^2} \sin x^2 - e^x \sin x$$

424

(1)

$F(x)=x\int_0^x e^t dt+\int_0^x te^t dt$ より,

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx}&=\int_0^x e^t dt+x\left(\int_0^x e^t dt\right)'+\left(\int_0^x te^t dt\right)'\\&=\left[e^t\right]_0^x+xe^x+xe^x\\&=2xe^x+e^x-1\end{aligned}$$

(2)

$F(x)=\int_1^x t\log tdt-x\int_1^x \log tdt$ より,

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx}&=\left(\int_1^x t\log tdt\right)'-\left\{\int_1^x \log tdt+x\left(\int_1^x \log tdt\right)'\right\}\\&=x\log x-\left(\left[t\log t-t\right]_1^x+x\log x\right)\\&=x\log x-(x\log x-x+1+x\log x)\\&=-x\log x+x-1\end{aligned}$$

(3)

$F(x)=x\int_0^x \cos^2 tdt-\int_0^x t\cos^2 tdt$ より,

$$\begin{aligned}\frac{dF(x)}{dx}&=\int_0^x \cos^2 tdt+x\left(\int_0^x \cos^2 tdt\right)'-\left(\int_0^x t\cos^2 tdt\right)'\\&=\int_0^x \frac{1+\cos 2t}{2}dt+x\cos^2 x-x\cos^2 x\\&=\frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^x\\&=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\end{aligned}$$

(4)

$F(x)=x\int_x^{2x^2}\sin tdt+\int_x^{2x^2}t\sin tdt$ より,

$$\frac{dF(x)}{dx}=\int_x^{2x^2}\sin tdt+x\left(\int_x^{2x^2}\sin tdt\right)'+\left(\int_x^{2x^2}t\sin tdt\right)'$$

ここで $\sin t$ の原始関数を $G(t)$, $t\sin t$ の原始関数を $H(t)$ とすると,

$$\left(\int_x^{2x^2}\sin t\,dt\right)' = \left\{G(2x^2)-G(x)\right\}'$$
$$= (2x^2)'G'(2x^2)-G'(x)$$
$$= 4x\sin 2x^2 - \sin x$$

$$\left(\int_x^{2x^2}t\sin t\,dt\right)' = \left\{H(2x^2)-H(x)\right\}'$$
$$= (2x^2)'H'(2x^2)-H'(x)$$
$$= 4x\cdot 2x^2\sin 2x^2 - x\sin x$$
$$= 8x^3\sin 2x^2 - x\sin x$$

よって，

$$\frac{dF(x)}{dx} = \int_x^{2x^2}\sin t\,dt + x\left(4x\sin 2x^2-\sin x\right)+\left(8x^3\sin 2x^2 - x\sin x\right)$$
$$= \left[-\cos t\right]_x^{2x^2} + 4x^2\sin 2x^2 - x\sin x + 8x^3\sin 2x^2 - x\sin x$$
$$= -\cos 2x^2 + \cos x + 4x^2(1+2x)\sin 2x^2 - 2x\sin x$$

425

$$f(x)=\int_0^x \sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^x$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$f'(x)=\sin 2x$ より，

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	/
$f(x)$	0	↑	極大	↓	極小	↑	極大	↓	0

$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$ のとき極大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=1$

$x=\pi$ のとき極小値 $f(\pi)=0$

補足

$f(x)=f(x+\pi)$ より，$f(x)$ は周期 π の周期関数である。

三角関数では周期性にも注目

426

(1)

$$f(x)=\int_0^x(\sin t+\sin 2t)dt$$
$$=\left[-\cos t-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^x$$
$$=-\cos x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{3}{2}$$

$f'(x)=(1+2\cos x)\sin x$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$	/	+	0	−	0	+	0	−	/
$f(x)$	0	↑	$\frac{9}{4}$	↓	2	↑	$\frac{9}{4}$	↓	0

よって，$x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{9}{4}$，$x=0,\ 2\pi$ のとき最小値 0 をとる。

(2)

$$f(x)=\int_1^x(2-t)\log t\,dt$$
$$=2\int_1^x\log t\,dt-\int_1^x t\log t\,dt$$
$$=2[t\log t-t]_1^x-\left(\left[\frac{t^2\log t}{2}\right]_1^x-\int_1^x\frac{t}{2}dt\right)$$
$$=2(x\log x-x+1)-\left(\frac{x^2\log x}{2}-\left[\frac{t^2}{4}\right]_1^x\right)$$
$$=2x\log x-2x+2-\frac{x^2\log x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}$$
$$=\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\log x+\frac{x^2}{4}-2x+\frac{7}{4}$$

$f'(x)=(2-x)\log x$ より，$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	e
$f'(x)$	/	+	0	−	/
$f(x)$	0	↑	$2\log 2-\frac{5}{4}$	↓	$\frac{7-e^2}{4}$

よって，$x=2$ のとき最大値 $2\log 2-\frac{5}{4}$，$x=e$ のとき最小値 $\frac{7-e^2}{4}$ をとる。

427

(1)

$a=\int_0^2 f(t)e^t\,dt$ とおくと， $f(x)=x+a$ より，

$$
\begin{aligned}
a&=\int_0^2 f(t)e^t\,dt\\
&=\int_0^2 (t+a)e^t\,dt\\
&=\left[(t+a)e^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt\\
&=(2+a)e^2-a-\left[e^t\right]_0^2\\
&=a\left(e^2-1\right)+e^2+1
\end{aligned}
$$

よって， $a=\dfrac{1+e^2}{2-e^2}$

ゆえに， $f(x)=x+\dfrac{1+e^2}{2-e^2}$

(2)

$a=\int_1^e \dfrac{f(t)+1}{t}\,dt$ とおくと， $f(x)=\log x-ax$ より，

$$
\begin{aligned}
a&=\int_1^e \frac{\log t-at+1}{t}\,dt\\
&=\int_1^e\left(\frac{\log t}{t}-a+\frac{1}{t}\right)dt\\
&=\int_1^e\left\{(\log t)'\log t-a+\frac{1}{t}\right\}dt\\
&=\left[\frac{(\log t)^2}{2}-at+\log t\right]_1^e\\
&=\frac{3}{2}-ae+a
\end{aligned}
$$

よって， $a=\dfrac{3}{2e}$

ゆえに， $f(x)=\log x-\dfrac{3}{2e}x$

(3)

$a=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{f(t)-\frac{\pi}{3}\right\}\sin t dt$ とおくと，$f(x)=\sin x-a$ より，

$$a=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sin t-a-\frac{\pi}{3}\right\}\sin t dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\sin^2 t-\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\sin t\right\}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}-\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\sin t\right\}dt$$

$$=\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}+\left(a+\frac{\pi}{3}\right)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{8}$$

よって，$a=-\frac{\sqrt{3}}{12}$

ゆえに，$f(x)=\sin x+\frac{\sqrt{3}}{12}$

428

(1)

与式の x に $\frac{\pi}{2}$ を代入すると，$0=\sin\frac{\pi}{2}-a$ より，$a=1$　・・・(答)

与式より，$x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}tf(t)dt=\sin x-a$

両辺を x について微分すると，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\cos x$ より，$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt=\cos x$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}f(t)dt=\cos x$ を x について微分すると，$f(x)=-\sin x$　・・・(答)

(2)

与式より，$x+x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt=e^x-1$

両辺を x について微分すると，$1+\int_a^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=e^x$ より，$\int_a^x f(t)dt=e^x-1$

$\int_a^x f(t)dt=e^x-1$ を x について微分すると，$f(x)=e^x$　・・・(答)

$\int_a^x f(t)dt=e^x-1$ の x に a を代入すると，$0=e^a-1$ より，$e^a=1$　$\therefore a=0$　・・・(答)

429

(1)

$$
\begin{aligned}
(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2 &= 1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2-\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2\right)\\
&=\sum_{k=1}^{2n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\\
&=\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(2\cdot 2n+1)-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\
&=\frac{1}{6}n(2n+1)(7n+1)
\end{aligned}
$$

より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2\right\} &= \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n+1)(7n+1)}{n^3}\\
&=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left\{1\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(7+\frac{1}{n}\right)\right\}\\
&=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 7\\
&=\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2\right\} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2
\end{aligned}
$$

ここで，$\frac{k}{n}=x_k$ とおくと，$\frac{1}{n}\leq x_k\leq\frac{n}{n}=1$ より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2\right\} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2\\
&=\int_0^1(1+x)^2\,dx\\
&=\left[\frac{(1+x)^3}{3}\right]_0^1\\
&=\frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

あるいは,

$1+\frac{k}{n}=x_k$ とおくと，$1+\frac{1}{n}\leq x_k\leq 1+\frac{n}{n}=2$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\left\{(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2+\cdots+(2n)^2\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$$
$$=\int_1^2 x^2dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$
$$=\frac{7}{3}$$

430

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left\{\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}xdx$$
$$=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{\pi}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$$
$$=\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+k}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)^2$$
$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx$$
$$=\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2+k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\cdot\frac{k}{n}}{n^2\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}\log 2$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k}+\sqrt{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k}{n}}+1\right)^2$$

$$=\int_0^1\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx$$

$$=\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1$$

$$=\frac{17}{6}$$

431

(1)

$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ において，$0 \leq \sin x \leq 1$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x} \leq 1$　$\therefore 1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x}} \leq \sqrt{2}$

等号は常には成り立たないから，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}dx$

すなわち $\displaystyle\frac{\pi}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}} < \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(2)

$$\begin{aligned}(\sin x+\cos x)^2 &= \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x \\ &= 1+\sin 2x\end{aligned}$$

$0 \leq x \leq 1$ において，$0 \leq 2x \leq 2 < \pi$ より，$1 \leq 1+\sin 2x \leq 1+\sin 2\cdot\dfrac{\pi}{4} = 2$

よって，$1 \leq (\sin x+\cos x)^2 \leq 2$

ゆえに，$x^2 \leq x^{(\sin x+\cos x)^2} \leq x$ （$\because 0 \leq x \leq 1$）

等号は常には成り立たないから，$\displaystyle\int_0^1 x^2 dx < \int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2} dx < \int_0^1 x dx$

すなわち $\displaystyle\frac{1}{3} < \int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2} dx < \frac{1}{2}$

432 区分求積法の応用　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$

$k \leq x \leq k+1$（k は自然数）とすると，$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

等号は常には成り立たないから，$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\{(k+1)-k\} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \frac{1}{\sqrt{k}}\{(k+1)-k\}$

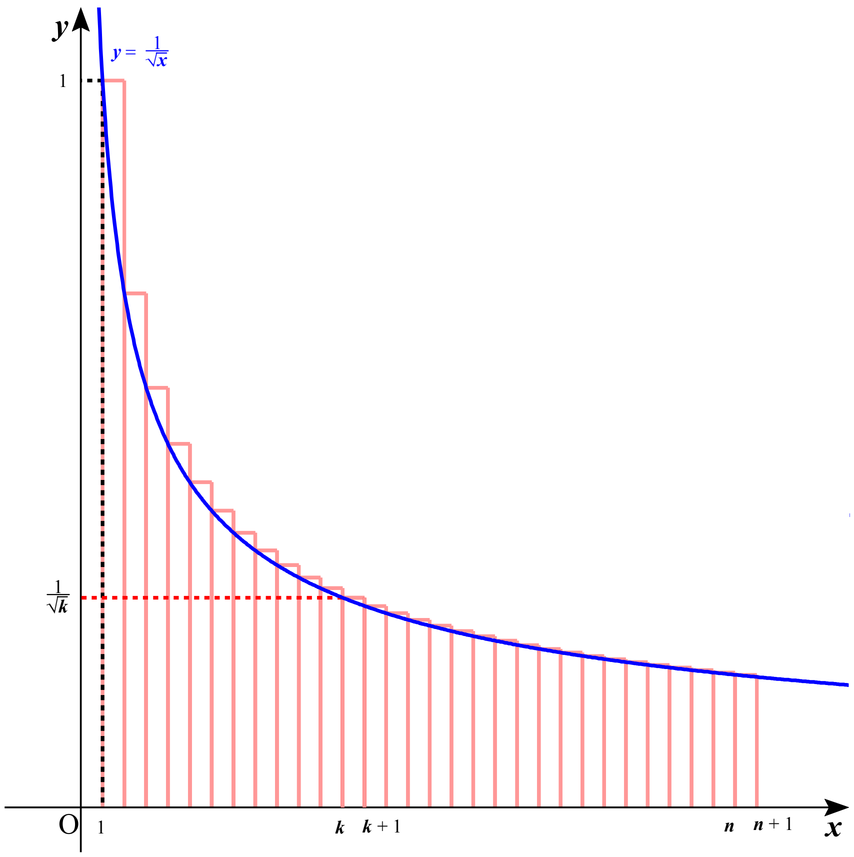
【ｉ】

$\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \frac{1}{\sqrt{k}}\{(k+1)-k\}$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx &= \int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1} \\ &= 2\left(\sqrt{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

よって，すべての自然数 n について，$2\left(\sqrt{n+1}-1\right) < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ が成り立つ。



【ⅱ】

$\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\{(k+1)-k\}<\displaystyle\int_k^{k+1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$

ただし，$n-1\geq 1$ より，$n\geq 2$

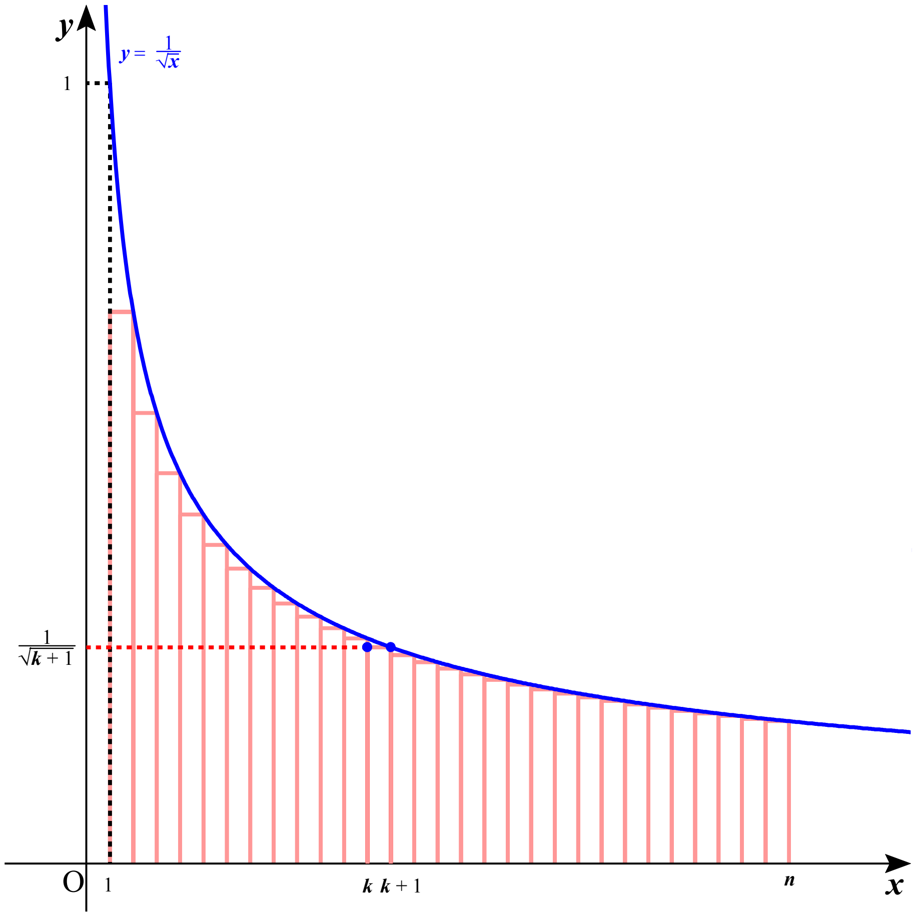
$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{\sqrt{x}}dx&=\int_1^n\frac{1}{\sqrt{x}}dx\\&=\left[2\sqrt{x}\right]_1^n\\&=2\sqrt{n}-2\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$ すなわち $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$

また，$n=1$ のとき，$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=2\sqrt{n}-1$ が成り立つ。

ゆえに，すべての自然数 n について，$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n}-1$ が成り立つ。



【ⅰ】,【ⅱ】より，与式が成り立つ。

433　区分求積法の応用　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) < \int_1^n f(x)dx < \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$

(1)

$k \leq x \leq k+1$（k は自然数）とすると，$\dfrac{1}{(k+1)^2} \leq \dfrac{1}{x^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$

等号は常に成り立たないから $\dfrac{1}{(k+1)^2}\{(k+1)-k\} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx$

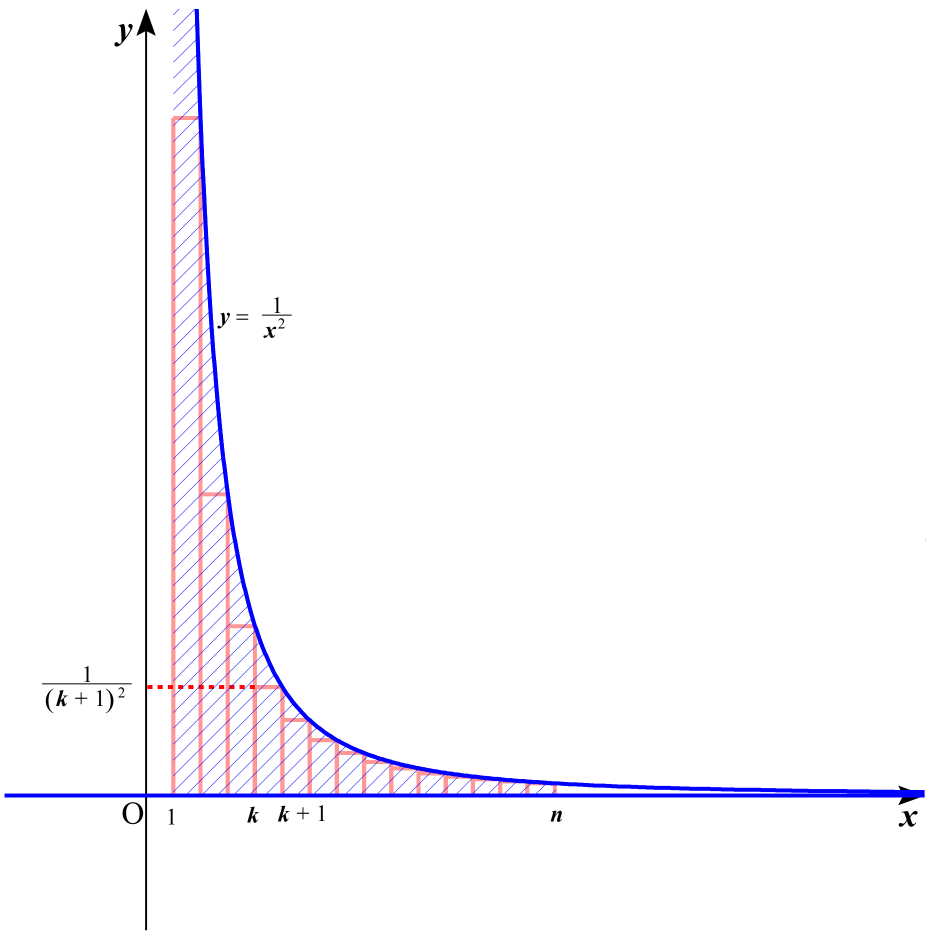
よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} < \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx$（ただし，$n-1 \geq 1$ より，$n \geq 2$）

ここで，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2}dx = \int_1^n \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$

ゆえに，$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 1 - \dfrac{1}{n}$



(2)

$k \leq x \leq k+1$（k は自然数）とすると，$\dfrac{1}{(k+1)^3} \leq \dfrac{1}{x^3} \leq \dfrac{1}{k^3}$

等号は常には成り立たないから $\dfrac{1}{(k+1)^3}\{(k+1)-k\} < \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^3}\,dx$

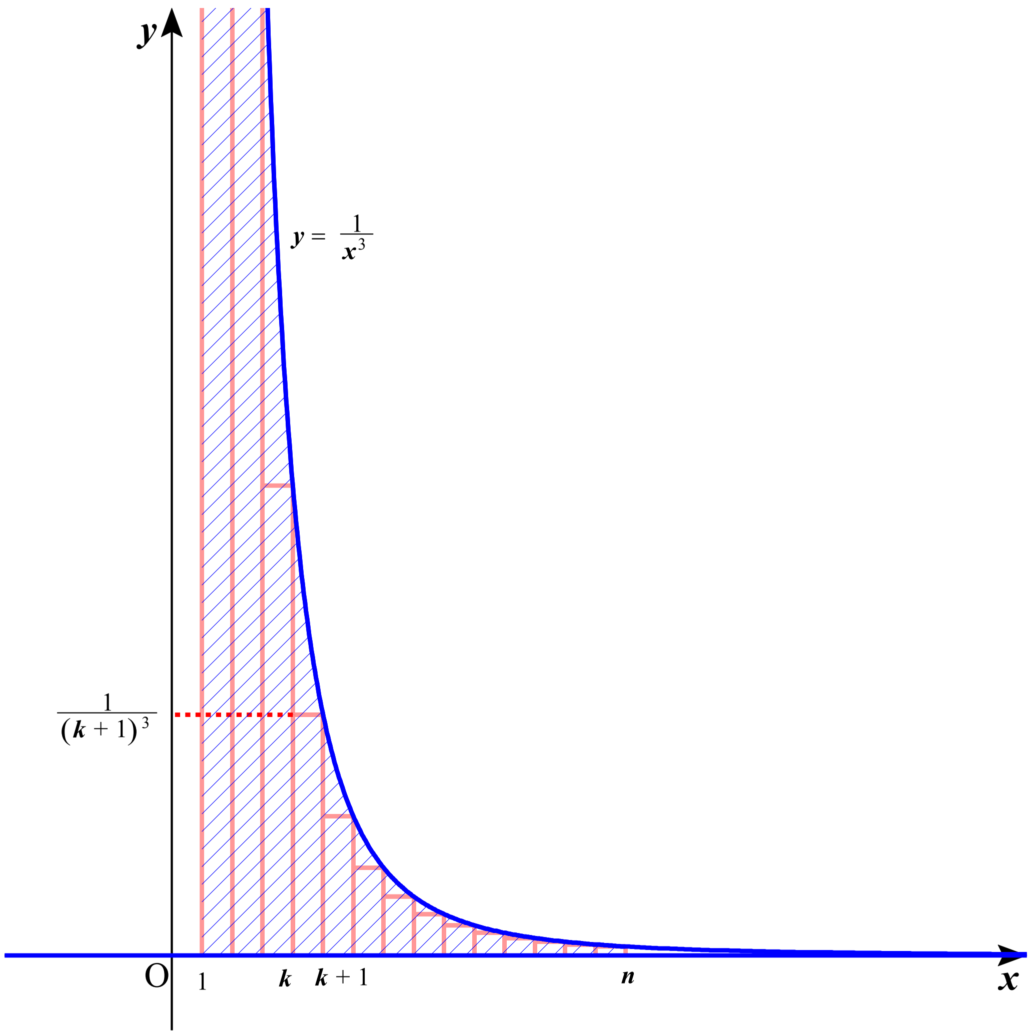
よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^3} < \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{x^3}\,dx$（ただし，$n-1 \geq 1$ より，$n \geq 2$）

ここで，

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^3} = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{x^3}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

ゆえに，$\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n^2}$



434

(1)

$\dfrac{1}{1+\cos t}$ の原始関数を $F(t)$ とすると， $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'(t)=\frac{1}{1+\cos t}$ より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1+\cos t}&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[F(t)\right]_0^x}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\\
&=F'(0)\\
&=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(2)

$(1+\sin t)^2$ の原始関数を $F(t)$ とすると， $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'=(1+\sin t)^2$ より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\int_0^x\frac{(1+\sin t)^2}{x}dt&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(1+\sin t)^2dt}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[F(t)\right]_0^x}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\\
&=F'(0)\\
&=1
\end{aligned}
$$

(3)

$\cos^5 t$ の原始関数を $F(t)$ とすると， $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'=\cos^5 t$ より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\frac{\cos^5 t}{x}dt&=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\cos^5 tdt}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\left[F(t)\right]_0^{x^2}}{x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x^2)-F(0)}{x-0}\\
&=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{F(x^2)-F(0)}{x^2-0}\cdot x\right\}\\
&=\lim_{x^2\to 0}\frac{F(x^2)-F(0)}{x^2-0}\lim_{x\to 0}x\\
&=F'(0)\cdot 0\\
&=0
\end{aligned}
$$

435

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}\\&=\int_1^2\sqrt{x}dx\\&=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\\&=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\\&=\int_0^1\sqrt{x}dx\\&=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\&=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}&=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}+\cdots+\sqrt{2n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}\right)}\\&=\frac{\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)}{\frac{2}{3}}\\&=2\sqrt{2}-1\end{aligned}$$

(2)

$$\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+1}+\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n$$
$$=\frac{1}{n}\log(n+1)+\frac{1}{n}\log(n+2)+\cdots+\frac{1}{n}\log 2n-\frac{n}{n}\log n$$
$$=\frac{1}{n}[\{\log(n+1)-\log n\}+\{\log(n+2)-\log n\}+\cdots+(\log 2n-\log n)]$$
$$=\frac{1}{n}\left(\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{2n}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

より，

$$\lim_{n\to\infty}\log\sqrt[n]{n+1}+\log\sqrt[n]{n+1}+\cdots+\log\sqrt[n]{2n}-\log n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$
$$=\int_1^2\log x\,dx$$
$$=[x\log x-x]_1^2$$
$$=2\log 2-1$$

例題 34

シュワルツの不等式の証明

$b>a$ のとき，任意の実数 t に対し

$$\int_a^b\{tf(x)+g(x)\}^2dx=\int_a^b\left[\{tf(x)\}^2+2tf(x)g(x)+\{g(x)\}^2\right]dx$$
$$=\int_a^b\{f(x)\}^2dx\cdot t^2+2\int_a^b f(x)g(x)dx\cdot t+\int_a^b\{g(x)\}^2dx$$
$$\geq 0$$

これと $\int_a^b\{f(x)\}^2dx>0$ から，t についての 2 次方程式

$\int_a^b\{f(x)\}^2dx\cdot t^2+2\int_a^b f(x)g(x)dx\cdot t+\int_a^b\{g(x)\}^2dx=0$ の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2-\int_a^b\{f(x)\}^2dx\int_a^b\{g(x)\}^2dx\leq 0,$$

すなわち $\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2\leq\int_a^b\{f(x)\}^2dx\int_a^b\{g(x)\}^2dx$

等号成立は $f(x)=0$ または $g(x)=0$ または $f(x)=kg(x)$ （k は定数）のとき

436

(1)

シュワルツの不等式より，$\left\{\int_a^b dx\right\}^2=\left\{\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{x^2}dx\right\}^2\leq\int_a^b x^2dx\int_a^b\frac{dx}{x^2}$

すなわち $(b-a)^2\leq\int_a^b x^2dx\int_a^b\frac{dx}{x^2}$

ところが， $x^2\neq0,\ \frac{1}{x^2}\neq0,\ x^2\neq k\cdot\frac{1}{x^2}$ だから，等号は成立しない。

よって， $(b-a)^2<\int_a^b x^2dx\int_a^b\frac{dx}{x^2}$

(2)

シュワルツの不等式より，$\left\{\int_a^b dx\right\}^2=\left\{\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right\}^2\leq\int_a^b\left\{\sqrt{f(x)}\right\}^2dx\int_a^b\left\{\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right\}^2dx$

すなわち $(b-a)^2\leq\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$

等号成立は $\sqrt{f(x)}=k\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ のとき，すなわち $f(x)=k$ （k は正の定数）のとき