

積分法の応用 1 面積

440

(1)

 $(x-e)\log x=0$ の解は $x=1, e$ また, $1 \leq x \leq e$ のとき, $(x-e)\log x \leq 0$

$$\text{よつて, } \int_1^e \{0 - (x-e)\log x\} dx = -\int_1^e (x-e)\log x dx$$

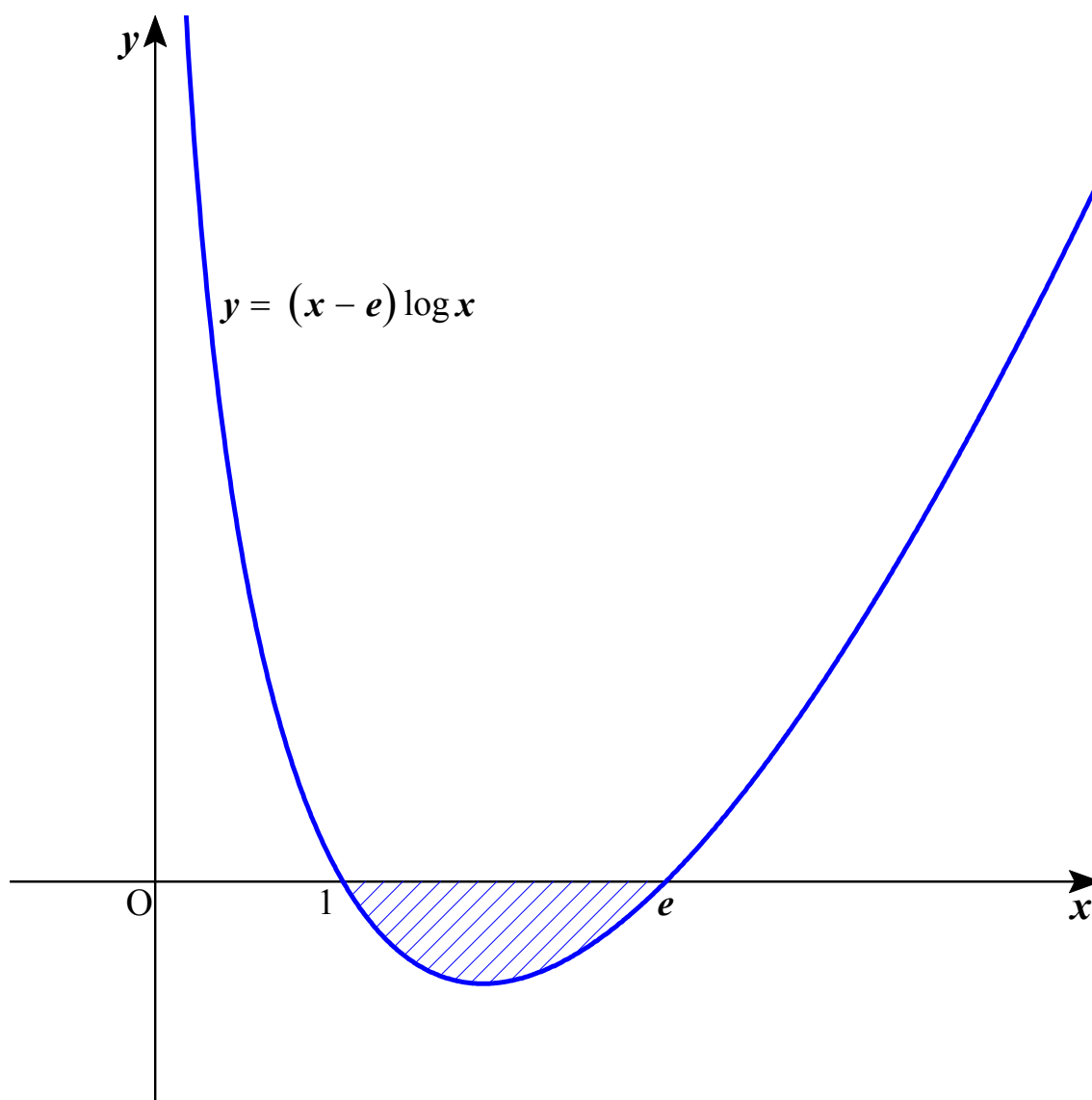
ここで, $\log x = t$ とおくと, $x = e^t$, $dx = e^t dt$, $x = e \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 0$ より,

$$\begin{aligned} \int_1^e \{0 - (x-e)\log x\} dx &= -\int_1^e (x-e)\log x dx \\ &= -\int_0^1 (e^t - e)te^t dt \\ &= -\int_0^1 t(e^{2t} - e^{t+1}) dt \\ &= -\left[t\left(\frac{e^{2t}}{2} - e^{t+1}\right) \right]_0^1 + \int_0^1 \left(\frac{e^{2t}}{2} - e^{t+1}\right) dt \\ &= \frac{e^2}{2} + \left[\frac{e^{2t}}{4} - e^{t+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - e^2 - \frac{1}{4} + e \\ &= -\frac{e^2}{4} + e - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned} \int_1^e \{0 - (x-e)\log x\} dx &= -\int_1^e (x-e)\log x dx \\ &= -\left[\frac{(x-e)^2}{2} \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{(x-e)^2}{2x} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2} \int_1^e \left(x - 2e + \frac{e^2}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} - 2ex + e^2 \log x \right]_1^e \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - 2e^2 + e^2 - \frac{1}{2} + 2e \right) \\ &= -\frac{e^2}{4} + e - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

参考図



(2)

 $y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$ に区間について $f(x) = xe^{1-x}$ とすると, $f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$ より $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	1	$\cdots$	$+\infty$
$f'(x)$	$/$	$+$	0	$-$	$/$
$f(x)$	$-\infty$	$\uparrow$	1	$\downarrow$	0

これと $f(0) = 0$ より, $f(x) = xe^{1-x}$ は 2 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ を通る曲線である。 $y = x^2$ も同じ 2 点を通るから, $y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$ は少なくともこれらの 2 点で交わる。

他の交点については,

 $x \leq 0$ のとき

$y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$ はそれぞれ単調減少, 単調増加し, 点 $(0, 0)$ で交わるから,
 これらの曲線は点 $(0, 0)$ 以外に交点をもたない。

 $x \geq 1$ のとき

$y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$ は点 $(1, 1)$ で交わった後, それぞれ単調増加, 単調減少するから,
 これらの曲線は点 $(1, 1)$ 以外に交点をもたない。

 $0 < x < 1$ のとき $g(x) = x^2 - xe^{1-x}$ とすると,

$$\begin{aligned}
 g''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dg(x)}{dx} \right) \\
 &= \frac{d}{dx} (2x - e^{1-x} + xe^{1-x}) \\
 &= 2 + 2e^{1-x} - xe^{1-x} \\
 &= 2 + e^{1-x}(2 - x)
 \end{aligned}$$

より, $g'' > 0$ よって, $g(x)$ は下に凸であり, これと $g(0) = g(1) = 0$ であることから, $g(x) < 0$ すなわち $x^2 < xe^{1-x}$ 以上より, $y = x^2$ と $y = xe^{1-x}$ は 2 点 $(0, 0)$, $(1, 1)$ で交わり, 区間 $(0, 1)$ で $x^2 < xe^{1-x}$ となる。

ゆえに,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (xe^{1-x} - x^2) dx &= \int_0^1 xe^{1-x} dx - \int_0^1 x^2 dx \\
 &= \left[-xe^{1-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x} dx - \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\
 &= -1 + \left[-e^{1-x} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \\
 &= e - \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

補足

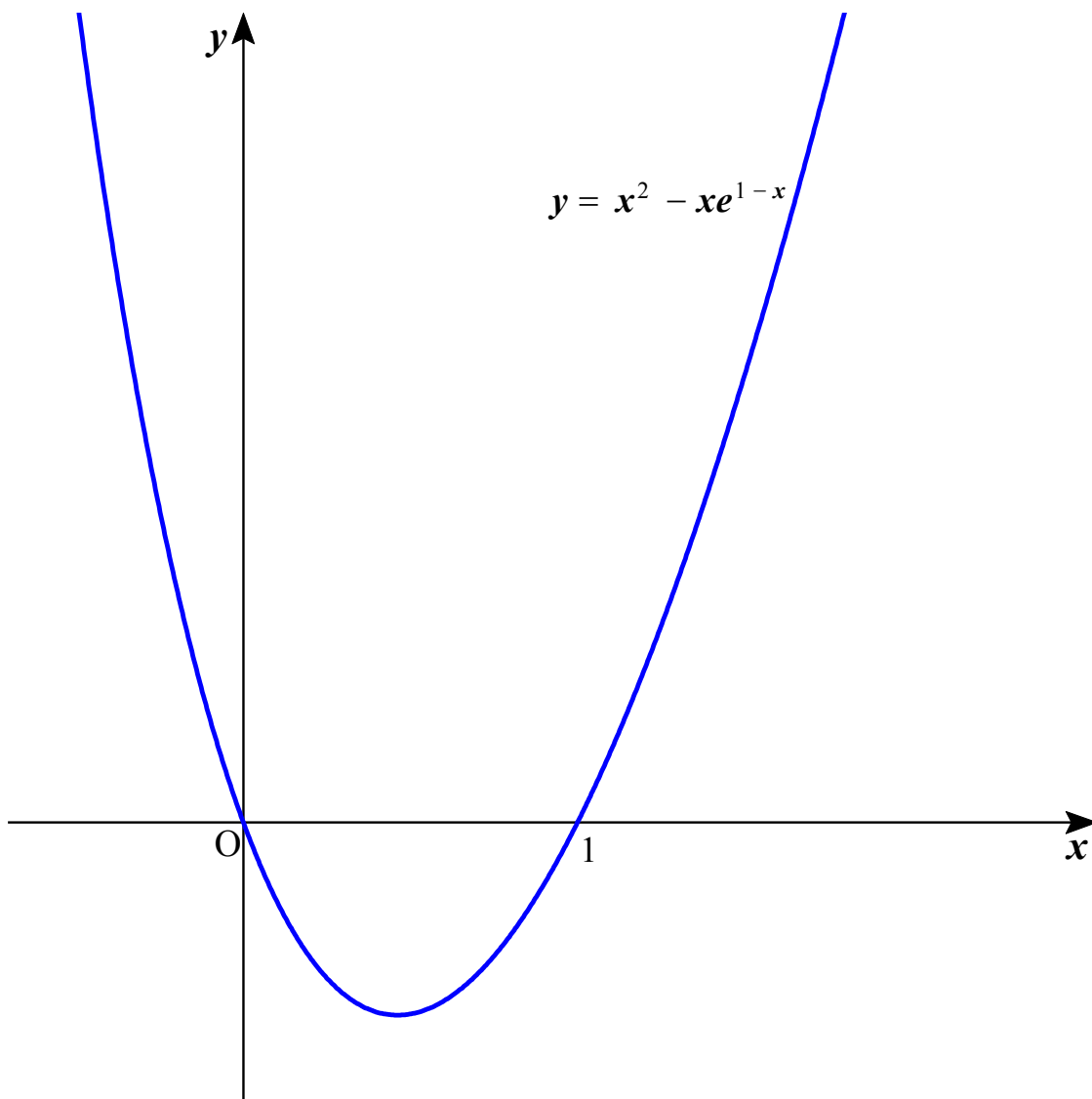
$g(x) = x^2 - xe^{1-x}$ について

$g''(x) = 2 + e^{1-x}(2-x)$ の増減を調べると, $g'''(x) = -e^{1-x}(3-x)$ より,

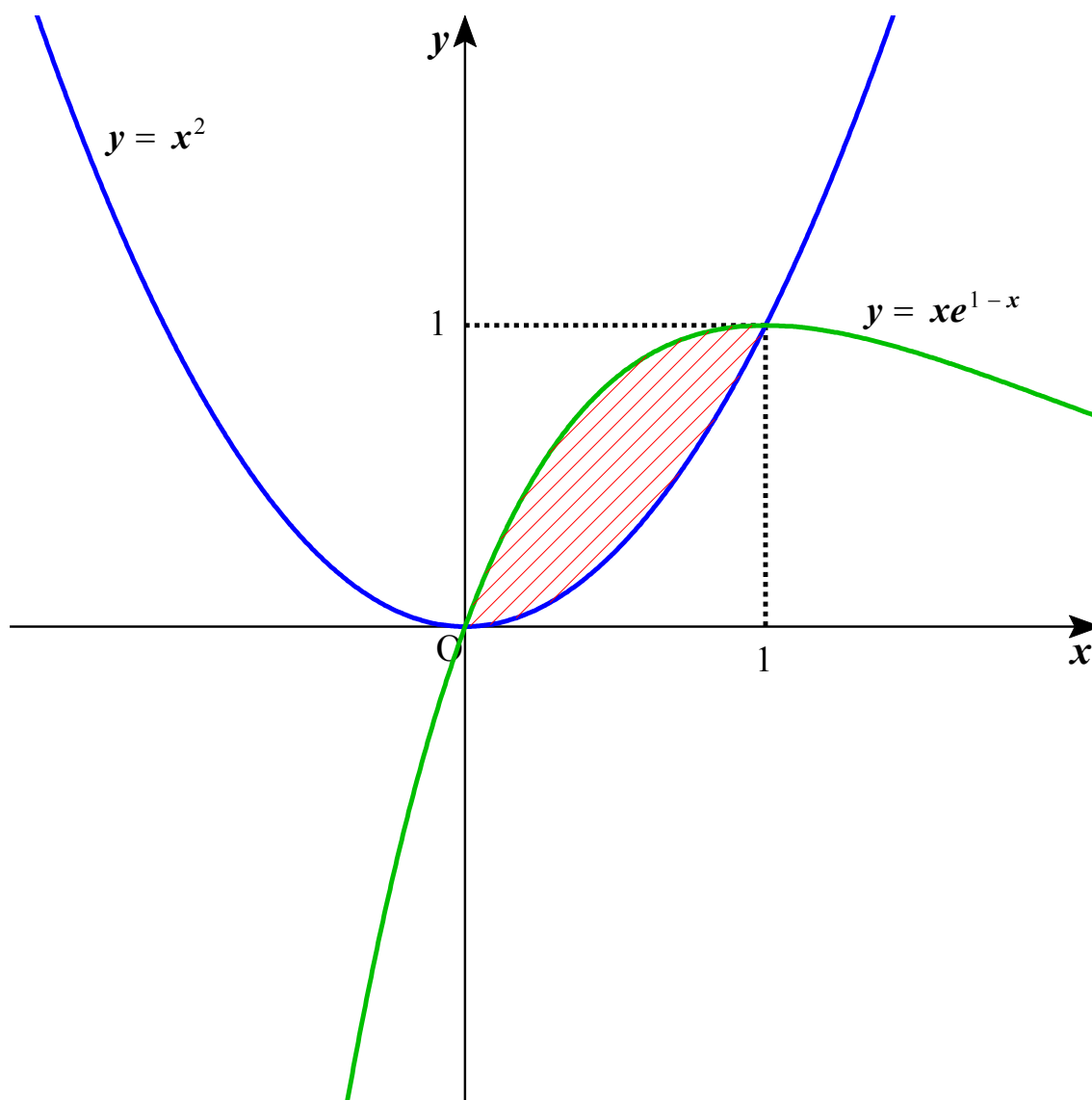
x	...	3	...
$g'''(x)$	-	0	+
$g''(x)$	↓	$2 - \frac{1}{e^2}$	↑

よって, $g''(x) = 2 + e^{1-x}(2-x)$ の最小値は $g''(3) = 2 - \frac{1}{e^2} > 0$

ゆえに, $g''(x) = 2 + e^{1-x}(2-x) > 0$, すなわち $g(x)$ は, 実は, 下に凸な曲線である。



参考図

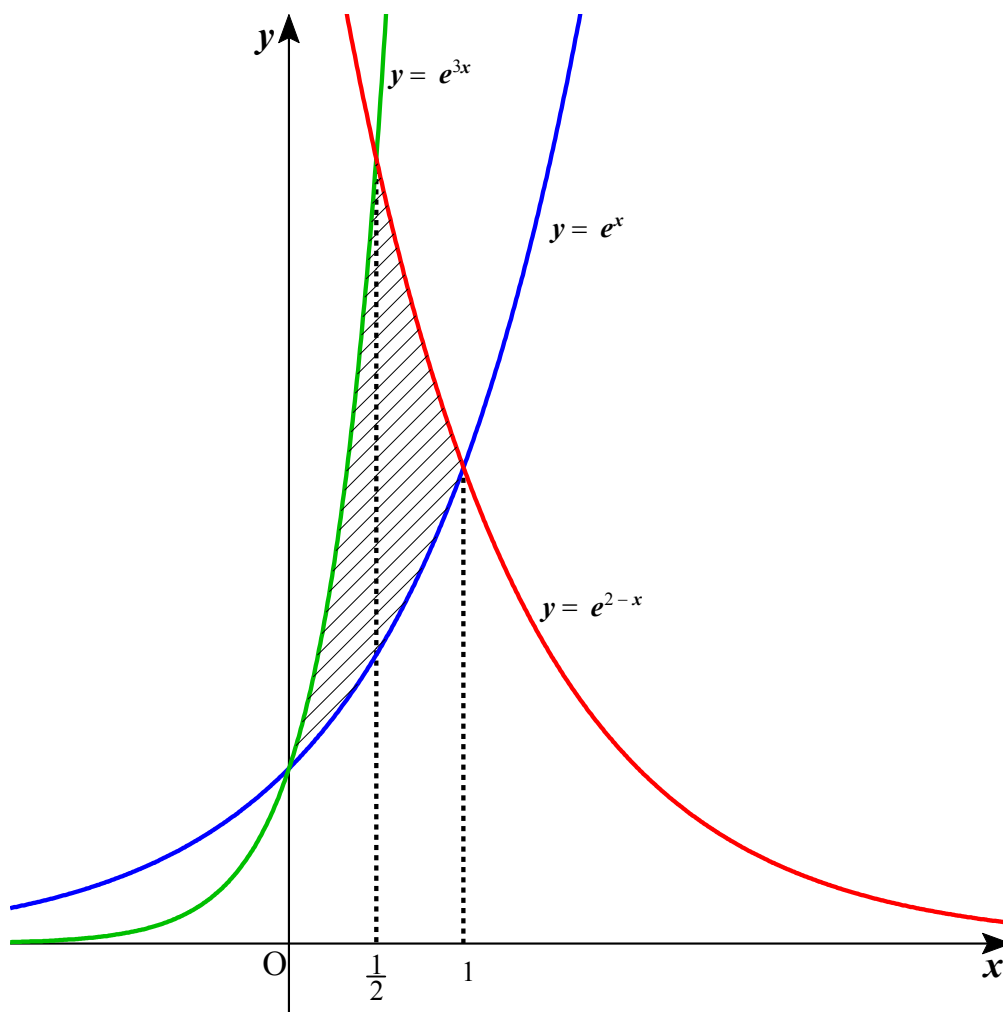


(3)

 $y=e^x$ と $y=e^{3x}$ の交点の x 座標は, $x=3x$ より, 0 $y=e^x$ と $y=e^{2-x}$ の交点の x 座標は, $x=2-x$ より, 1 $y=e^{3x}$ と $y=e^{2-x}$ の交点の x 座標は, $3x=2-x$ より, $\frac{1}{2}$ これと $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき $e^x \leq e^{3x} \leq e^{2-x}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき $e^x \leq e^{2-x} \leq e^{3x}$ より,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{3x} - e^x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (e^{2-x} - e^x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{3x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{2-x} dx - \int_0^1 e^x dx \\
 &= \left[\frac{e^{3x}}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[-e^{2-x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[e^x \right]_0^1 \\
 &= \frac{4}{3} e^{\frac{3}{2}} - 2e + \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

参考図



(4)

交点の x 座標

$$xe^{1-x} = xe^{x-1} \text{ より, } x(e^{1-x} - e^{x-1}) = 0$$

よって, $x=0$ または $1-x=x-1$ すなわち $x=1$ $0 \leq x \leq 1$ における $y = xe^{1-x}$ と $y = xe^{x-1}$ の大小関係

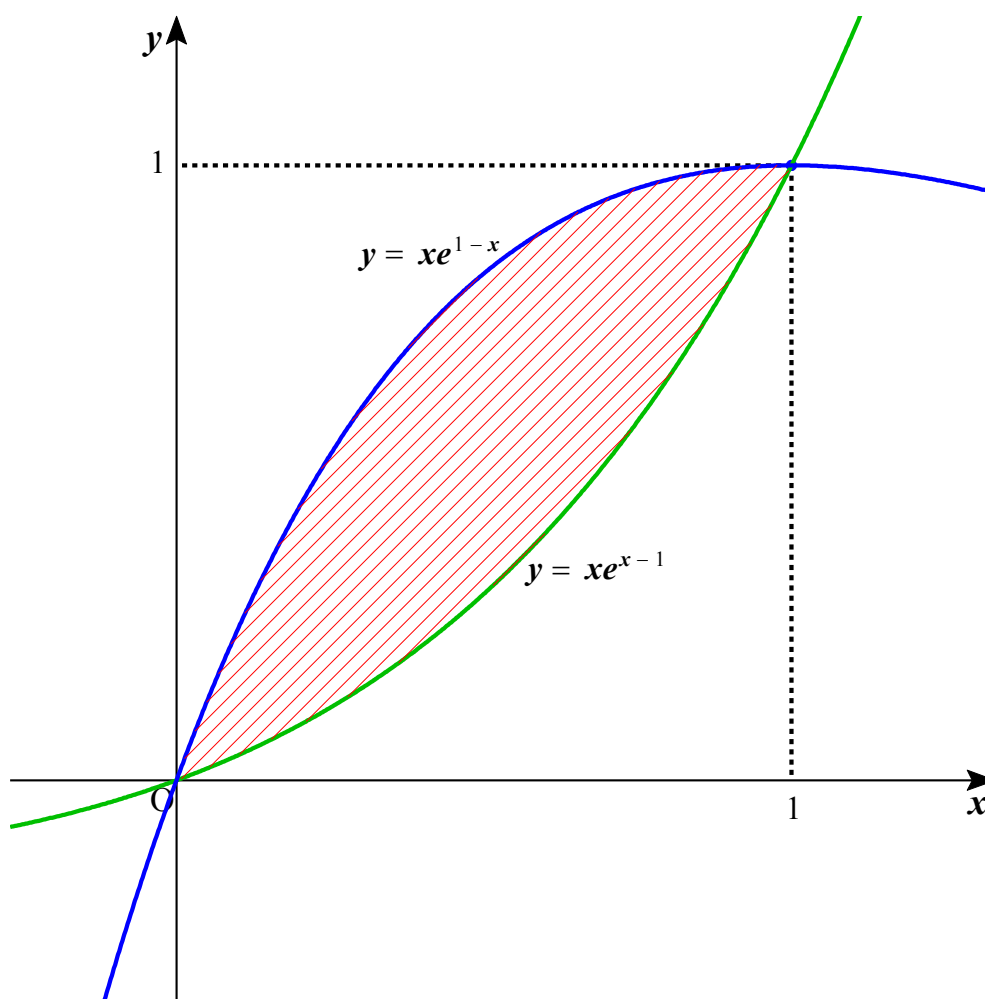
$$1-x \geq x-1 \text{ より, } e^{1-x} \geq e^{x-1}$$

$$\text{よって, } xe^{1-x} \geq xe^{x-1}$$

以上より,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (xe^{1-x} - xe^{x-1}) dx &= \int_0^1 x(e^{1-x} - e^{x-1}) dx \\ &= \left[x(-e^{1-x} - e^{x-1}) \right]_0^1 + \int_0^1 (e^{1-x} + e^{x-1}) dx \\ &= -2 + \left[-e^{1-x} + e^{x-1} \right]_0^1 \\ &= e - \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

参考図



(5)

交点の x 座標

$$x^2 = 2\sqrt{2}y \text{ より, } y = \frac{x^2}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{これを } y^2 = 2\sqrt{2}x \text{ に代入すると, } \frac{x^4}{(2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}x$$

$$\text{よって, } x\{x^3 - (2\sqrt{2})^3\} = 0$$

$$x\{x^3 - (2\sqrt{2})^3\} = x(x - 2\sqrt{2})(x^2 + 2\sqrt{2}x + 8) \text{ だから, 実数解は } x = 0, 2\sqrt{2}$$

ゆえに, 交点の x 座標は $0, 2\sqrt{2}$

$$0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \text{ における } y = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \text{ と } y = (2\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}} \text{ の大小関係}$$

$$y = \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \text{ と } y = (2\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}} \text{ の差をとると,}$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2\sqrt{2}} - (2\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}} &= 2^{-\frac{3}{2}}x^2 - 2^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2^{\frac{9}{4}}x^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } f(x) = x^2 - 2^{\frac{9}{4}}x^{\frac{1}{2}} \text{ とおくと, } f(0) = f(2\sqrt{2}) = 0, \quad f''(x) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{x\sqrt{x}} > 0 \text{ より,}$$

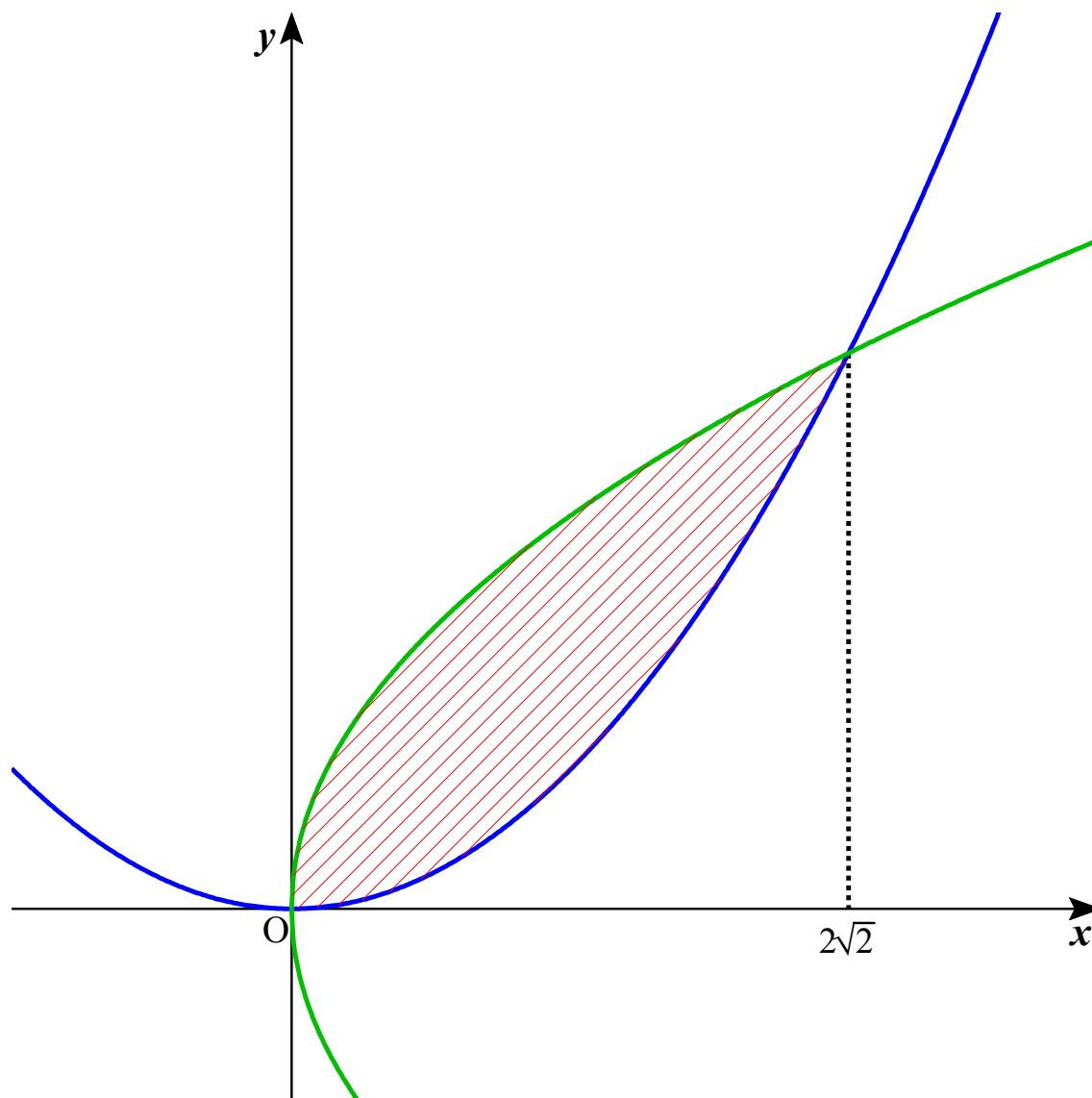
$$0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \text{ において, } f(x) \leq 0$$

$$\text{よって, } 0 \leq x \leq 2\sqrt{2} \text{ のとき, } \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \leq (2\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}}$$

以上より,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\sqrt{2}} \left\{ (2\sqrt{2}x)^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2\sqrt{2}} \right\} dx &= \int_0^{2\sqrt{2}} \left(2^{\frac{3}{4}}x^{\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{3}{2}}x^2 \right) dx \\ &= \left[\frac{2^{\frac{7}{4}}}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{3}x^3 \right]_0^{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{2^{\frac{7}{4}}}{3} \cdot 2^{\frac{9}{4}} - \frac{2^{-\frac{3}{2}}}{3} \cdot 2^{\frac{9}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

参考図



(6)

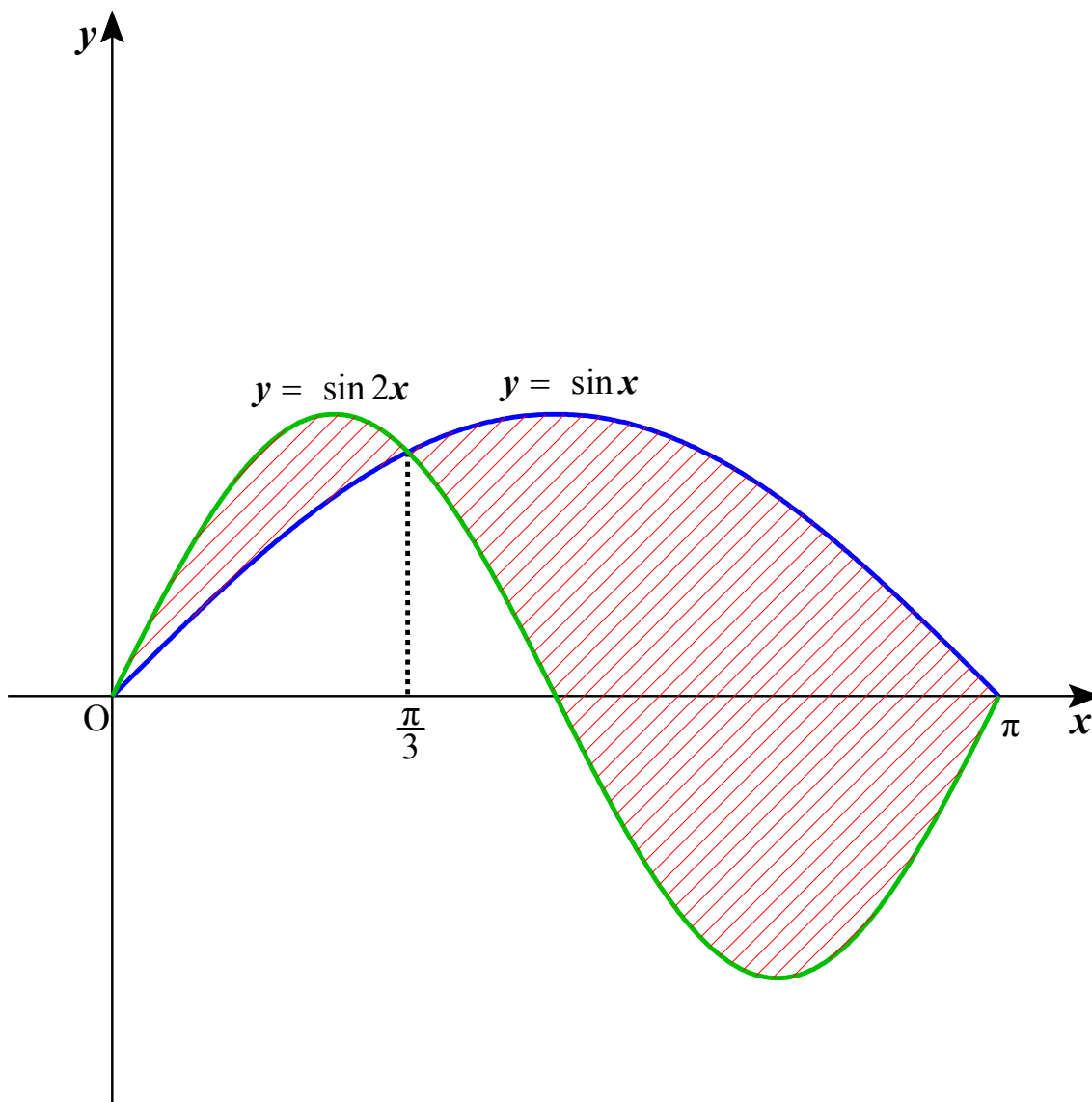
$$\sin x - \sin 2x = \sin x - 2 \sin x \cos x = \sin x(1 - 2 \cos x) \text{ より,}$$

交点の x 座標は $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \sin 2x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ のとき $\sin x \geq \sin 2x$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (\sin x - \sin 2x) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

参考図



441

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の面積は πab だから、これを使って検算すればよい。

(1)

解法 1

$x \geq 0, y \geq 0$ における曲線の方程式は $y = \frac{\sqrt{6}}{3}(3-x^2)^{\frac{1}{2}}$

楕円の面積は、楕円の対称性から、 x 軸と y 軸で 4 等分されるから、

$y = \frac{\sqrt{6}}{3}(3-x^2)^{\frac{1}{2}}$ と x 軸、 y 軸で囲まれた部分の面積は楕円の面積の $\frac{1}{4}$ となる。

よって、 $4 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{3}(3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4\sqrt{6}}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$

ここで、 $y = (3-x^2)^{\frac{1}{2}} (x \geq 0)$ とすると、 $y = (3-x^2)^{\frac{1}{2}} (x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3 (x \geq 0, y \geq 0)$

より、 $\int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx$ は半径 $\sqrt{3}$ の円の面積の $\frac{1}{4}$ 、すなわち $\frac{3}{4}\pi$ と等しい。

ゆえに、

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{6}}{3}(3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{4} \pi \\ &= \sqrt{6}\pi \end{aligned}$$

補足：検算

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で与えられる楕円の面積は πab だから、

$\frac{x^2}{(\sqrt{3})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ で与えられる楕円の面積は $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \pi = \sqrt{6}\pi$ である。

よって、計算結果は正しかった。

解法 2

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点を $(x, y) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると,

$(x, y) = (\sqrt{3} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) と x, y 軸で囲まれた部分は楕円の面積の $\frac{1}{4}$ と等しい。

よって,

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\sqrt{3}} y dx &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{2} \sin \theta \cdot -\sqrt{3} \sin \theta d\theta \\ &= -4\sqrt{6} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d\theta \\ &= 4\sqrt{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 4\sqrt{6} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{6}\pi \end{aligned}$$

(2)

解法 1

$x \geq 0, y \geq 0$ における曲線の方程式は $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

楕円の面積は、楕円の対称性から、 x 軸と y 軸で 4 等分されるから、

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積は楕円の面積の $\frac{1}{4}$ となる。

$$\text{よって, } 4 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx = 2\sqrt{3} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

ここで, $y = \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ($x \geq 0$) とすると,

$$y = \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} (x \geq 0) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{3} (x \geq 0, y \geq 0) \text{ より,}$$

$\int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$ は半径 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ の円の面積の $\frac{1}{4}$, すなわち $\frac{\pi}{12}$ と等しい。

ゆえに,

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx &= 2\sqrt{3} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} \left(\frac{1}{3} - x^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

補足：検算

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ で与えられる楕円の面積は πab だから,

$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$ で与えられる楕円の面積は $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$ である。

よって、計算結果は正しかった。

解法 2

$3x^2 + 4y^2 = 1$ 上の点を $(x, y) = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, \frac{\sin \theta}{2} \right)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると,

$(x, y) = \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, \frac{\sin \theta}{2} \right)$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) と x, y 軸で囲まれた部分は楕円の面積の $\frac{1}{4}$ と等しい。

よって,

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\sqrt{\frac{1}{3}}} y dx &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin \theta}{2} \cdot -\frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} d\theta \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

442

(1)

$$y^2 = x^2(1-x) \Leftrightarrow y = \pm x\sqrt{1-x}$$

したがって、 $y^2 = x^2(1-x)$ で囲まれた図形と $y = x\sqrt{1-x}$ と $y = -x\sqrt{1-x}$ で囲まれた図形は合同であり、 $y = x\sqrt{1-x}$ と $y = -x\sqrt{1-x}$ は x 軸に関して対称だから、 $y^2 = x^2(1-x)$ で囲まれた図形の面積は $y = x\sqrt{1-x}$ と x 軸で囲まれた図形の面積の2倍である。

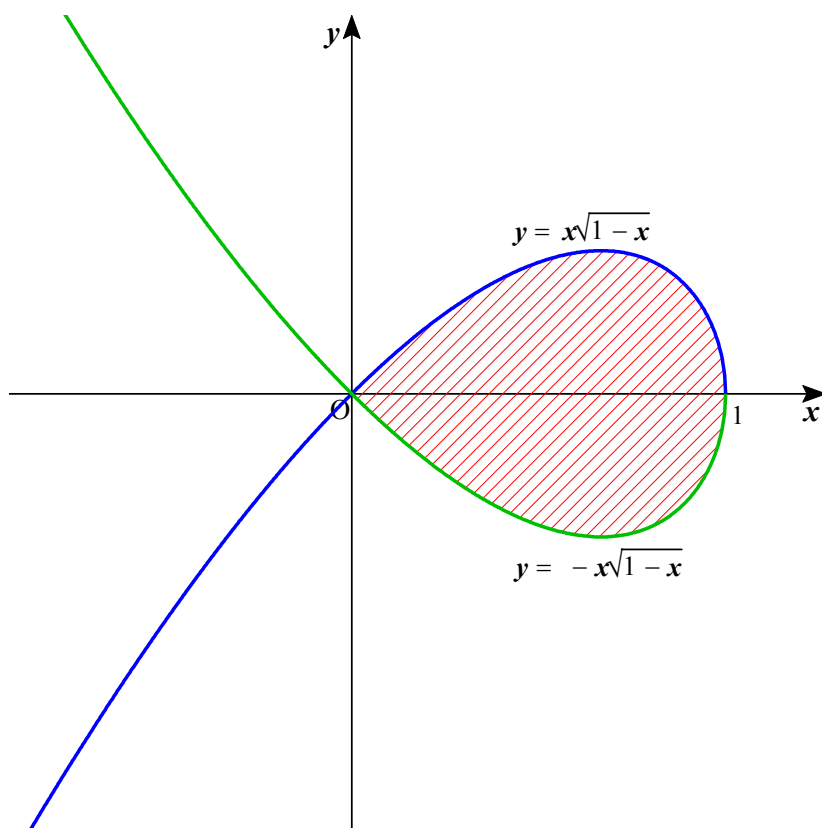
$y = x\sqrt{1-x}$ と x 軸との交点の x 座標は $x=0, 1$ であり、区間 $[0, 1]$ において $y \geq 0$ だから、

$$\text{求める面積は } 2 \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$$

ここで、 $1-x=t$ とおくと、 $dx = -dt$ 、 $x=1 \Rightarrow t=0$ 、 $x=0 \Rightarrow t=1$ より、

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx &= -2 \int_1^0 (1-t)\sqrt{t} dt \\ &= 2 \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} \right) dt \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

参考図



(2)

$$x|x-3|=|y+1|\geq 0 \text{ より, } x\geq 0$$

$$\text{このとき, } y+1=\pm x(x-3), \text{ すなわち } y=-1\pm x(x-3)$$

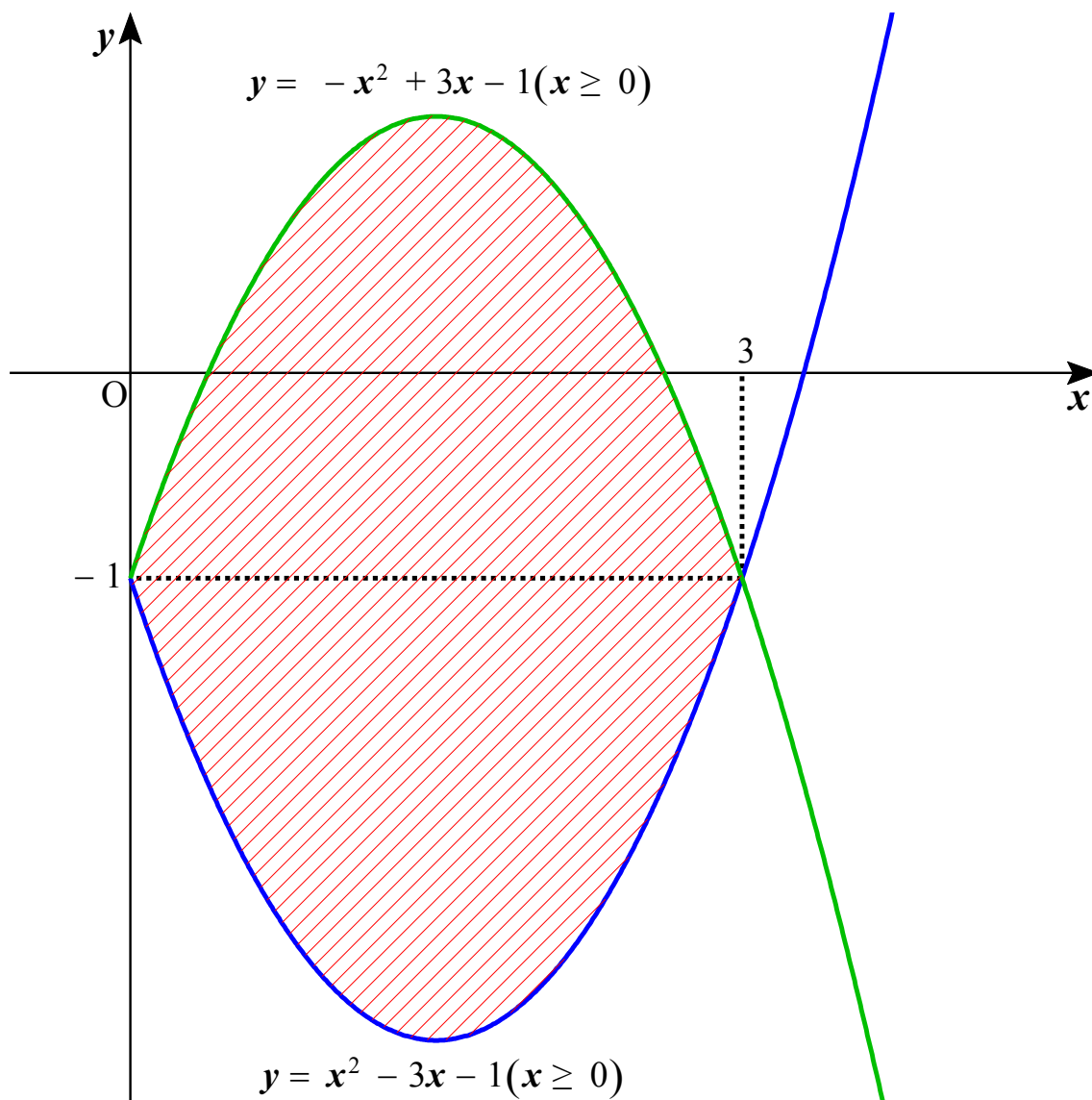
したがって, $y=x^2-3x-1$ と $y=-x^2+3x-1$ で囲まれた図形の面積を求めればよい。

これら 2 曲線の交点の x 座標は $x^2-3x-1=-x^2+3x-1$ より, $x=0, 3$

よって, グラフは次図のようになる。

ゆえに,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \{(-x^2+3x-1) - (x^2-3x-1)\} dx &= 2 \int_0^3 (-x^2+3x) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$



補足： $|y+1|=x|x-3|$ のグラフの別の描き方

手順 1. $y=-1$ と $x=3$ を描く

手順 2. $y \geq -1, x \geq 3$ または $y \leq -1, x \leq 3$ の領域

$$(|x-3|, |y+1|) = (\pm(x-3), \pm(y+1)) \quad (\text{複合同順}) \text{ より,}$$

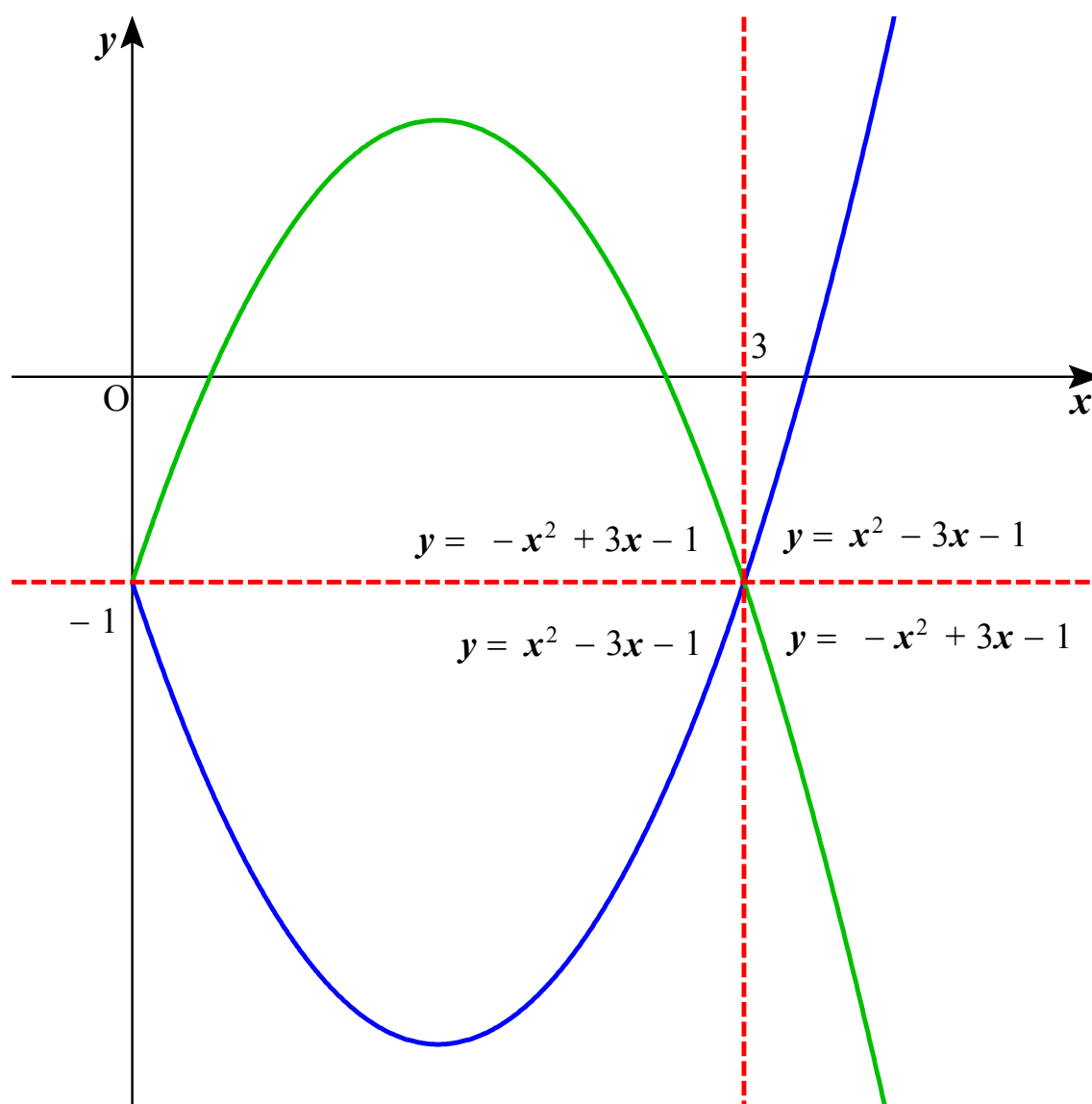
$$y+1 = x(x-1) \text{ すなわち } y = x^2 - 3x - 1$$

$y \leq -1, x \geq 3$ または $y \leq -1, x \leq 3$ の領域

$$(|x-3|, |y+1|) = (\pm(x-3), \mp(y+1)) \quad (\text{複合同順}) \text{ より,}$$

$$y+1 = -x(x-1) \text{ すなわち } y = -x^2 + 3x - 1$$

すると、 $x < 0$ の領域には曲線が存在しないことがわかる。



443

(1)

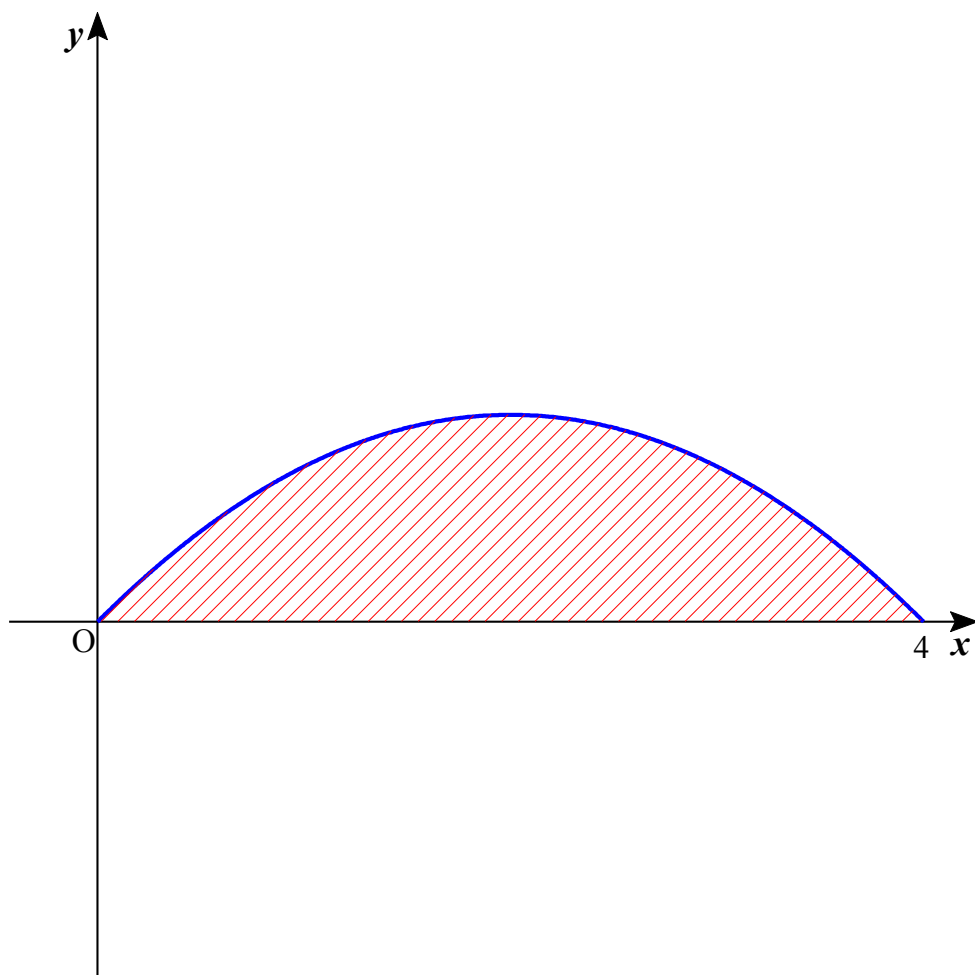
$$y = t(2 - t) \quad (0 \leq t \leq 2) \text{ より, } y \geq 0,$$

$$x = 2t \text{ より, } 0 \leq x \leq 4, \quad x = 0 \Leftrightarrow t = 0, \quad x = 4 \Leftrightarrow t = 2, \quad dx = 2dt$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^4 y dx &= \int_0^2 (2t - t^2) \cdot 2dt \\ &= 2 \left[t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

参考図



補足

$t = \frac{x}{2}$ を $y = 2t - t^2$ に代入し t を消去した式 $y = x - \frac{x^2}{4}$ ($0 \leq x \leq 4$) から解いてもよい。

(2)

解法 1

 $y = 2 \sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より, $y \geq 0$ $x = \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) より, $-1 \leq x \leq 1$, $\theta = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $\theta = \pi \Leftrightarrow x = -1$, $dx = -\sin \theta d\theta$

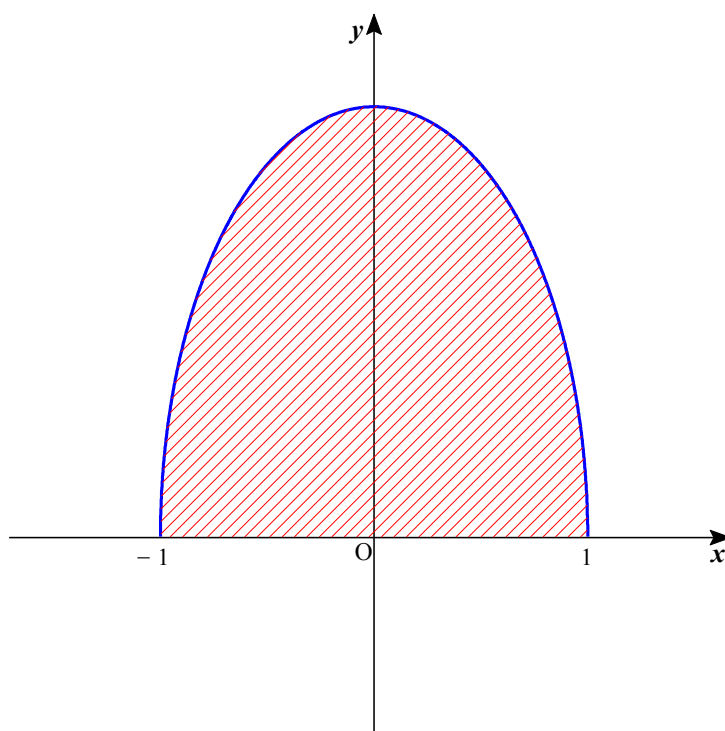
よって,

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 y dx &= \int_{\pi}^0 2 \sin \theta \cdot (-\sin \theta) d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= \left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

解法 2

 $\cos \theta = x$, $\sin \theta = \frac{y}{2}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ に代入すると, $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ ($y \geq 0$)よって, $\int_{-1}^1 y dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ ここで, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の円の面積の $\frac{1}{2}$ と等しいから, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ ゆえに, $\int_{-1}^1 y dx = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \pi$

参考図



444

解法 1 : 例題の解法

$y^2 + 2xy + 5x^2 - 16 = 0$ を y について解くと, $y = -x \pm 2\sqrt{4-x^2}$

ただし, $4-x^2 \geq 0$ より, $-2 \leq x \leq 2$

ここで, $f(x) = -x + 2\sqrt{4-x^2}$, $g(x) = -x - 2\sqrt{4-x^2}$ とすると,

$f(x) = g(x)$ の解は $x = -2, 2$ および $f(x) \geq g(x)$ より,

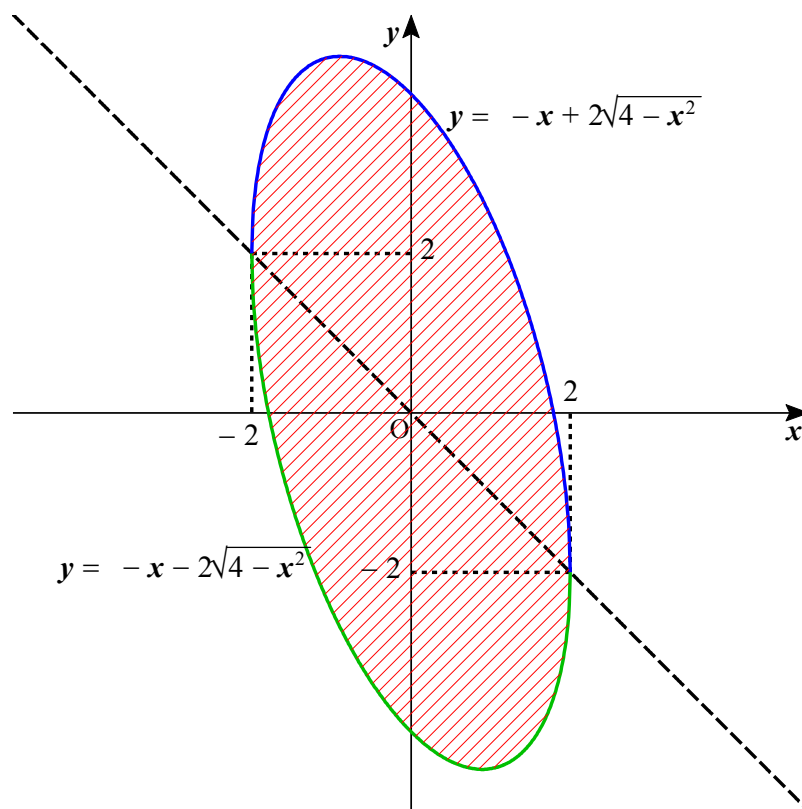
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \end{aligned}$$

$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$ は半径 2 の円の面積の $\frac{1}{2}$ と等しいから, $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2\pi$

よって,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \\ &= 4 \cdot 2\pi \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

参考図



解法2: 曲線を回転移動し, xy の項を消去してから解く

計算が大変だけどやってみる価値あり

回転移動の原理

原点を O とする xy 直交座標平面上の任意の点を $P(x, y)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

OP と x 軸正方向とのなす角を, 反時計回りを正とし, α とすると,

$$(x, y) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$$

したがって, 点 P を O のまわりに θ 回転移動した点を点 $Q(X, Y)$ とすると,

$$\begin{aligned} (X, Y) &= (r \cos(\alpha + \theta), r \sin(\alpha + \theta)) \\ &= (r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta, r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta) \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \end{aligned}$$

点 P は点 Q を O のまわりに $-\theta$ 回転移動した点だから,

$$(x, y) = (X \cos \theta + Y \sin \theta, -X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

補足

$$\begin{cases} x \cos \theta - y \sin \theta = X \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = Y \end{cases} \text{ を解いて } \begin{cases} x = X \cos \theta + Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases} \text{ としてもよいが面倒。}$$

解

曲線 $5x^2 + 2xy + y^2 = 16$ 上の点 (x, y) を原点の回りに θ だけ回転移動した点を

(X, Y) とすると, $(X, Y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$ より,

$$(x, y) = (X \cos \theta + Y \sin \theta, -X \sin \theta + Y \cos \theta)$$

したがって, $5x^2 + 2xy + y^2 = 16$ を原点の回りに θ だけ回転移動した曲線の方程式は,

$5x^2 + 2xy + y^2 = 16$ に $(x, y) = (X \cos \theta + Y \sin \theta, -X \sin \theta + Y \cos \theta)$ を代入することにより,

$$5(X \cos \theta + Y \sin \theta)^2 + 2(X \cos \theta + Y \sin \theta)(-X \sin \theta + Y \cos \theta) + (-X \sin \theta + Y \cos \theta)^2 = 16$$

$\Downarrow$

$$(5 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta)X^2 + 2(4 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)XY + (5 \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)Y^2 = 16$$

$\Downarrow$

$$(4 \cos^2 \theta - \sin 2\theta + 1)X^2 + 2(2 \sin 2\theta + \cos 2\theta)XY + (-4 \cos^2 \theta + \sin 2\theta + 5)Y^2 = 16$$

$\Downarrow$

$$(-\sin 2\theta + 2 \cos 2\theta + 3)X^2 + 2(2 \sin 2\theta + \cos 2\theta)XY + (\sin 2\theta - 2 \cos 2\theta + 3)Y^2 = 16$$

X, Y を x, y で表すことにより,

$$(-\sin 2\theta + 2 \cos 2\theta + 3)x^2 + 2(2 \sin 2\theta + \cos 2\theta)xy + (\sin 2\theta - 2 \cos 2\theta + 3)y^2 = 16$$

$2 \sin 2\theta + \cos 2\theta = 0$ のとき,

$$(-5 \sin 2\theta + 3)x^2 + (5 \sin 2\theta + 3)y^2 = 16 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } \cos 2\theta \neq 0 \text{ だから, } \tan 2\theta = -\frac{1}{2} \text{ より, } \sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, (3 \mp \sqrt{5})x^2 + (3 \pm \sqrt{5})y^2 = 16$$

$$\text{よって}, \frac{x^2}{\frac{16}{3 \mp \sqrt{5}}} + \frac{y^2}{\frac{16}{3 \pm \sqrt{5}}} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{16}{3 \mp \sqrt{5}} &= 4(3 \pm \sqrt{5}) \\ &= 2(6 \pm \sqrt{5}) \\ &= 2(\sqrt{5} \pm 1)^2 \\ &= (\sqrt{10} \pm \sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\frac{x^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} = 1 \text{ または } \frac{x^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} = 1 \text{ の面積を求めればよい。}$$

$$\text{そこで}, \frac{x^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} = 1 \text{ の面積を求めることにする。}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} = 1 \text{ 上の点を } (x, y) \text{ とすると,}$$

媒介変数 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を用いて $(x, y) = ((\sqrt{10} + \sqrt{2})\cos\theta, (\sqrt{10} - \sqrt{2})\sin\theta)$ と表せるから,

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\sqrt{10} + \sqrt{2}} y dx \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\sqrt{10} - \sqrt{2}) \sin\theta \cdot (-\sqrt{10} - \sqrt{2}) \sin\theta d\theta \\ &= 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 32 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 8\pi \end{aligned}$$

補足：検算

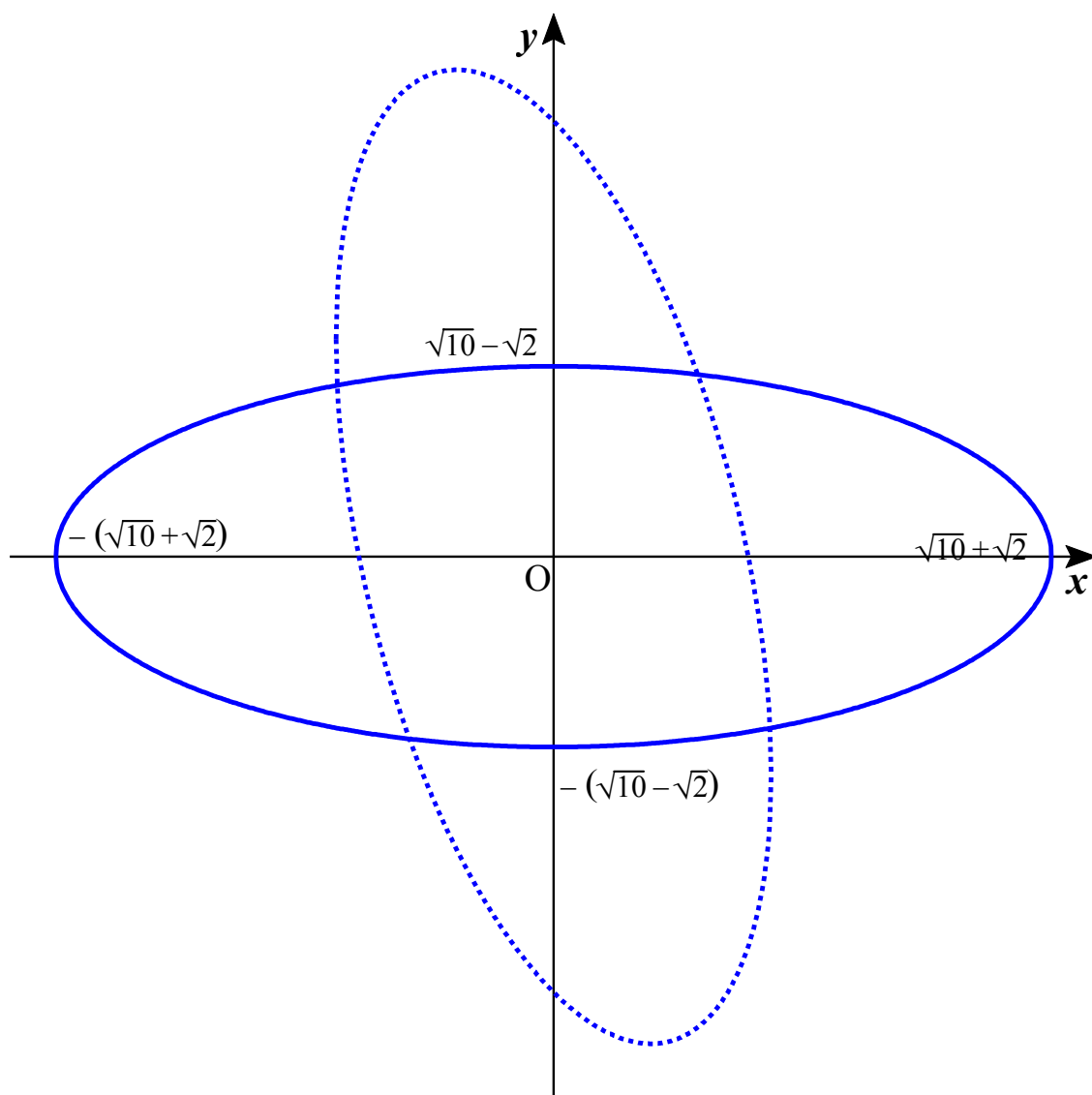
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ で与えられる楕円の面積は } \pi ab \text{ だから,}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} = 1 \text{ または } \frac{x^2}{(\sqrt{10} - \sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{10} + \sqrt{2})^2} = 1 \text{ の面積は,}$$

$$\pi(\sqrt{10} + \sqrt{2})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8\pi \text{ である。}$$

よって, 計算結果は正しかった。

参考図



445

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ の x の値の取り得る範囲

$$2 - \sqrt{x} = \sqrt{y} \geq 0 \text{ より, } \sqrt{x} \leq 2 \quad \therefore 0 \leq x \leq 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$y = x^2$ と $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ の交点の x 座標

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2} = 2 \text{ より, } \sqrt{x} + |x| = 2$$

$$\text{これと}\textcircled{1}\text{より, } \sqrt{x} + x = 2$$

$$\sqrt{x} = -x + 2 \text{ とし, 両辺を2乗し, 整理すると } (x-1)(x-5) = 0$$

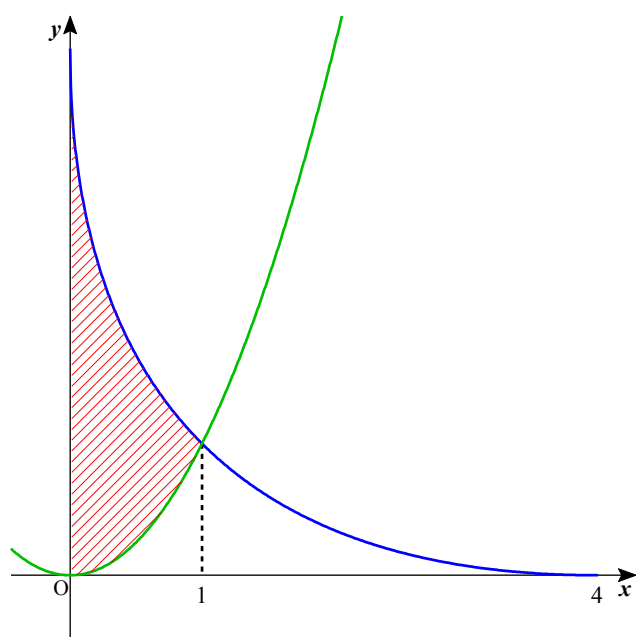
$$\text{よって, } \textcircled{1} \text{より, } x = 1$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow y = (2 - \sqrt{x})^2 \quad (0 \leq x \leq 4) \text{ および } 0 \leq x \leq 1 \text{ において } (2 - \sqrt{x})^2 \geq x^2 \text{ より,}$$

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ (2 - \sqrt{x})^2 - x^2 \right\} dx &= \int_0^1 (-x^2 + x - 4\sqrt{x} + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

参考図



446

(1)

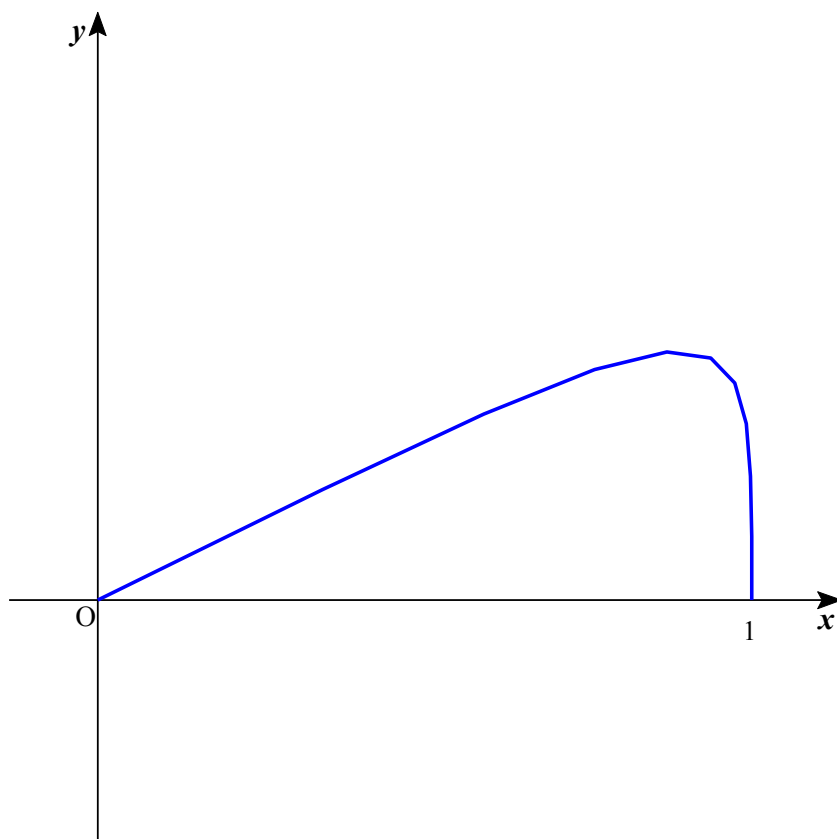
$$y = t(1 - t^2) \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ より, } y \geq 0$$

$$x = 1 - t^4 \quad (0 \leq t \leq 1) \text{ より, } 0 \leq x \leq 1, \quad t = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad t = 1 \Leftrightarrow x = 0, \quad dx = -4t^3 dt$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= \int_1^0 (t - t^3) \cdot (-4t^3) dt \\ &= 4 \int_0^1 (t^4 - t^6) dt \\ &= 4 \left[\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{35} \end{aligned}$$

参考図



(2)

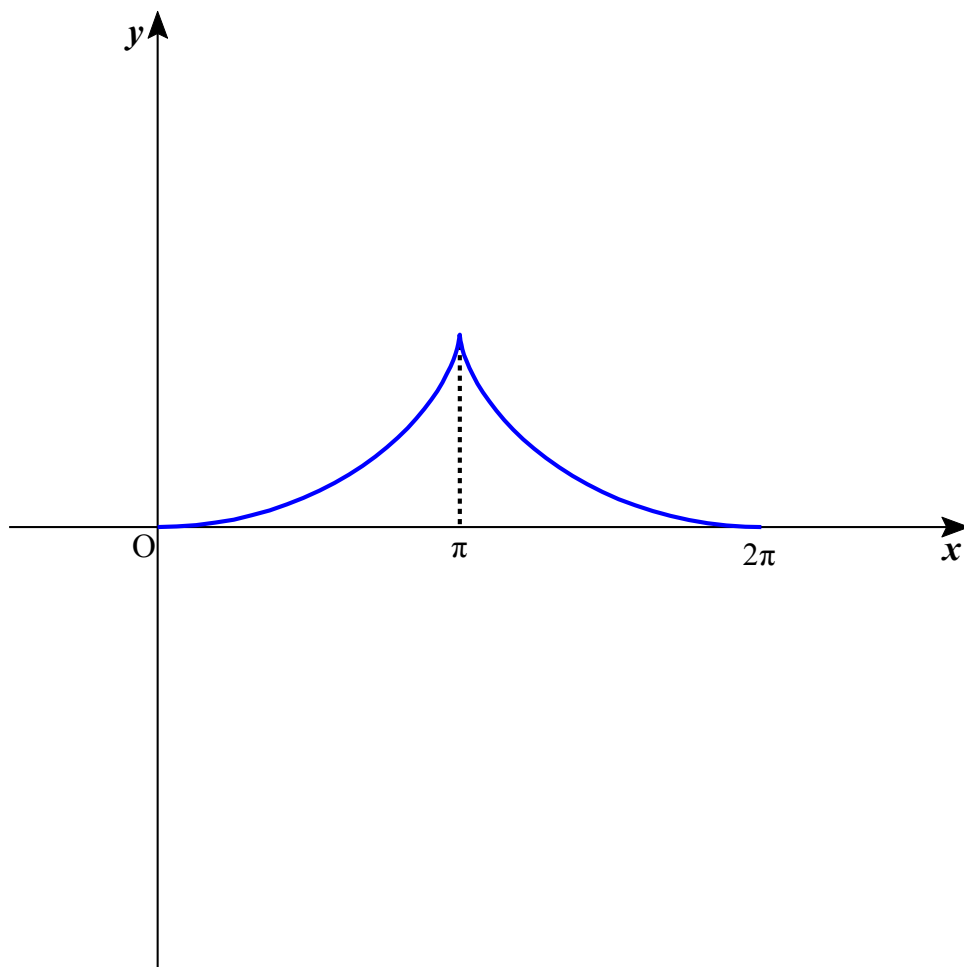
$$y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad \text{より, } y \geq 0$$

$$x = t + \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \quad \frac{dx}{dt} = 1 + \cos t > 0 \quad \text{より,}$$

x は単調増加するから, $0 \leq x \leq 2\pi$, $t = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $t = 2\pi \Leftrightarrow x = 2\pi$, $dx = (1 + \cos t)dt$
よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y dx &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)(1 + \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ &= \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

参考図



447

解法 1

曲線 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ の周期は 2π だから, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の場合で考える。

$x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上の点を $(a, b) = (\cos^3 \alpha, \sin^3 \alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$) とすると,

$(-a, b) = (\cos^3(\pi - \alpha), \sin^3(\pi - \alpha))$, $(-a, -b) = (\cos^3(\pi + \alpha), \sin^3(\pi + \alpha))$,

$(a, -b) = (\cos^3(2\pi - \alpha), \sin^3(2\pi - \alpha))$ より,

$(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$ も $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上の点である。

したがって, 曲線 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。

よって, 曲線の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分と x , y 軸に囲まれた部分の面積を 4 倍すればよい。

曲線の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分と x , y 軸に囲まれた部分の面積について

$$x \geq 0 \text{ かつ } y \geq 0 \text{ より, } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ だから, } 0 \leq x \leq 1, \quad x = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad x = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$$

これと $dx = -3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$ より,

よって, 曲線の $x \geq 0$, $y \geq 0$ の部分と x , y 軸に囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 \theta (-3 \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2 2\theta}{4} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \frac{1 + \cos 4\theta}{2}}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\theta}{8} \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \cos 4\theta \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{3}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ 1 - \cos 2\theta - \cos 4\theta + \frac{1}{2} (\cos 6\theta + \cos 2\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{3}{16} \left[\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta + \frac{1}{12} \sin 6\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{3}{32} \pi \end{aligned}$$

ゆえに, 求める面積は $4 \cdot \frac{3}{32} \pi = \frac{3}{8} \pi$

解法 2

曲線 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ の周期は 2π だから, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の場合で考える。

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta = x^{\frac{2}{3}}, \quad \sin^2 \theta = y^{\frac{2}{3}} \text{ より, } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ 上の点を (a, b) とすると, $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ も $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ を満たすから,

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ は x 軸, y 軸, 原点に関して対称である。よって, 求める面積は $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ の

$x \geq 0, y \geq 0$ の部分と x, y 軸に囲まれた部分の面積の 4 倍と等しい。

$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分と x, y 軸に囲まれた部分の面積

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \text{ の } x \geq 0, y \geq 0 \text{ の部分の定義域は } 0 \leq x \leq 1 \text{ だから, 面積は } \int_0^1 y dx$$

これと x は単調減少し, $x = 1 \Leftrightarrow \theta = 0, x = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, dx = -3 \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$ より,

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 \theta (-3 \sin \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{3}{32} \pi \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 4 \cdot \frac{3}{32} \pi = \frac{3}{8} \pi$$

補足

曲線 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ のグラフの描き方 1

曲線 $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ のグラフは x 軸, y 軸, 原点に関して対称だから,

$x \geq 0, y \geq 0$ の部分, すなわち $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における増減について調べる。

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \sin \theta \cos^2 \theta, \frac{dy}{d\theta} = 3 \cos \theta \sin^2 \theta \text{ より,}$$

θ と x, y の値および移動方向の関係は次のようになる。

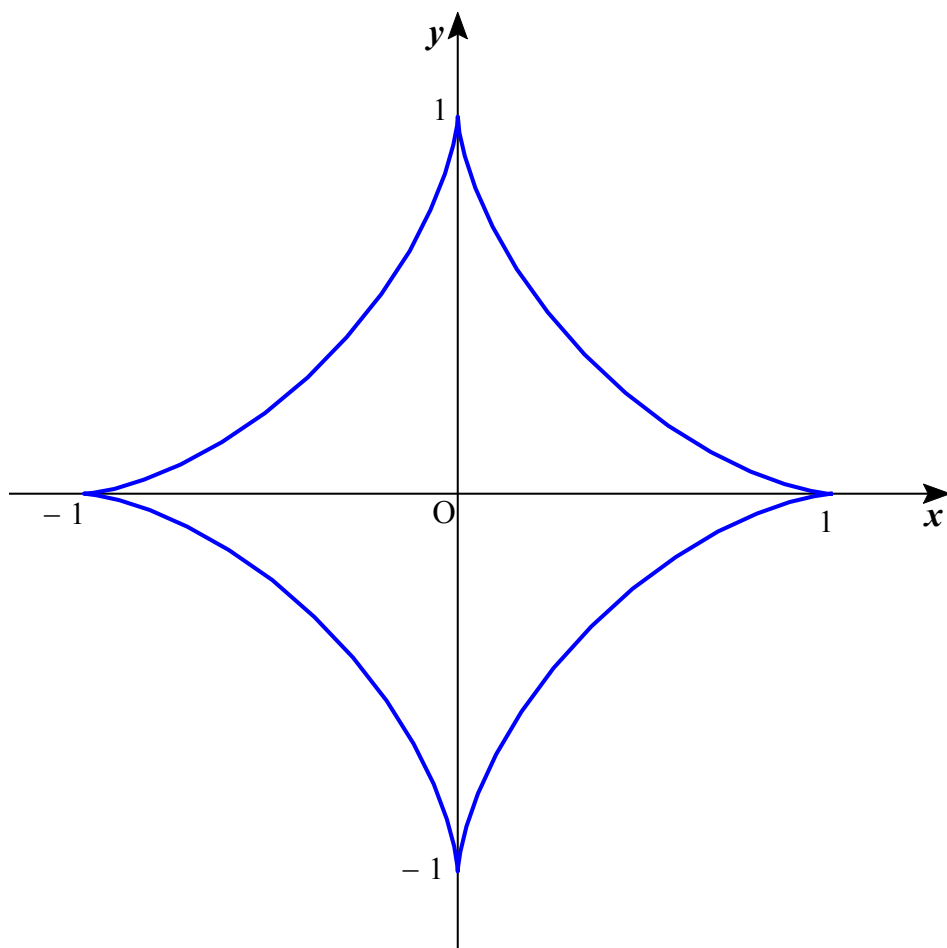
θ	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{d\theta}$	/	-	/
$\frac{dy}{d\theta}$	/	+	/
(x, y)	(1, 0)	($\leftarrow, \uparrow$) 左上	(0, 1)

また, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3 \cos \theta \sin^2 \theta}{-3 \sin \theta \cos^2 \theta} = -\tan \theta$ より, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (-\tan \theta) = \frac{d(-\tan \theta)}{d\theta} \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{1}{3 \sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{3 \sin \theta \cos^4 \theta} > 0$$

よって, 曲線は下に凸となる。

これと曲線 $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$ は x 軸, y 軸, 原点に関して対称であることから, 下図のようになる。



$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ をグラフにしてもよい。

448

(1)

 $y' = \cos x$ より, 接線の方程式は $y = \cos \alpha(x - \alpha) + \sin \alpha$ これが原点 O を通るから, $0 = \cos \alpha(0 - \alpha) + \sin \alpha \quad \therefore \alpha \cos \alpha = \sin \alpha$ $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ より, $\cos \alpha \neq 0$ だから, $\alpha = \tan \alpha$

(2)

(1)より, 接線 OT の方程式は $y = x \cos \alpha$ $f(x) = \sin x - x \cos \alpha \quad (0 \leq x \leq \alpha)$ とすると, $f'(x) = \cos x - \cos \alpha$ $\cos x - \cos \alpha = 0$ の大きい方の解は α , 小さい方の解を β とすると, $f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	β	...	α
$f'(x)$	/	+	0	-	/
$f(x)$	0	↑	$f(\beta)$	↓	$f(\alpha)$

これと $f(\alpha) = 0$ より, $f(x) \geq 0$

よって,

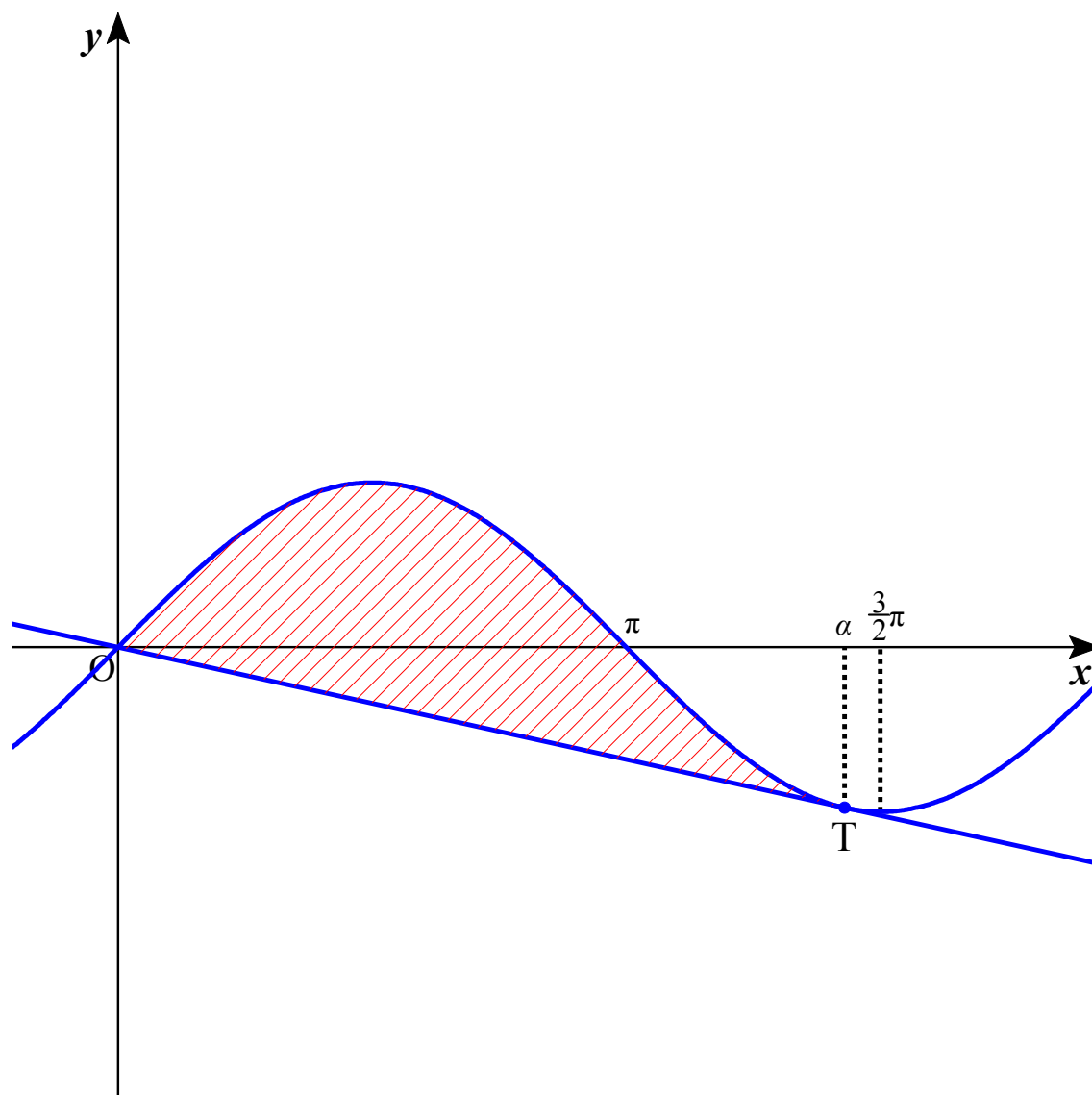
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\alpha} (\sin x - x \cos \alpha) dx \\
 &= \left[-\cos x - \frac{\cos \alpha}{2} x^2 \right]_0^{\alpha} \\
 &= -\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{2} \cdot \alpha^2 + 1 \\
 &= -\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{2} \cdot \tan^2 \alpha + 1 \\
 &= -\cos \alpha - \frac{\cos \alpha}{2} \left(-1 + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) + 1 \\
 &= -\frac{\cos \alpha}{2} - \frac{1}{2 \cos \alpha} + 1 \\
 &= \frac{-\cos^2 \alpha - 1 + 2 \cos \alpha}{2 \cos \alpha} \\
 &= -\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{2 \cos \alpha}
 \end{aligned}$$

補足

$$\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi, \quad \cos \alpha = \cos \beta, \quad \beta < \alpha \text{ より, } \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \quad \therefore \beta = 2\pi - \alpha$$

$$\text{ゆえに, } f(\beta) = \sin(2\pi - \alpha) - (2\pi - \alpha) \cos \alpha = -\sin \alpha - 2\pi \cos \alpha + \alpha \cos \alpha = -2\pi \cos \alpha$$

参考図



449

解法 1

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \cos^2 \theta = \sqrt{x}, \quad \sin^2 \theta = \sqrt{y} \text{ より, } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

$$\text{よって, } y = x - 2\sqrt{x} + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$0 \leq x \leq 1 \text{ において } y \geq 0 \text{ より,}$$

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ と } x \text{ 軸, } y \text{ 軸で囲まれた部分の面積を } S \text{ とすると,}$$

$$S = \int_0^1 (x - 2\sqrt{x} + 1) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^1 = \frac{1}{6} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1 \quad (0 \leq x \leq 1) \text{ 上の点 } (t, t - 2\sqrt{t} + 1) \quad (0 < t < 1) \text{ を接点とする接線の方程式は}$$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ より, } y = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(x - t) + t - 2\sqrt{t} + 1, \text{ すなわち } y = \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x - \sqrt{t}) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{したがって, 接線と } x \text{ 軸, } y \text{ 軸との交点はそれぞれ } (\sqrt{t}, 0), (0, 1 - \sqrt{t})$$

$$\text{よって, 接線と } x \text{ 軸, } y \text{ 軸で囲まれた部分の面積を } T \text{ とすると,}$$

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{t} (1 - \sqrt{t}) \quad \dots \textcircled{3}$$

$$y = x - 2\sqrt{x} + 1 \text{ のグラフは } 0 < x < 1 \text{ において, } y'' = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} > 0 \text{ より, 下に凸だから,}$$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 \geq \frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}}(x - \sqrt{t})$$

$$\text{したがって, } S > T$$

$$\text{よって, } y = x - 2\sqrt{x} + 1 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad y = x - 2\sqrt{x} + 1, \quad x \text{ 軸, } y \text{ 軸で囲まれた部分の面積は}$$

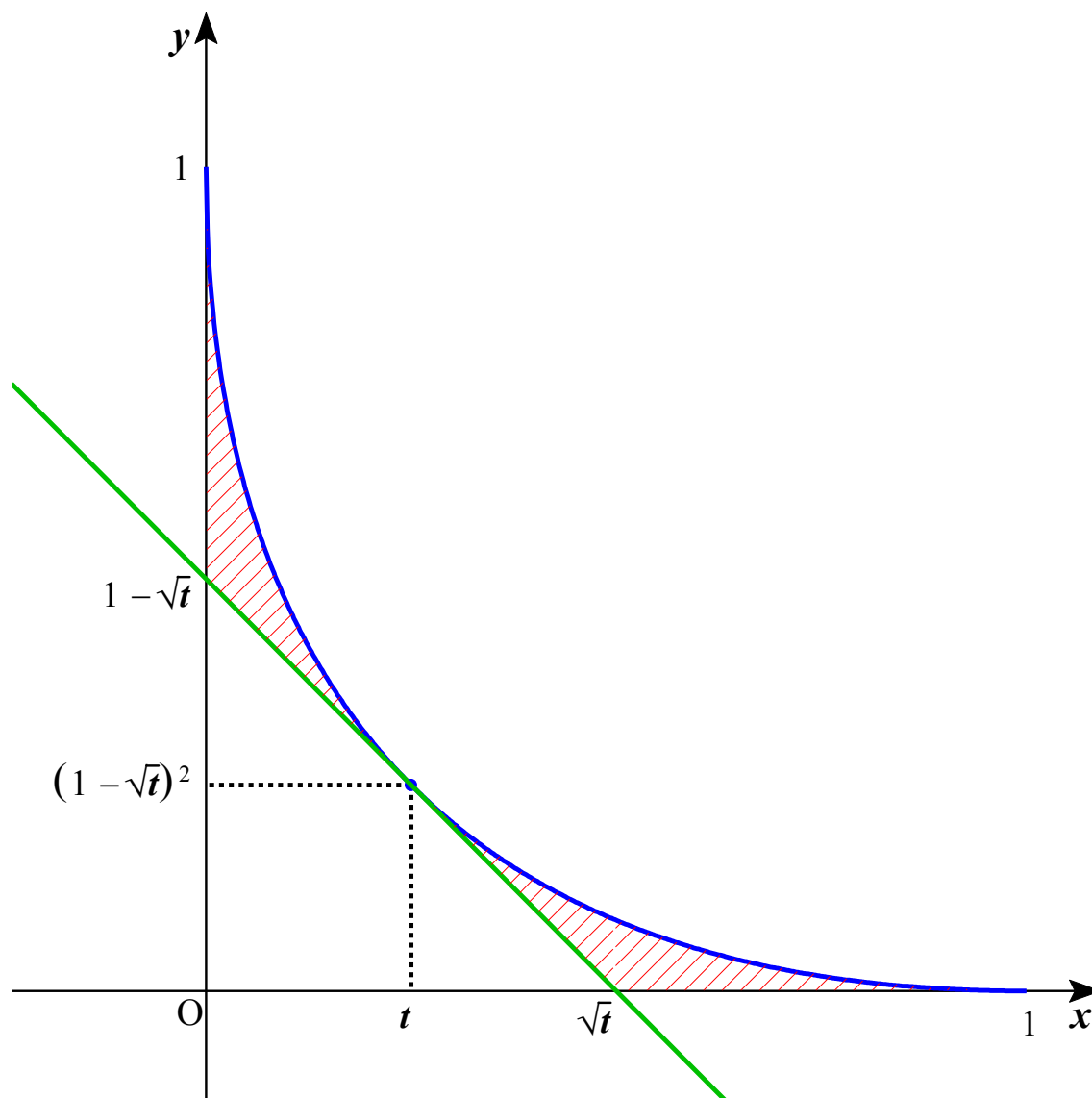
$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より, } S - T = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sqrt{t} (1 - \sqrt{t}) = \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sqrt{t} + \frac{1}{6}$$

$$\text{これと } S - T = \frac{1}{24} \text{ より, } \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sqrt{t} + \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$\text{すなわち } \frac{(2\sqrt{t}-1)^2}{8} = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

$$\text{これを}\textcircled{2}\text{に代入し, 整理することにより, 求める接線の方程式は } y = -x + \frac{1}{2}$$

参考図



解法 2

$$y = \sin^4 \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{ より, } y \geq 0$$

$$x = \cos^4 \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{ より, } 0 \leq x \leq 1, \quad x = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}, \quad x = 1 \Leftrightarrow \theta = 0, \quad dx = -4 \sin \theta \cos^3 \theta$$

よって、曲線と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \theta (-4 \sin \theta \cos^3 \theta) d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \cos^2 \theta \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta \cos \theta - \sin^7 \theta \cos \theta) d\theta \\ &= 4 \left[\frac{1}{6} \sin^6 \theta - \frac{1}{8} \sin^8 \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

接点の座標を $(\cos^4 \alpha, \sin^4 \alpha) \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ とすると、

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ において, } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{4 \cos \theta \sin^3 \theta}{-4 \sin \theta \cos^3 \theta} = -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \text{ より,}$$

$$\text{接線の方程式は } y = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (x - \cos^4 \alpha) + \sin^4 \alpha,$$

すなわち、

$$\begin{aligned} -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} (x - \cos^4 \alpha) + \sin^4 \alpha &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} x + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} x + \sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\ &= -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} x + \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\text{より, } y = -\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} x + \sin^2 \alpha \quad \dots \textcircled{2}$$

したがって、接線と x 軸, y 軸との交点はそれぞれ $(\cos^2 \alpha, 0)$, $(0, \sin^2 \alpha)$
 よって、接線と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積を T とすると、

$$T = \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \quad \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) \\ &= -\frac{d}{dx} (\tan^2 \theta) \\ &= -\frac{d \tan^2 \theta}{d\theta} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{2 \tan \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{4 \sin \theta \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{2 \cos^6 \theta} \end{aligned}$$

より、 $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$

よって、曲線は下に凸だから、 $S > T$ である。

ゆえに、①, ③より、

$$\begin{aligned} S - T &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{1}{2} \sin^4 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

これと $S - T = \frac{1}{24}$ より、 $\frac{1}{2} \sin^4 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha + \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$, すなわち $\frac{(2 \sin^2 \alpha - 1)^2}{8} = 0$

$$\therefore \sin^2 \theta = \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

これを②に代入することにより、求める接線の方程式は $y = -x + \frac{1}{2}$

450

(1)

$f(x)=ax^2$, $g(x)=\log x$, 共有点の x 座標を t とすると, $f'(x)=2ax$, $g'(x)=\frac{1}{x}$

$$f(t)=g(t) \text{ より, } at^2=\log t \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(t)=g'(t) \text{ より, } 2at=\frac{1}{t} \quad \therefore at^2=\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \log t=\frac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$$

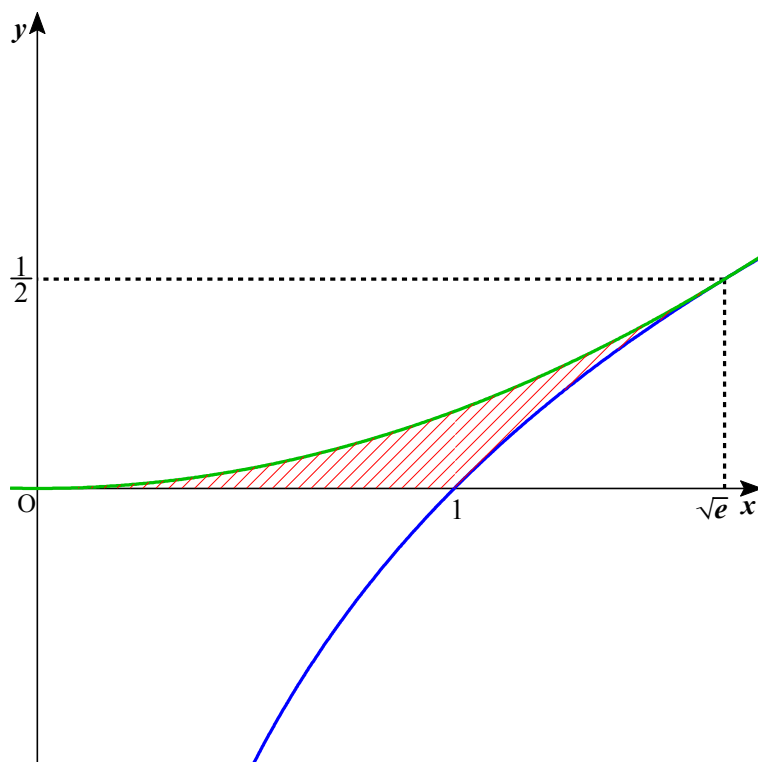
ゆえに, 共有点の座標 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2}\right)$, $a=\frac{1}{2e}$

(2)

略解

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{e}} \frac{x^2}{2e} dx - \int_1^{\sqrt{e}} \log x dx &= \left[\frac{x^3}{6e} \right]_0^{\sqrt{e}} - [x(\log x - 1)]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{\sqrt{e}}{6} - \left(-\frac{\sqrt{e}}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{e} - 1 \end{aligned}$$

参考図



451

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積を S とすると,

直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ と x 軸, y 軸との交点はそれぞれ $(a, 0)$, $(0, b)$ だから,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ と } x \text{ 軸, } y \text{ 軸で囲まれた三角形の面積 } S = \frac{ab}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積を T とすると,

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \text{ より, } 0 \leq \sqrt{\frac{x}{a}} \leq 1, \quad 0 \leq \sqrt{\frac{y}{b}} \leq 1$$

これと $a > 0$, $b > 0$ から, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$

$$\text{また, } \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{b}} = 1 - \sqrt{\frac{x}{a}} \Leftrightarrow y = b \left(\frac{x}{a} - 2\sqrt{\frac{x}{a}} + 1 \right) \quad (0 \leq x \leq a)$$

よって, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned} T &= \int_0^a y dx \\ &= b \int_0^a \left(\frac{x}{a} - 2\sqrt{\frac{x}{a}} + 1 \right) dx \\ &= b \left[\frac{x^2}{2a} - \frac{4}{3\sqrt{a}} x^{\frac{3}{2}} + x \right]_0^a \\ &= \frac{ab}{6} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$y = b \left(\frac{x}{a} - 2\sqrt{\frac{x}{a}} + 1 \right) \quad (0 \leq x \leq a)$ のグラフの概形については,

$$y' = b \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} x^{-\frac{1}{2}} \right), \quad 0 < x < a, \quad b > 0 \text{ より, } y' < 0$$

$$y'' = \frac{b}{2\sqrt{a}} x^{-\frac{3}{2}}, \quad b > 0 \text{ より, } y'' > 0$$

よって, $y = b \left(\frac{x}{a} - 2\sqrt{\frac{x}{a}} + 1 \right) \quad (0 \leq x \leq a)$ は単調減少する下に凸な曲線である。

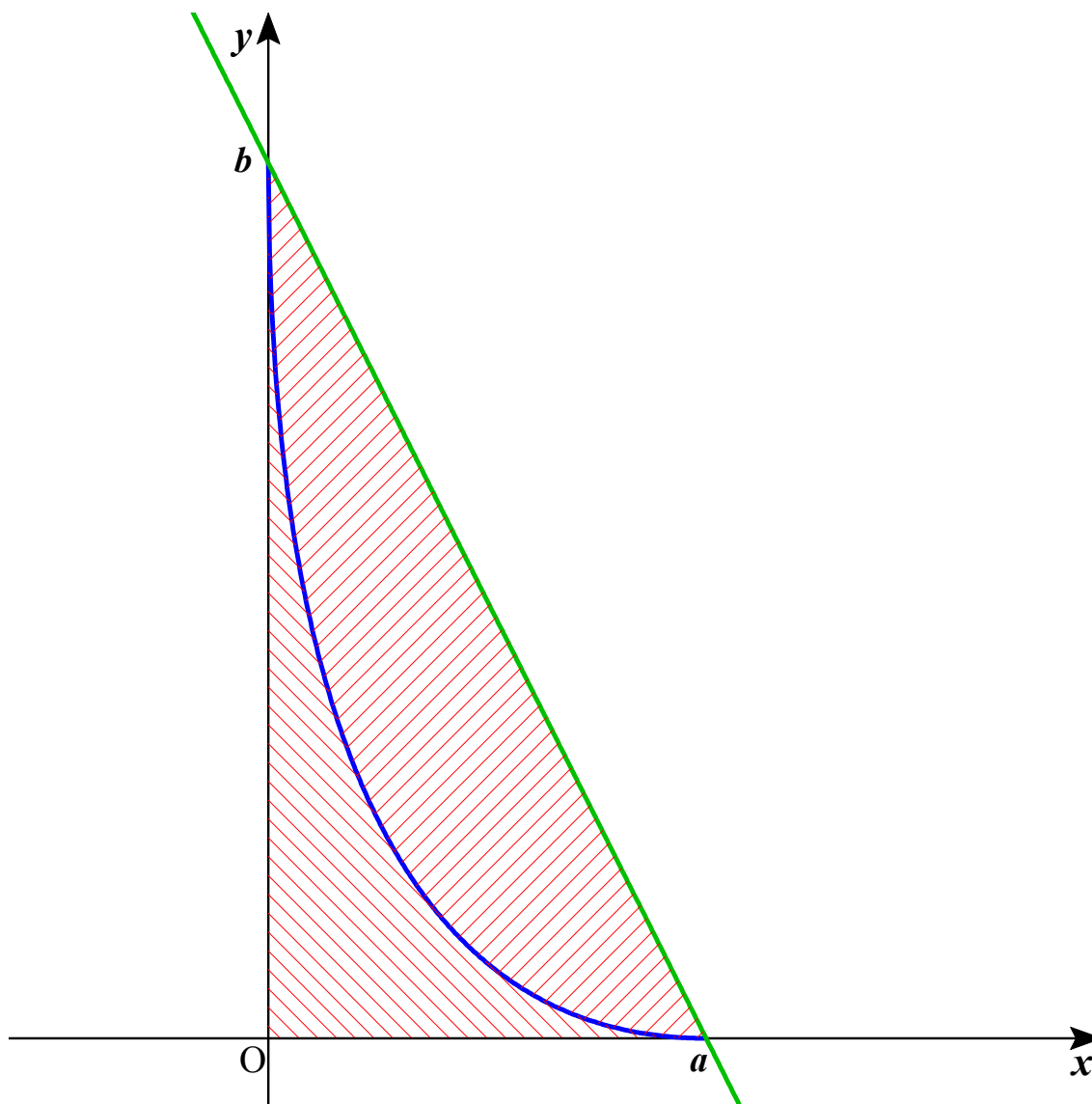
また, 点 $(a, 0)$, $(0, b)$ を $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ と共有する。

以上より, $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ は直線 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積を

$S - T : T$ の比に分割する。

よって, ①, ②より, 求める比は $\frac{ab}{2} - \frac{ab}{6} : \frac{ab}{6} = 2 : 1$

参考図



452

$y = a \sin x$ が $y = \sin 2x$ $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するときの

これら 2 曲線の交点の x 座標を α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ とすると,

$$\sin 2\alpha = a \sin \alpha \text{ より, } \sin \alpha(2 \cos \alpha - a) = 0$$

$$\text{よって, } \sin \alpha \neq 0 \text{ より, } \cos \alpha = \frac{a}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{ただし, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ より, } 0 < \cos \alpha = \frac{a}{2} < 1, \text{ すなわち } 0 < a < 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ と } x \text{ 軸で囲まれた部分の面積は } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 \text{ だから,}$$

$$\text{条件より, } y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ と } y = a \sin x \text{ で囲まれた部分の面積は } \frac{1}{2}$$

また, $y = \sin 2x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と $y = a \sin x$ で囲まれた部分の面積を a の式で表すと,

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} (\sin 2x - a \sin x) dx &= \left[-\frac{\cos 2x}{2} + a \cos x\right]_0^{\alpha} \\ &= -\frac{\cos 2\alpha}{2} + a \cos \alpha + \frac{1}{2} - a \\ &= -\cos^2 \alpha + a \cos \alpha - a + 1 \end{aligned}$$

よって, ①より,

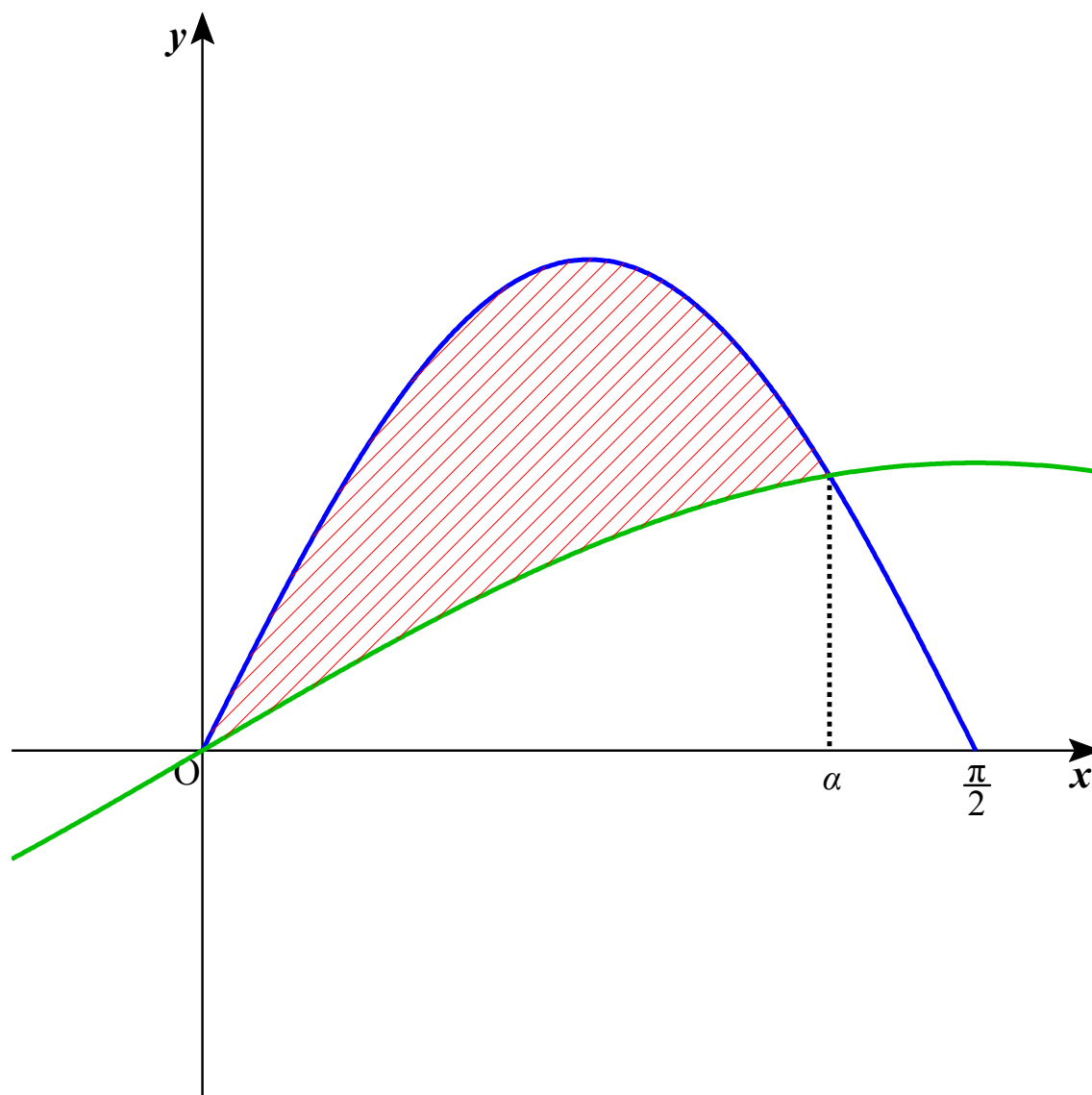
$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha} (\sin 2x - a \sin x) dx &= -\cos^2 \alpha + a \cos \alpha - a + 1 \\ &= -\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} - a + 1 \\ &= \frac{a^2}{4} - a + 1 \end{aligned}$$

$$\text{これが } \frac{1}{2} \text{ と等しいから, } \frac{a^2}{4} - a + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{これより, } a^2 - 4a + 2 = 0$$

この方程式の解で②を満たすものは $a = 2 - \sqrt{2}$

参考図



453

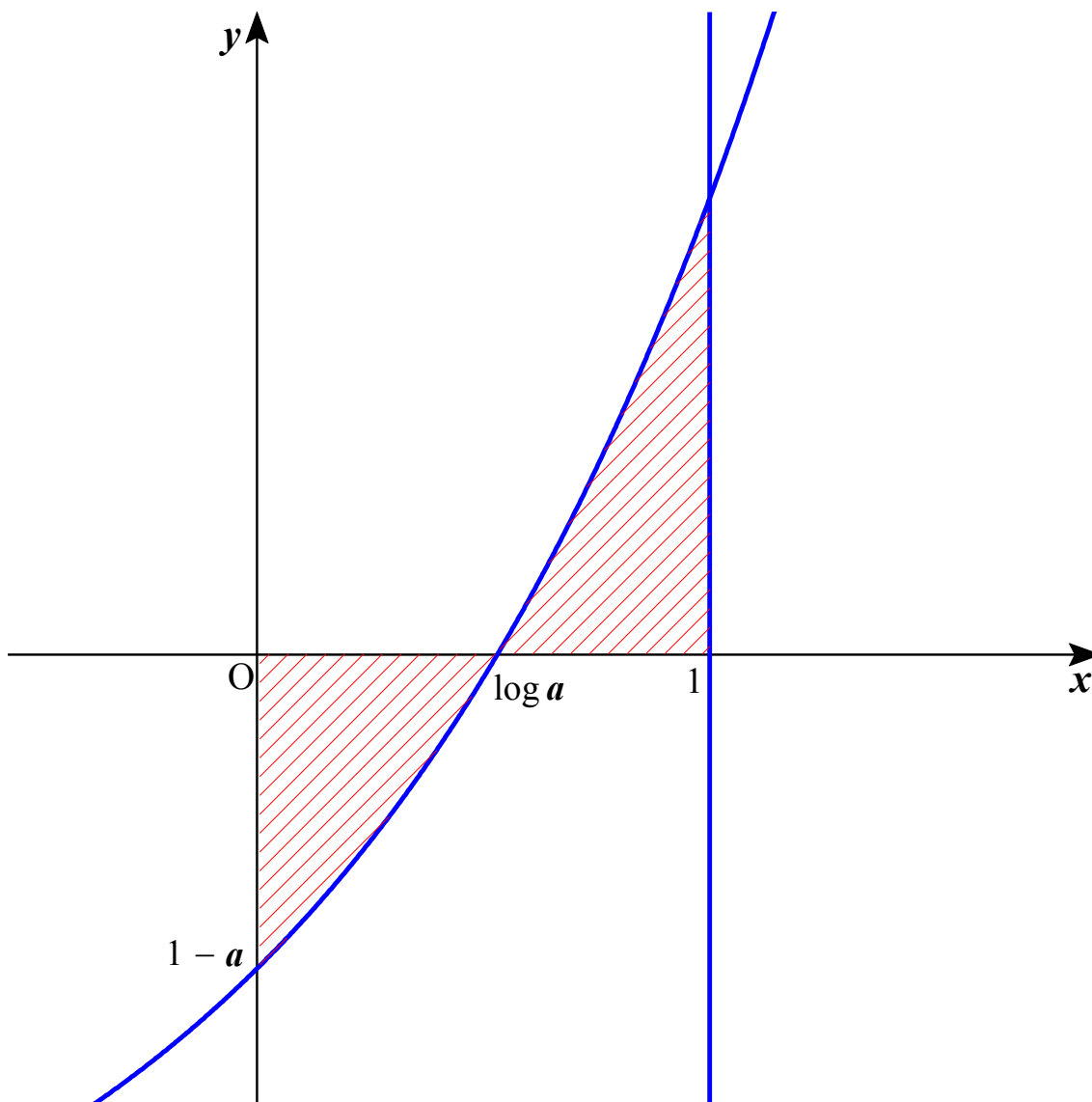
$y = e^x - a$ と x 軸との交点は, $e^x - a = 0$ より, $x = \log a$

$1 \leq a \leq e$ より, $0 \leq x \leq \log a$ のとき $e^x - a \leq 0$, $\log a \leq x \leq 1$ のとき $e^x - a \geq 0$

よって,

$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_0^{\log a} (e^x - a) dx + \int_{\log a}^1 (e^x - a) dx \\ &= \int_{\log a}^0 (e^x - a) dx + \int_{\log a}^1 (e^x - a) dx \\ &= [e^x - ax]_{\log a}^0 + [e^x - ax]_{\log a}^1 \\ &= 2a \log a - 3a + e + 1 \end{aligned}$$

参考図



(2)

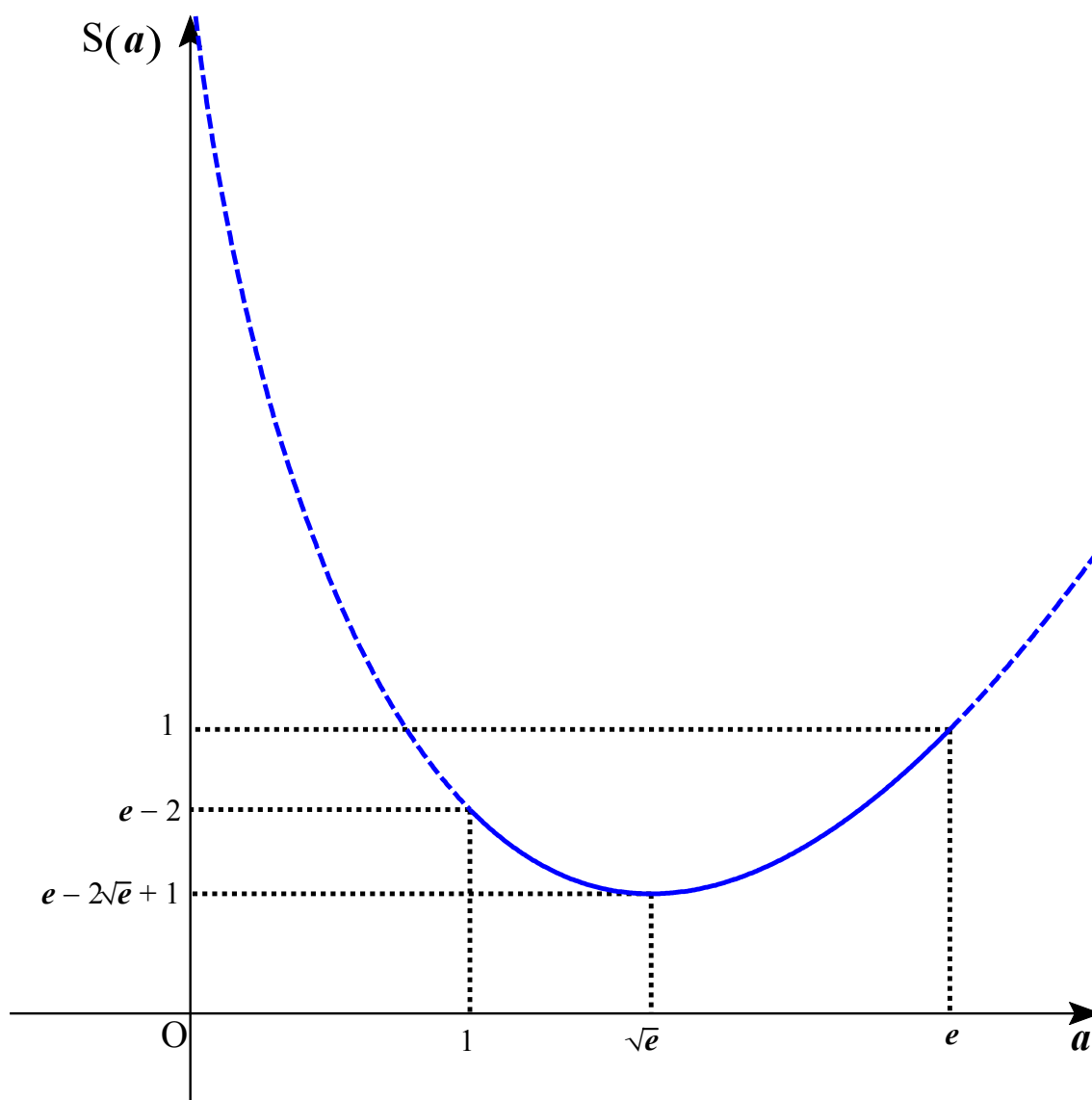
$$S(a) = 2a \log a - 3a + e + 1, \quad S'(a) = 2 \log a - 1, \quad 1 \leq a \leq e \text{ より,}$$

$S(a)$ の増減は次のようになる。

a	1	...	$\sqrt{e}$	...	e
$S'(a)$	/	-	0	+	/
$S(a)$	$e-2$	↓	$e-2\sqrt{e}+1$	↑	1

よって、 $S(a)$ は $a = \sqrt{e}$ のとき最小値 $e - 2\sqrt{e} + 1$ をとる。

参考図



454

$y = a$ が $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 3\pi$) と 4 点で交わるためには $0 \leq a < 1$ であることが必要

これと $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 3\pi$) が $x = \frac{3}{2}\pi$ に関して対称であることから,

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 3\pi$) と $y = a$ ($0 \leq a < 1$) で囲まれた 3 つの部分の面積の和は,

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$), $y = a$ ($0 \leq a < 1$), $x = \frac{3}{2}\pi$ で囲まれた部分の面積の 2 倍と等しい。

したがって,

$y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$), $y = a$ ($0 \leq a < 1$), $x = \frac{3}{2}\pi$ で囲まれた部分の面積が最小となるよ

うな a の値を求めればよいので, まずこの面積を表す式を求めることにする。

$y = a$ と $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$) の交点の x 座標の値の小さい方を α とすると,

$$a = \sin \alpha \quad \left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

また, 大きい方 x 座標の値は $\pi - \alpha$

よって, その面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (\sin x - a) dx + \int_{\pi-\alpha}^{\frac{3}{2}\pi} (a - \sin x) dx &= \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (\sin x - a) dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi-\alpha} (\sin x - a) dx \\ &= [-\cos x - ax]_{\alpha}^{\pi-\alpha} + [-\cos x - ax]_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi-\alpha} \\ &= 3a\alpha - \frac{a}{2}\pi + 3\cos \alpha \end{aligned}$$

これと①より,

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (\sin x - a) dx + \int_{\pi-\alpha}^{\frac{3}{2}\pi} (a - \sin x) dx &= 3a\alpha - \frac{a}{2}\pi + 3\cos \alpha \\ &= 3\alpha \sin \alpha - \frac{\pi}{2} \sin \alpha + 3\cos \alpha \\ &= \left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha + 3\cos \alpha \end{aligned}$$

となる。

これは α ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) の関数なので,

$$S(\alpha) = \left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right) \sin \alpha + 3\cos \alpha \quad \left(0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned}
 S'(\alpha) &= 3\sin\alpha + \left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha - 3\sin\alpha \\
 &= \left(3\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\cos\alpha
 \end{aligned}$$

これと $\cos\alpha > 0$ より, $S(\alpha)$ の増減は次のようになる。

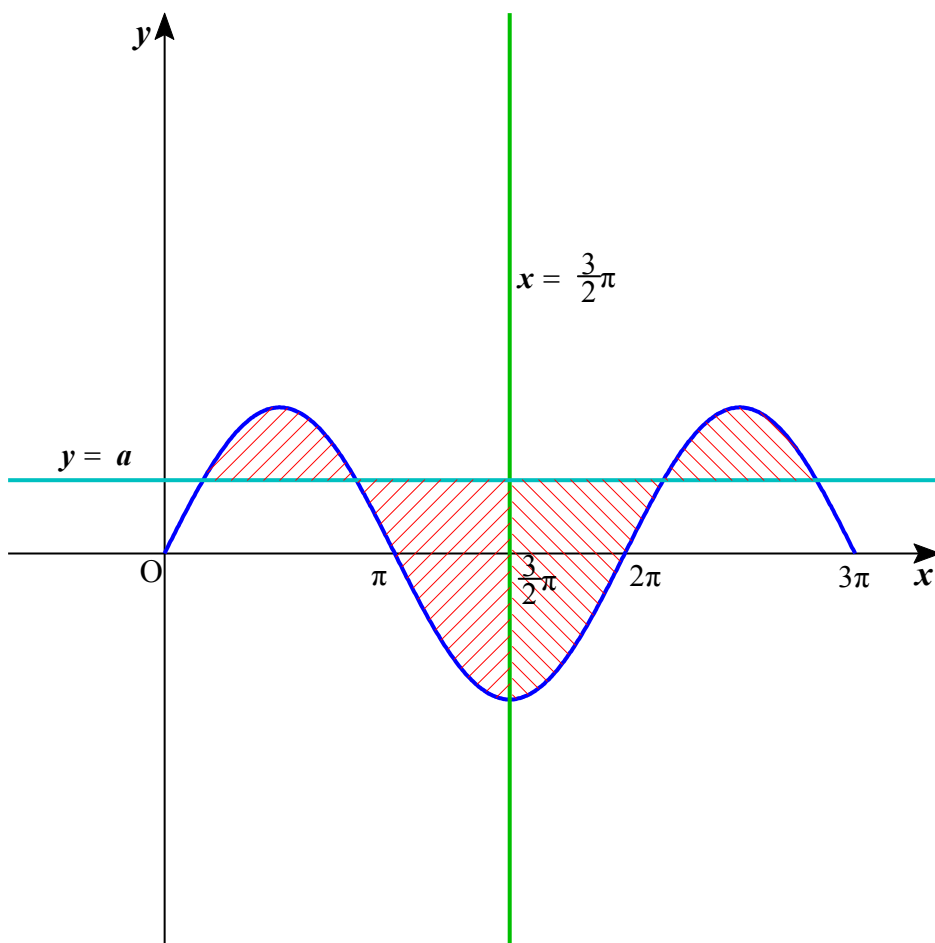
α	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\alpha)$	/	-	0	+	/
$S(\alpha)$	3	↓	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↑	/

よって, $S(\alpha)$ は $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のとき最小となる。

このとき①より, $a = \frac{1}{2}$

ゆえに, 直線の方程式は $y = \frac{1}{2}$

参考図



455

P_n から x 軸に下ろした垂線の足を Q_n とすると,

台形 $P_{n-1}Q_{n-1}Q_nP_n$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e^{-(n-1)} + e^{-n})\{n - (n-1)\} &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{e+1}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$y = e^{-x}$, 線分 $P_{n-1}Q_{n-1}$, 線分 P_nQ_n , x 軸で囲まれた部分の面積は

$$\begin{aligned}\int_{n-1}^n e^{-x} dx &= \left[-e^{-x}\right]_{n-1}^n \\ &= -e^{-n} + e^{-(n-1)} \\ &= -\left(\frac{1}{e}\right)^n + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \\ &= \frac{e-1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

これと $y = e^{-x}$ が下に凸の曲線であることから,

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{e+1}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} - \frac{e-1}{e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3-e}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-e}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3-e}{2e}\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3-e}{2e} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1} \\ &= \frac{3-e}{2e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}} \quad \text{は初項 } \frac{3-3}{2e} \\ &= \frac{3-e}{2e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= \frac{3-e}{2(e-1)}\end{aligned}$$

参考図

