積分法の応用 2　体積

461

正方形の 1 辺の長さは$|\sin x|$だから，正方形の面積は$\sin^2 x$

よって，

$$V=\int_0^\pi \sin^2 x dx$$
$$=\int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$=\left[\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}$$

462

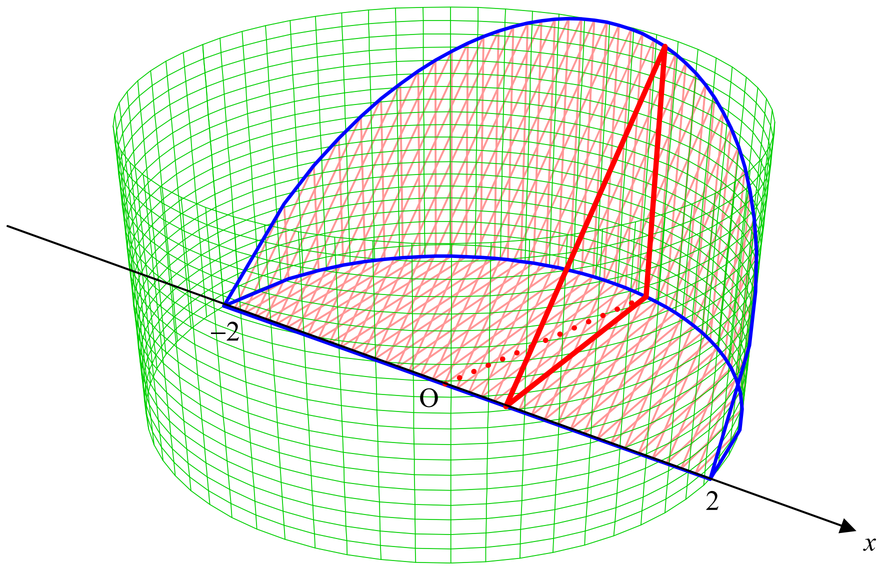
線分 AB の中点を原点，A,B を通る直線をx軸にとると，原点は底面の中心だから，
$\mathrm{A}(2,\ 0)$とすると，$\mathrm{B}(-2,\ 0)$
線分 AB と底面に垂直な平面で小さい方の立体を切ると，
その切断面は底辺の長さと高さが等しい直角二等辺三角形となる。
底辺の長さは，斜辺の長さ 2，底辺の長さが$|x|$の直角三角形の高さだから，

三平方の定理より，$\sqrt{4-x^2}$

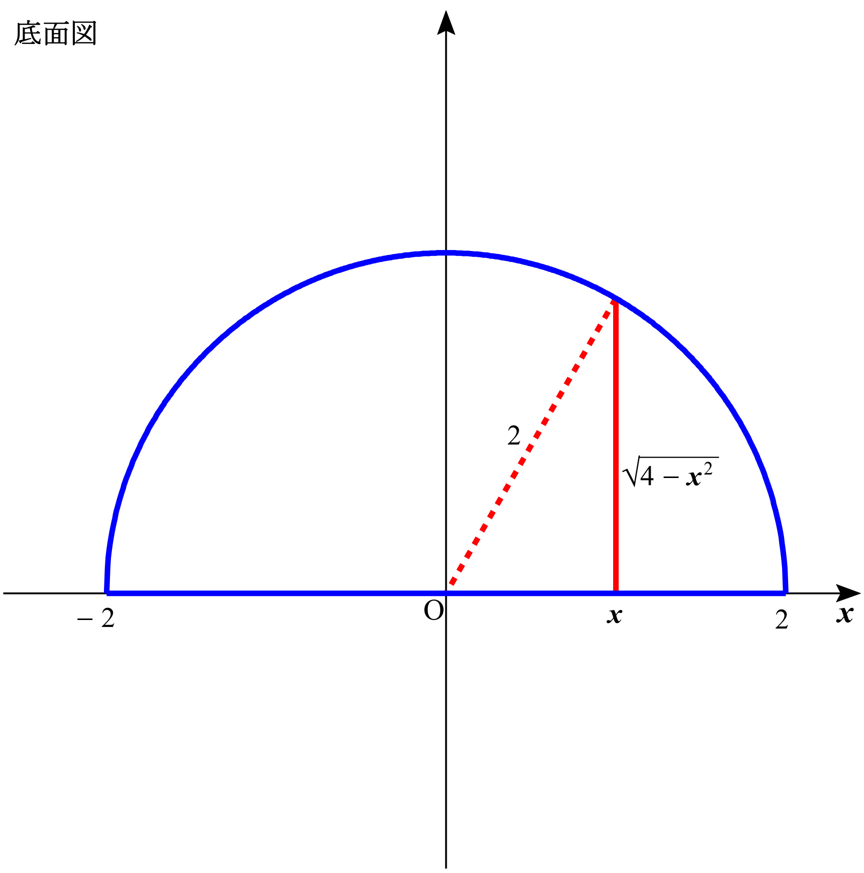
よって，切断面の面積は$\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)$

ゆえに，

$$V=\int_{-2}^2 \frac{1}{2}\left(4-x^2\right)dx$$
$$=2\int_0^2 \frac{1}{2}\left(4-x^2\right)dx$$
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}$$



−2
O
2
x



底面図
2
$\sqrt{4-x^2}$
−2
O
x
2
x

463

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とすると，$f(x)=f(-x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ だから，$f(x)$ は y 軸に関して対称である。

また，$y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ も y 軸に関して対称である。

したがって，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ と $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ に囲まれた部分は y 軸に関して対称である。

よって，回転体の $x \geq 0$ の体積を 2 倍すれば V が得られる。

$y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ と $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の交点の正の x 座標は 1 だから，

求める体積は，

$$V=2\left\{\pi\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx-\pi\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 dx\right\}$$

$$=2\pi\left(\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^1\frac{1}{2}dx\right)$$

$$=2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta-\left[\frac{1}{2}x\right]_0^1\right)$$

$$=2\pi\left([\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

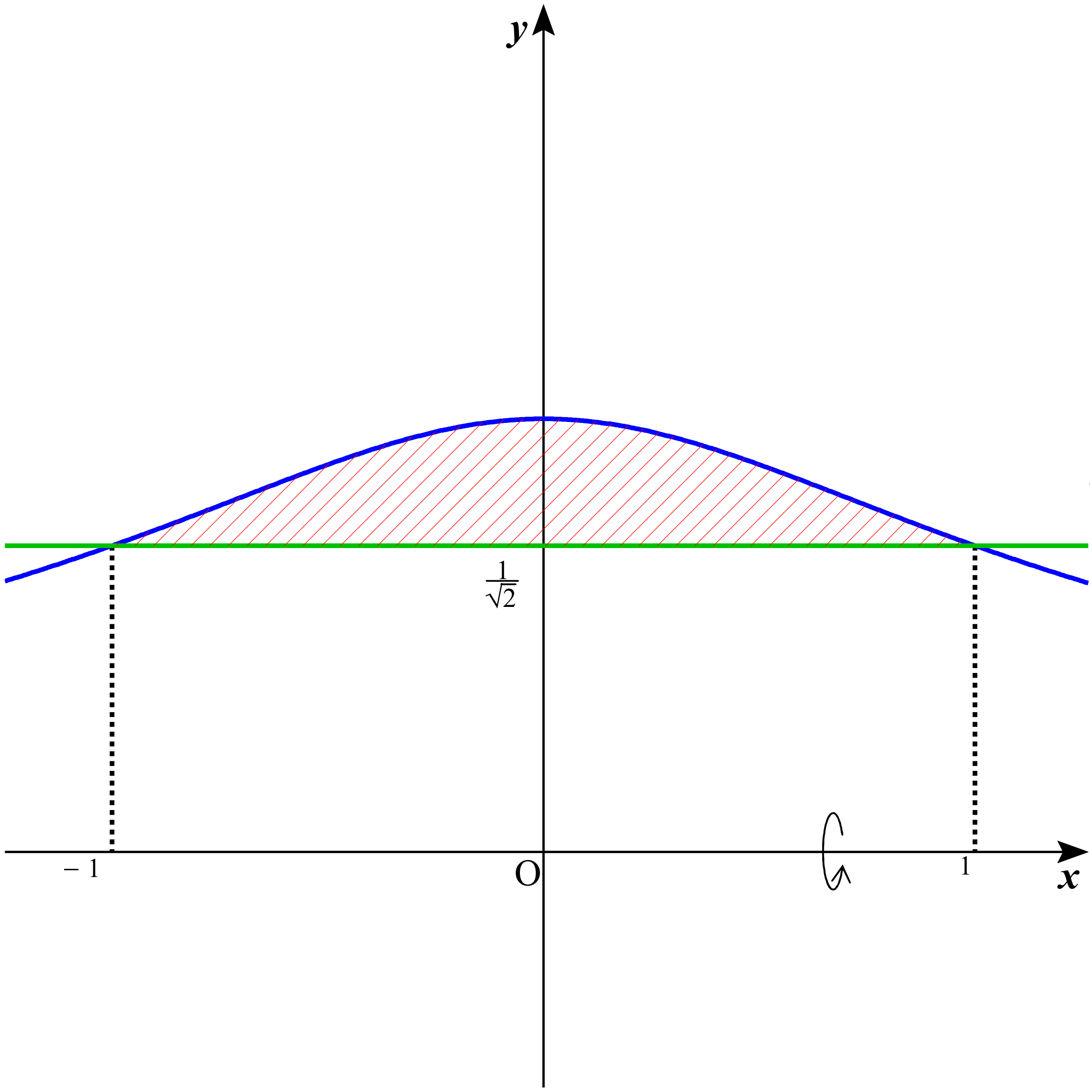
$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$ について

$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，$x=1\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$，$x=0\Rightarrow\theta=0$，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$


y
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
−1
O
1
x

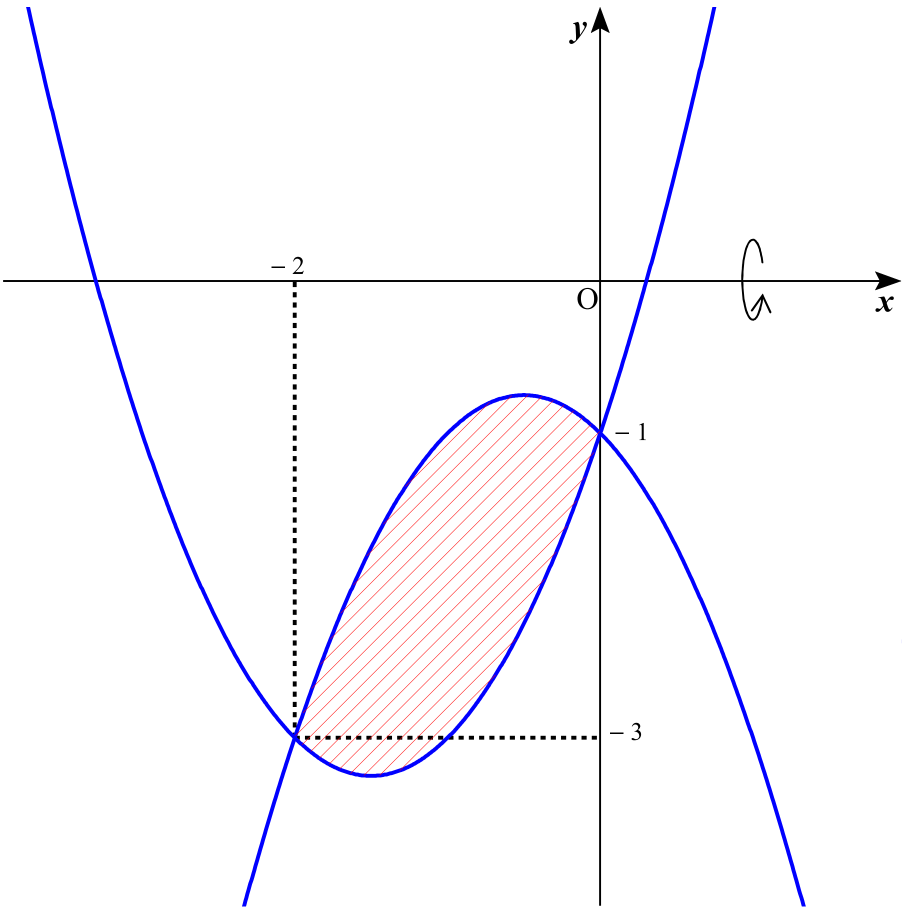
(2)

2 曲線の交点の x 座標は $x^2+3x-1=-x^2-x-1$ の解,
すなわち $2x(x+2)=0$ の解だから，$x=-2,\ 0$

また $-2\leq x\leq 0$ において，$x^2+3x-1\leq -x^2-x-1<0$ $\left(\because -x^2-x-1=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}<0\right)$

よって，

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{-2}^{0}\left(x^2+3x-1\right)^2dx-\pi\int_{-2}^{0}\left(-x^2-x-1\right)^2dx\\
&=\pi\int_{-2}^{0}\left\{x^2+3x-1+\left(-x^2-x-1\right)\right\}\left\{x^2+3x-1-\left(-x^2-x-1\right)\right\}dx\\
&=\pi\int_{-2}^{0}(2x-2)\left(2x^2+4x\right)dx\\
&=\pi\int_{-2}^{0}\left(4x^3+4x^2-8x\right)dx\\
&=\pi\left[x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2\right]_{-2}^{0}\\
&=\frac{32}{3}\pi
\end{aligned}
$$



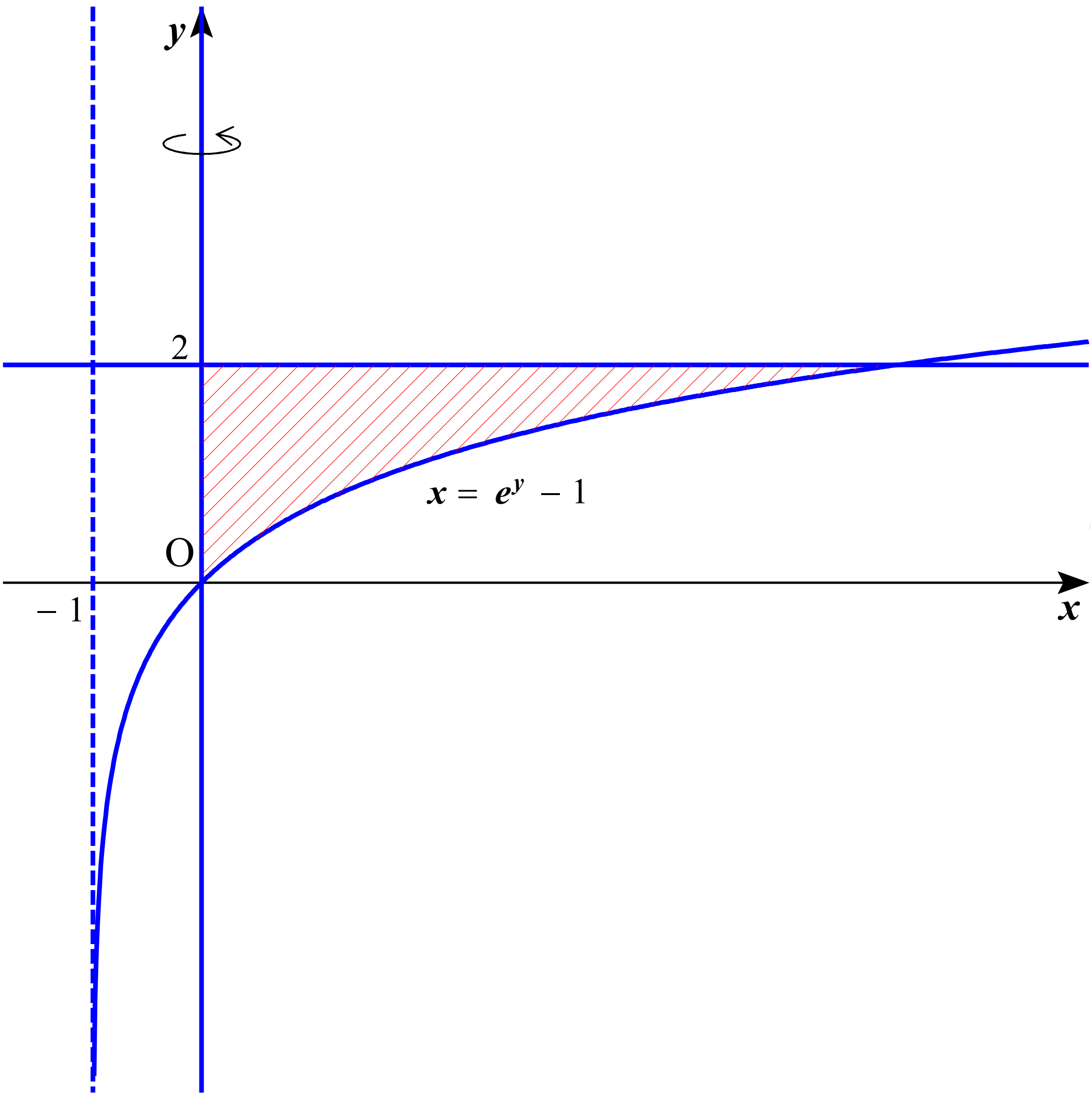
464

(1)

$y=\log(1+x)$ より， $x=e^y-1$

よって，

$$V=\pi\int_0^2 (e^y-1)^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^2 (e^{2y}-2e^y+1)dy$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}-2e^y+y\right]_0^2$$
$$=\frac{\pi}{2}(e^4-4e^2+7)$$



(2)

$y=x^2$ と $x+\sqrt{y}=2$ （$x \leq 2$）の交点の x 座標は

$x+|x|=2$ （$x \leq 2$） $\left(\because \sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|\right)$ より，$|x|^2=(2-x)^2$ （$x \leq 2$），

すなわち $4(x-1)=0$ （$x \leq 2$）の解だから，$x=1$

したがって，交点の y 座標は 1

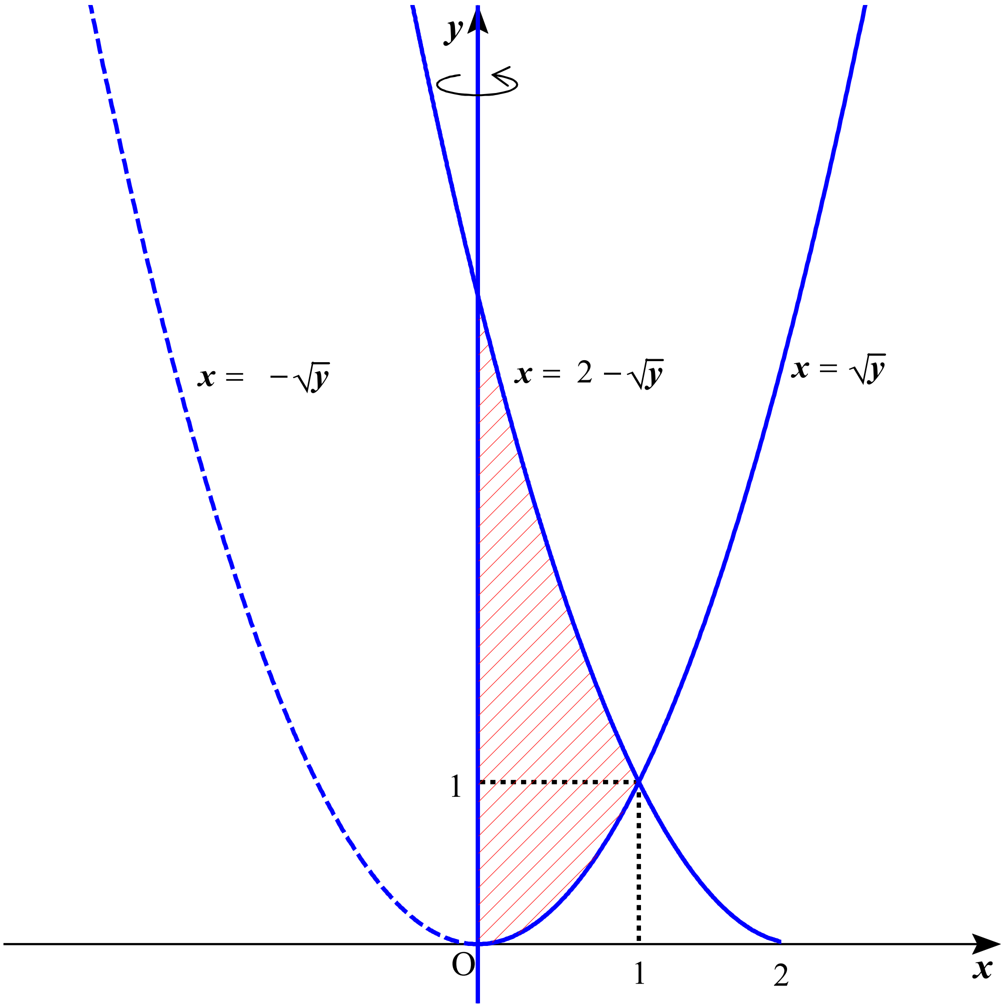
よって，下図より，

$$V=\pi\int_0^1 y\,dy+\pi\int_1^4\left(2-\sqrt{y}\right)^2 dy$$

$$=\pi\left\{\int_0^1 y\,dy+\int_1^4\left(y-4\sqrt{y}+4\right)dy\right\}$$

$$=\pi\left(\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}y^2-\frac{8}{3}y\sqrt{y}+4y\right]_1^4\right)$$

$$=\frac{4}{3}\pi$$



(3)

$y=x^2-4x+5$ と $y=2x$ の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=x^2-4x+5 \\ y=2x \end{cases}$ を解くことにより，

$(x,\ y)=(1,\ 2),\ (5,\ 10)$

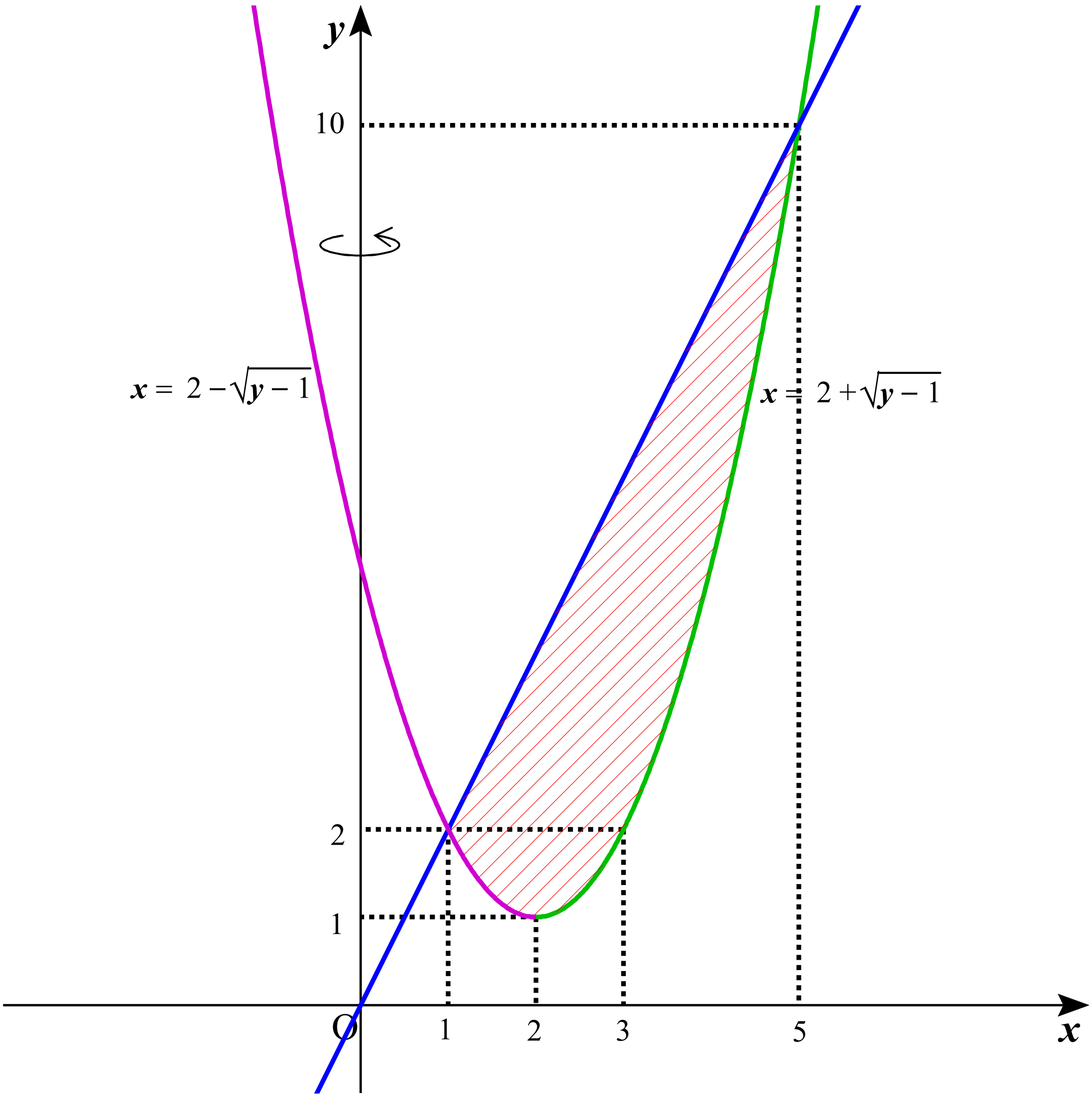
よって，下図より，

$$V=\left\{\pi\int_1^2\left(2+\sqrt{y-1}\right)^2dy-\pi\int_1^2\left(2-\sqrt{y-1}\right)^2dy\right\}+\left\{\pi\int_2^{10}\left(2+\sqrt{y-1}\right)^2dy-\pi\int_2^{10}\left(\frac{y}{2}\right)^2dy\right\}$$

$$=\pi\int_1^2 8\sqrt{y-1}dy+\pi\int_2^{10}\left(-\frac{y^2}{4}+y+4\sqrt{y-1}+3\right)dy$$

$$=\pi\left(\left[\frac{16}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2+\left[-\frac{y^3}{12}+\frac{y^2}{2}+\frac{8}{3}(y-1)^{\frac{3}{2}}+3y\right]_2^{10}\right)$$

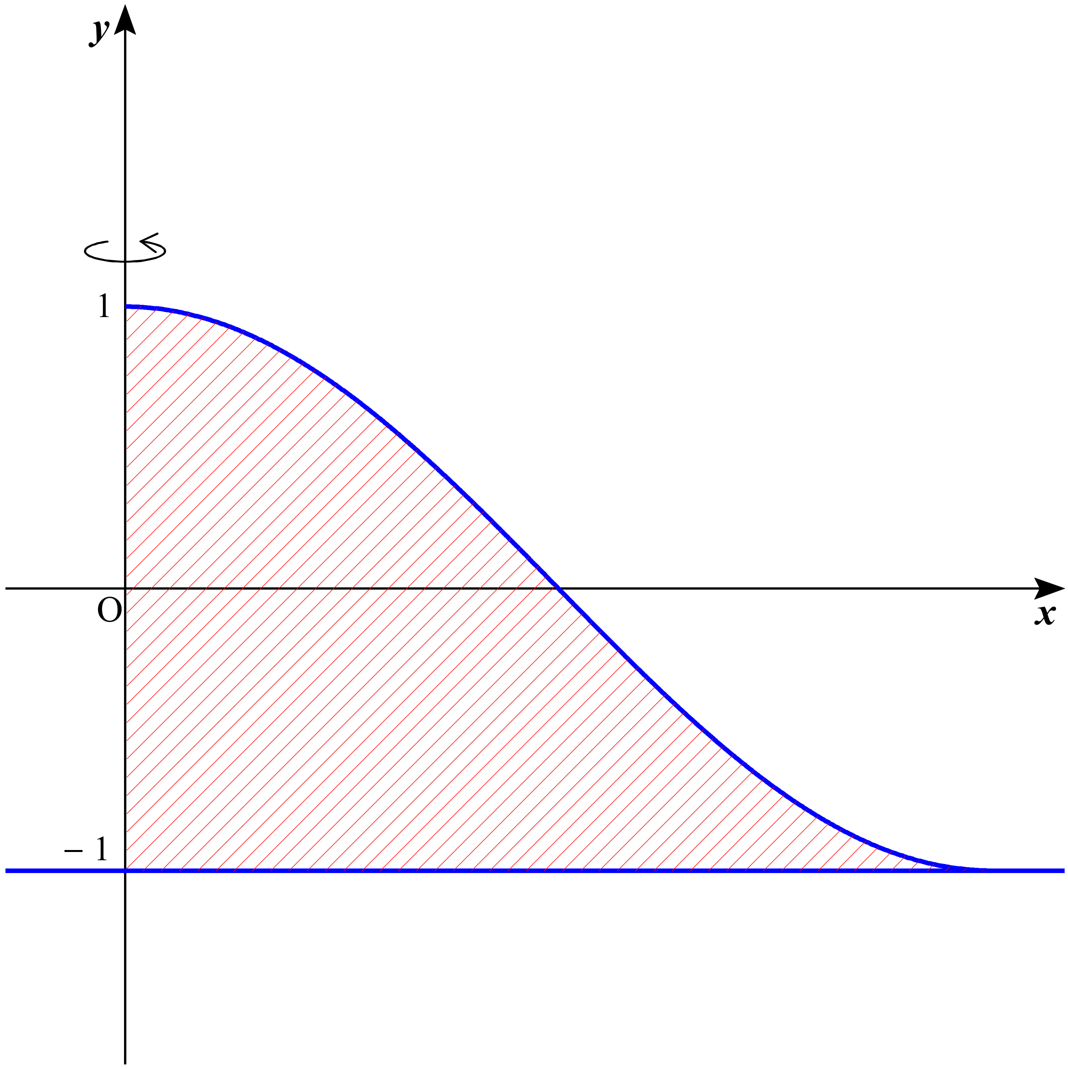
$$=64\pi$$



465

$V=\pi\int_{-1}^{1}x^2dy$, $dy=-\sin xdx$, $y=1\Rightarrow x=0,\ y=-1\Rightarrow x=\pi$ より,

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{\pi}^{0}x^2(-\sin x)dx\\&=\pi\int_{0}^{\pi}x^2\sin xdx\\&=\pi\int_{0}^{\pi}x^2(-\cos x)'dx\\&=\pi\left(\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}x\cos xdx\right)\\&=\pi\left(\pi^2+2\left[x\sin x\right]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\sin xdx\right)\\&=\pi\left(\pi^2+2\left[\cos x\right]_0^{\pi}\right)\\&=\pi^3-4\pi\end{aligned}$$



466

接点の座標を$(t,\ \log t)$とすると，$y'=\dfrac{1}{x}$より，接線の方程式は，一般に，$y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\log t$

したがって，原点を通る接線の方程式は，$0=-1+\log t$より$t=e$だから，$y=\dfrac{x}{e}$

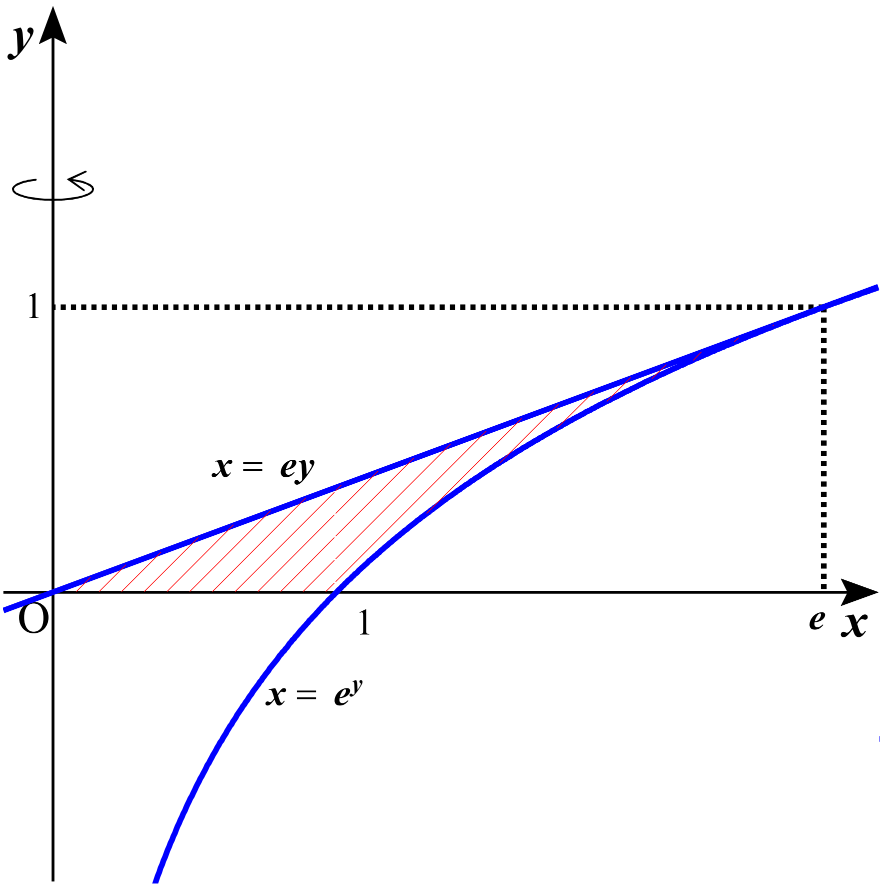
よって，下図より，

$$V=\pi\int_0^1\left(e^y\right)^2dy-\pi\int_0^1(ey)^2dy$$

ここで，$\pi\int_0^1(ey)^2dy$は底面の半径e，高さ 1 の円錐の体積と等しいから，$\pi\int_0^1(ey)^2dy=\dfrac{\pi}{3}e^2$

ゆえに，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1\left(e^y\right)^2dy-\frac{\pi}{3}e^2\\&=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1-\frac{\pi}{3}e^2\\&=\frac{\pi}{6}\left(e^2-3\right)\end{aligned}$$



467

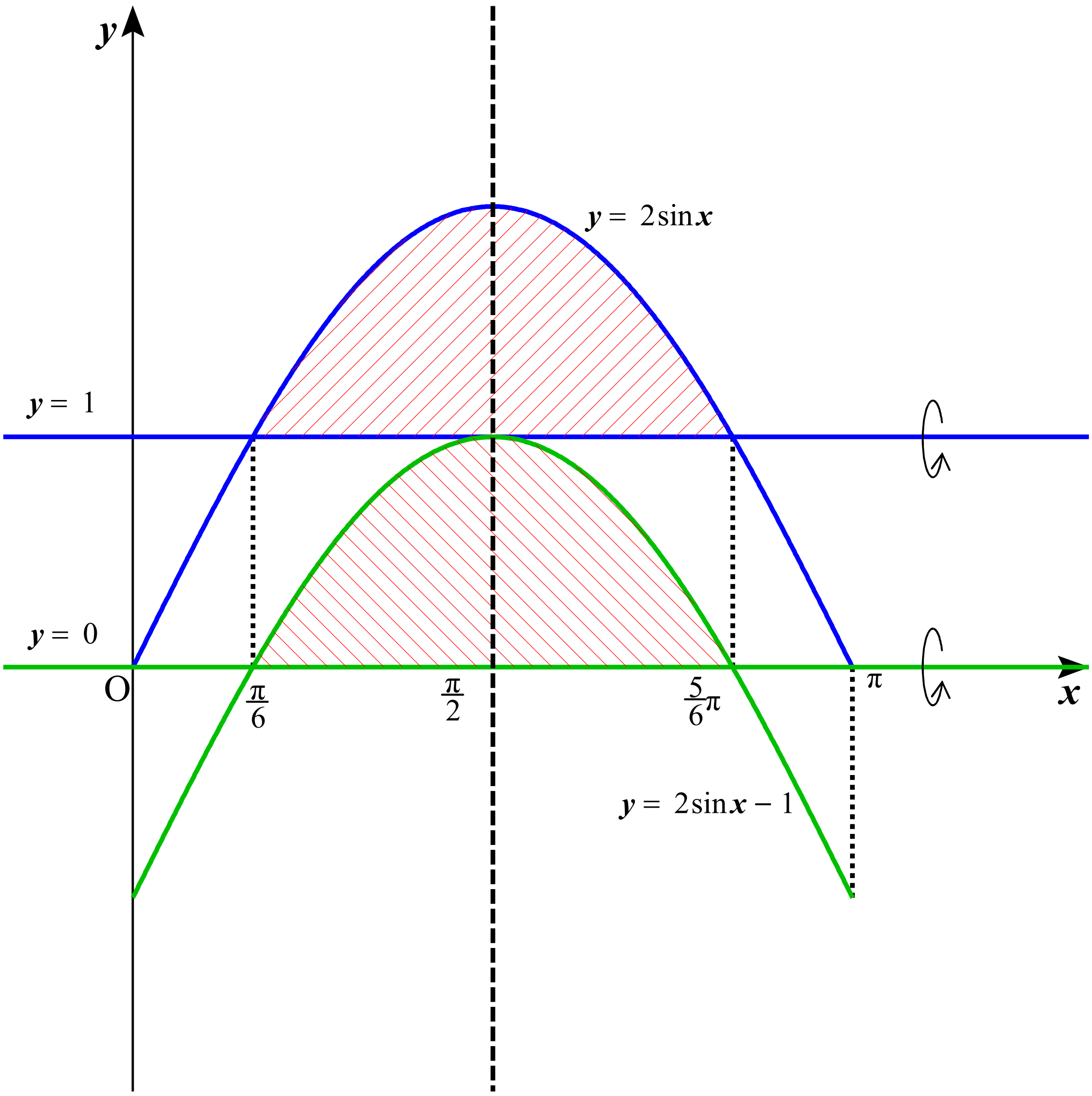
(1)

$y=2\sin x$ （$0\leq x\leq \pi$ ）と $y=1$ のそれぞれを y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，
$y=2\sin x-1$ （$0\leq x\leq \pi$ ）と $y=0$ になるから，求める体積は $y=2\sin x-1$ と $y=0$ すなわち x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる体積と等しい。

よって，$y=2\sin x-1$ （$0\leq x\leq \pi$ ）と x 軸との交点の x 座標は $\frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$ であることと，

$y=2\sin x-1$ （$0\leq x\leq \pi$ ）と x 軸で囲まれた部分は $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称であることから，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(2\sin x-1)^2\,dx \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-1)^2\,dx \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\sin^2 x-4\sin x+1\right)dx \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-4\sin x+1\right)dx \\
&= 2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(-2\cos 2x-4\sin x+3\right)dx \\
&= 2\pi\left[-\sin 2x+4\cos x+3x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)
\end{aligned}
$$

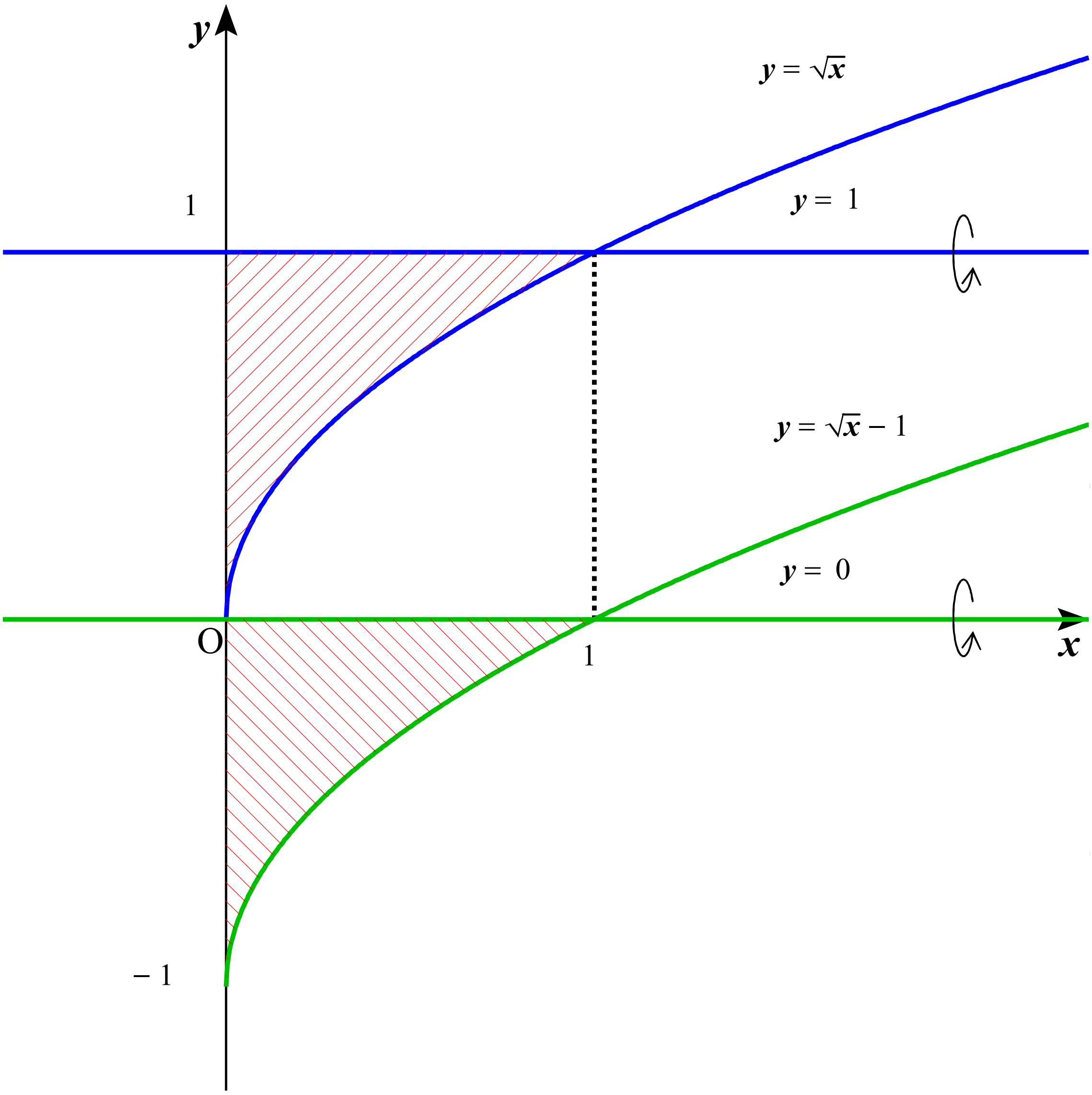

y
y = 2sinx
y = 1
y = 0
O
π/6
π/2
5/6π
π
x
y = 2sinx − 1

(2)

(1)と同様，求める体積は $y=\sqrt{x}-1$，$x=0$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに回転させてできた立体の体積を求めるのと同じである。

よって，

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx$$
$$=\pi\int_0^1\left(x-2\sqrt{x}+1\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{6}$$

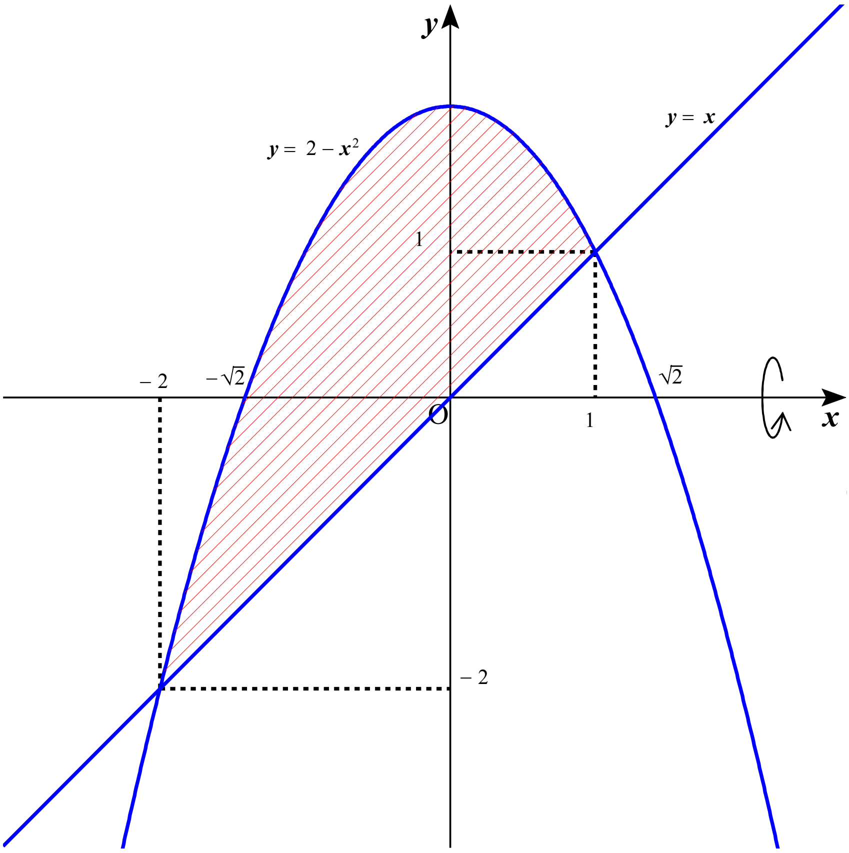


468

(1)

$y=2-x^2$ と $y=x$ の交点の座標は，連立方程式 $\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=x \end{cases}$ を解くことにより，

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (-2,\ -2)$ だから， $y=2-x^2$ と $y=x$ で囲まれた部分は下図のようになる。



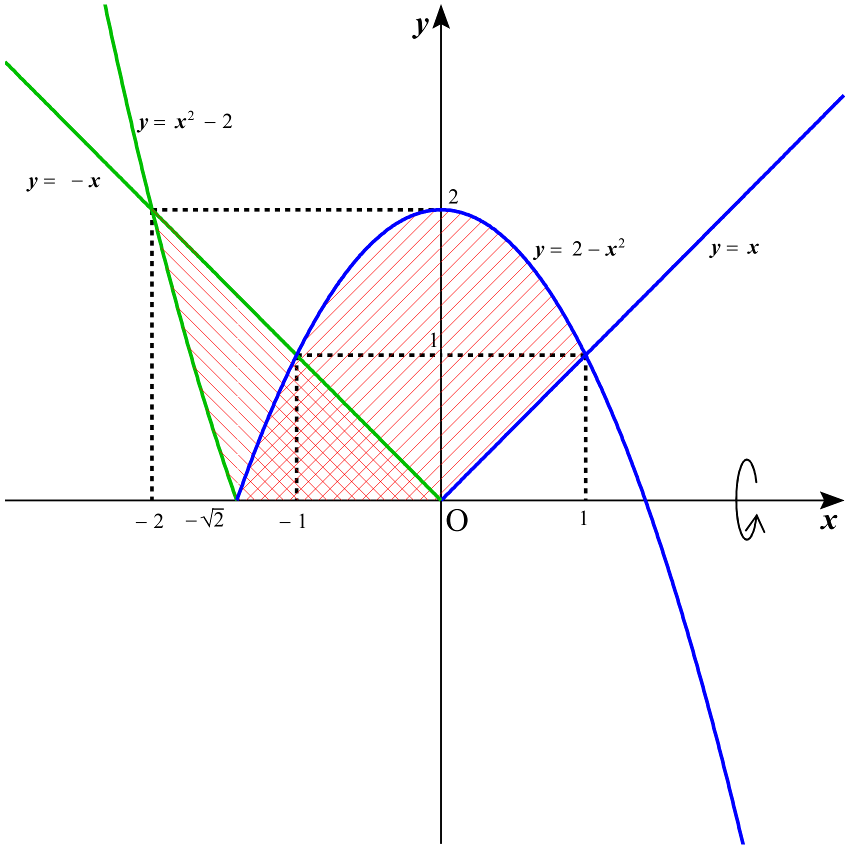
したがって，前図の赤線部を回転軸（x 軸）の周りに 1 回転してできる立体と，
前図の赤線部のうち $y\leq 0$ の部分を回転軸（x 軸）に関して対称移動した下図の赤線部を
回転軸（x 軸）の周りに 1 回転してできる立体は合同である。
よって，

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(2-x^2\right)^2dx-\pi\int_{0}^{1}x^2dx+\pi\int_{-2}^{-1}(-x)^2dx-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\left(x^2-2\right)^2dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{1}\left(x^4-4x^2+4\right)dx-\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\pi\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{-1}-\pi\int_{-2}^{-\sqrt{2}}\left(x^4-4x^2+4\right)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1+2\pi-\pi\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{-\sqrt{2}}$$

$$=\left(4+\frac{32\sqrt{2}}{15}\right)\pi$$



(2)

(1)と同様に，$y=\sin x$, $y=\sin 2x$ $\left(\dfrac{\pi}{3}\leq x\leq \pi\right)$で囲まれた部分（図 1 赤線部）を回転軸（$x$ 軸）の周りに 1 回転してできる立体と図 1 赤線部のうち $y\leq 0$ の部分を回転軸（x 軸）に関して対称移動した図 2 赤線部を回転軸（x 軸）の周りに 1 回転してできる立体は合同である。

よって，

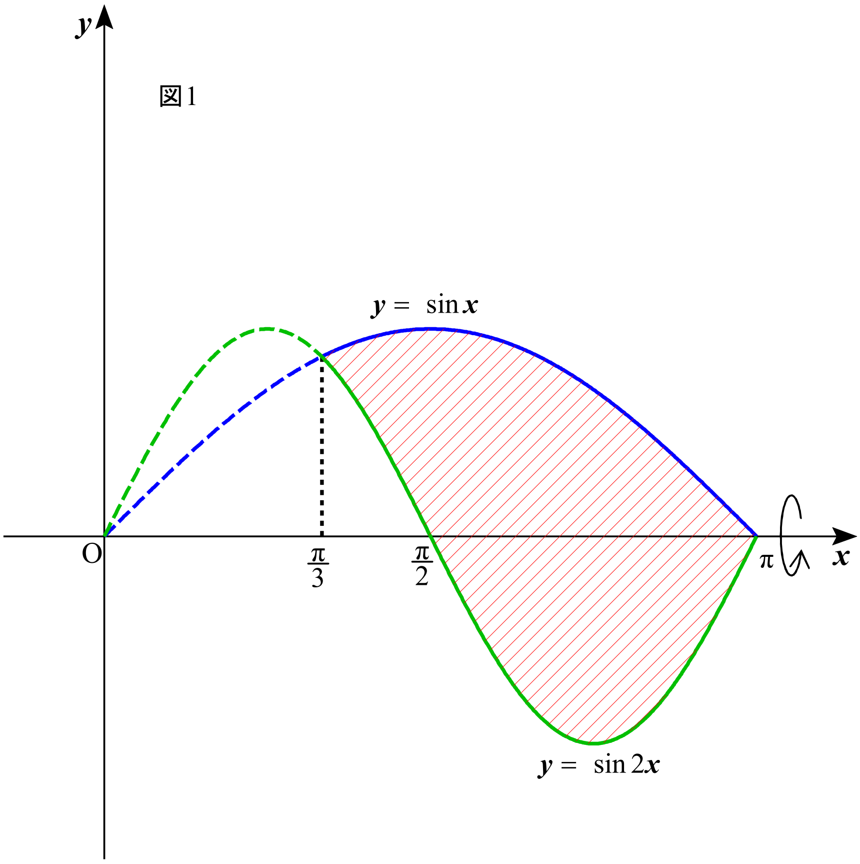
$$V=\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}(-\sin 2x)^2dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\sin^2 xdx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2xdx$$

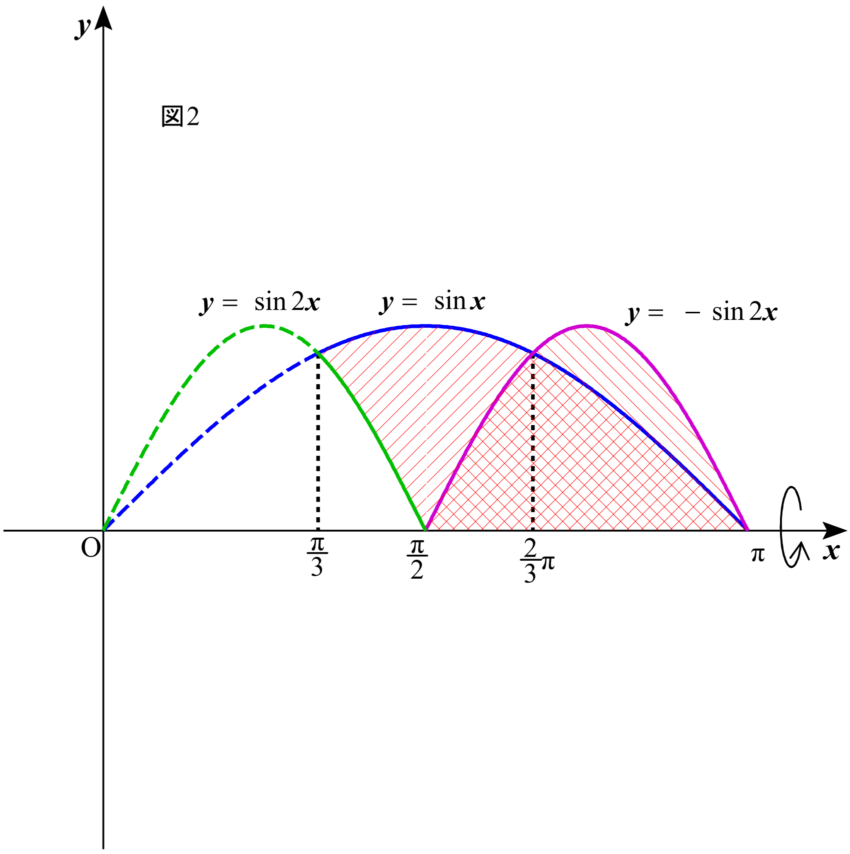
$$=\pi\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx+\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\pi\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}+\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}-\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right)+\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$=\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{8}\pi$$


y
図1
y = sin x
O
π/3
π/2
π
x
y = sin 2x


y
図2
y = sin 2x
y = sin x
y = − sin 2x
O
π/3
π/2
2/3π
π
x

469

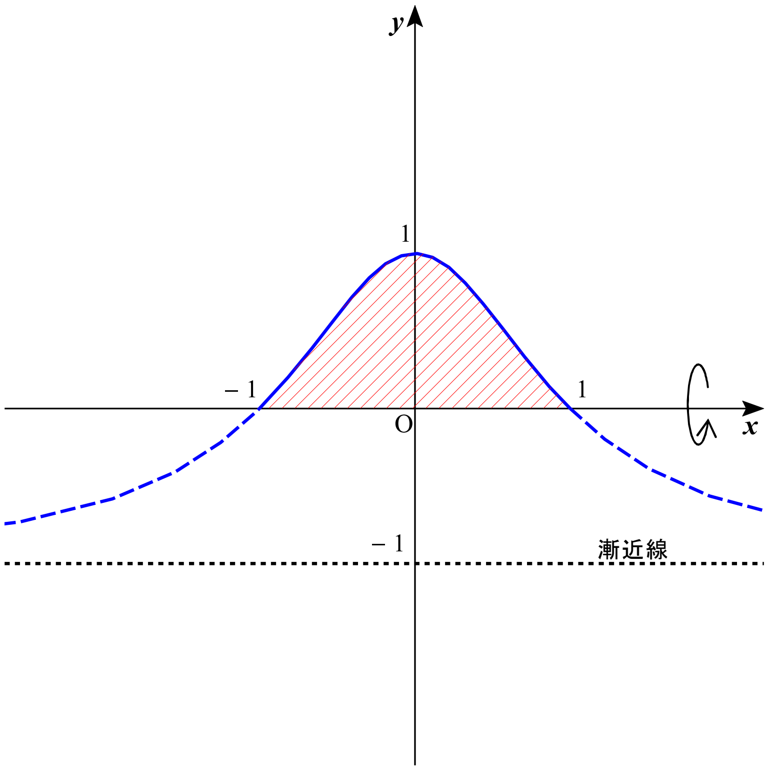
$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ より，$-1 \leq x \leq 1$，$y \geq 0$，$x=-1 \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=1 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

よって，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^{1} y^2 dx \\
&= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\left(-1+2\cos^2\theta\right)^2}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}-4+4\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= \pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta}+2\cos 2\theta-2\right) d\theta \\
&= \pi\left[\tan\theta+\sin 2\theta-2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \pi(4-\pi)
\end{aligned}
$$

補足

$$y=\cos 2\theta=-1+2\cos^2\theta=-1+\frac{2}{1+\tan^2\theta}=-1+\frac{2}{1+x^2}$$



470

$V(t)=\pi\int_t^{2t}\sin^2 xdx$

ここで，$F(x)=\int\sin^2 xdx$ とおくと，

$$V(t)=\pi\int_t^{2t}\sin^2 xdx$$
$$=\pi\left[F(x)\right]_t^{2t}$$
$$=\pi\{F(2t)-F(t)\}$$

よって，

$$V'(t)=\pi\{2F'(2t)-F'(t)\}$$
$$=\pi\left(2\sin^2 2t-\sin^2 t\right)$$
$$=\pi\left(8\sin^2 t\cos^2 t-\sin^2 t\right)$$
$$=\pi\sin^2 t\left(8\cos^2 t-1\right)$$

$0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$ より，$V(t)$は閉区間$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$で連続かつ開区間$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$において微分可能だから，

$V'(t)=0$ の解を a とすると，$\cos a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ \left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

したがって，$V(t)$の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$V'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(t)$		↑	極大	↓	

よって，$t=a$ のとき$V(t)$が最大になる。

ゆえに，$\cos\alpha=\cos a=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

別解

$$V(t)=\pi\int_t^{2t}\sin^2 x dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_t^{2t}(1-\cos 2x)dx$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_t^{2t}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{\sin 4t}{2}+\frac{\sin 2t}{2}+t\right)$$

より，

$$V'(t)=\frac{\pi}{2}(-2\cos 4t+\cos 2t+1)$$
$$=\frac{\pi}{2}(-4\cos^2 2t+\cos 2t+3)$$
$$=\frac{\pi}{2}(4\cos 2t+3)(1-\cos 2t)$$

$0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$ より，$V(t)$は閉区間$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$で連続かつ開区間$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$において微分可能だから，

$V'(t)=0$ の解を a とすると，$\cos 2a=-\frac{3}{4}\ \left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

したがって，$V(t)$の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$V'(t)$	/	$+$	0	$-$	/
$V(t)$		↑	極大	↓	

よって，$t=a$ のとき$V(t)$が最大になる。

$\cos 2a=-\frac{3}{4}$，$\cos 2a=-1+2\cos^2 a$，$\cos a>0$ より，$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{4}$

ゆえに，$\cos\alpha=\cos a=\frac{\sqrt{2}}{4}$

472

$y=a^2-x^2$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_0 とすると,

$$V_0=\pi\int_0^{a^2}x^2dy$$
$$=\pi\int_0^{a^2}\left(a^2-y\right)dy$$
$$=\pi\left[a^2y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{a^2}$$
$$=\frac{a^4}{2}\pi$$

2 等分された立体の 1 つは $y=a^2-x^2$, $y=kx^2$ および x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体と合同である。

そこで,この立体の体積を V_1 とし,これを k を含む式で表してみる。

$y=kx^2$ は $y=a^2-x^2$ と $y>0$ の部分で交わることが必要だから, $k>0$ である。

したがって, $y=kx^2$ と $y=a^2-x^2$ の交点の y 座標は,

連立方程式 $\begin{cases} y=kx^2 & (k>0) \\ y=a^2-x^2 \end{cases}$ を解くことにより $y=\dfrac{k}{k+1}a^2$

よって,

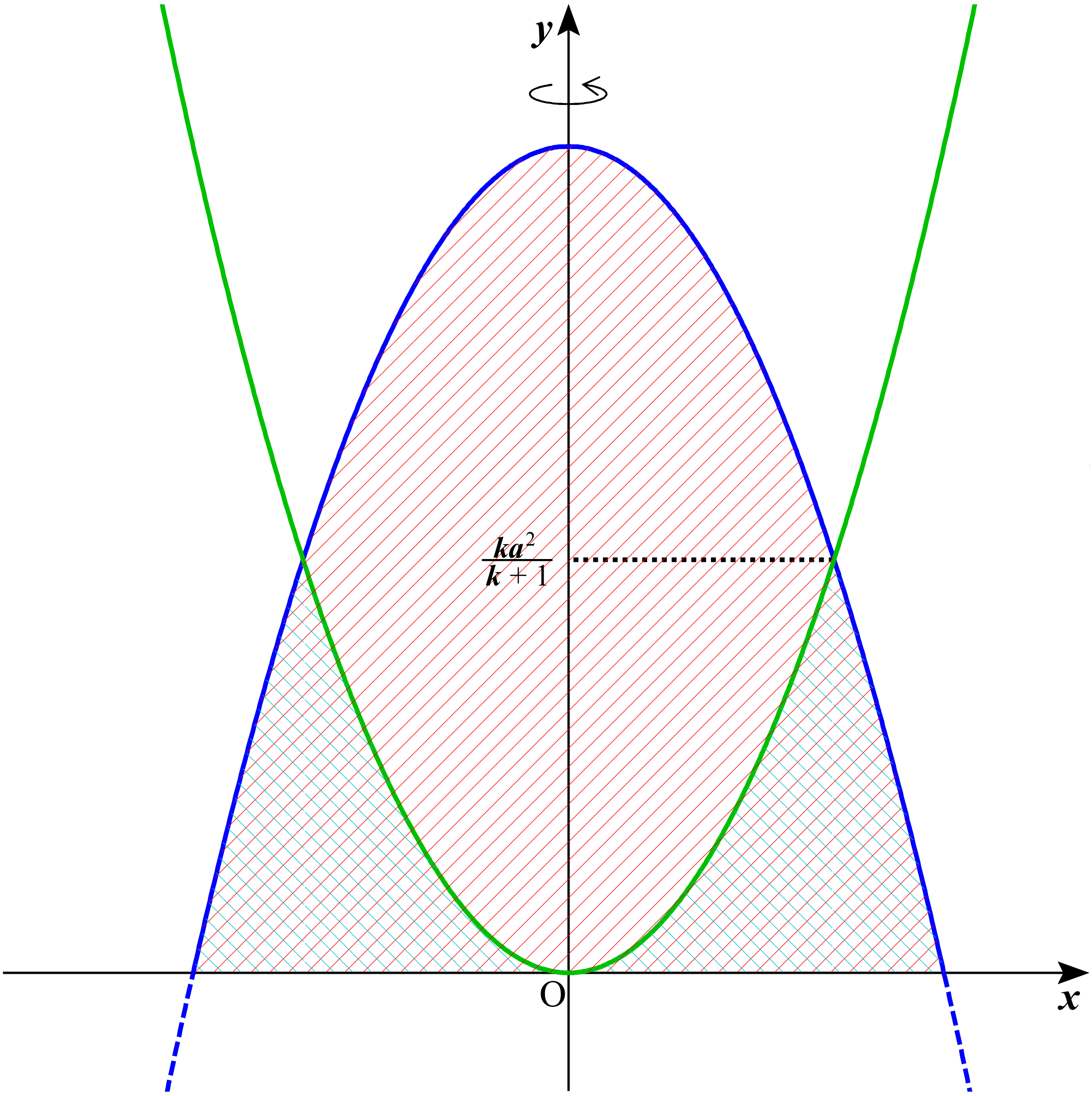
$$V_1=\pi\int_0^{\frac{k}{k+1}a^2}\left(a^2-y\right)dy-\pi\int_0^{\frac{k}{k+1}a^2}\frac{y}{k}dy$$
$$=\pi\int_0^{\frac{k}{k+1}a^2}\left(a^2-\frac{k+1}{k}y\right)dy$$
$$=\pi\left[a^2y-\frac{k+1}{2k}y^2\right]_0^{\frac{k}{k+1}a^2}$$
$$=\frac{k}{2(k+1)}a^4\pi$$

続いて, k の値を求める。

条件より, $V_0=2V_1$ だから, $\dfrac{a^4}{2}\pi=\dfrac{k}{k+1}a^4\pi$

よって, $\dfrac{k}{k+1}=\dfrac{1}{2}$

ゆえに, $k=1$



y
ka²/(k + 1)
O
x

472

解法のポイント

1. 回転軸の傾きが$45°$ $(y=x)$だから, 直角二等辺三角形の性質を利用して要領よく処理する。

2. 回転軸上の位置をtとし，回転半径を$r(t)$で表すと，$\alpha \leq t \leq \beta$のとき$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{r(t)\}^2 dt$

ここで，$r(t)=v(x)$，$t=u(x)$，また，$t=u(x)$から$t=\alpha \Rightarrow x=p,\ t=\beta \Rightarrow x=q$とすると，

$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}\{r(t)\}^2 dt=\pi\int_{p}^{q}\{v(x)\}^2\{u(x)\}' dx$

解

$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$と$y=x$の交点は，連立方程式$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x \\ y=x \end{cases}$の解より，$(x,\ y)=(0,\ 0),\ \left(2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\right)$

したがって，点$\mathrm{P}\left(x,\ \dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)$から$y=x$に下ろした垂線の足をH，$\mathrm{OH}=t$とすると，

$0 \leq t \leq 4$より，$V=\pi\int_0^4 \mathrm{PH}^2 dt$　・・・①

ここで，点$\mathrm{Q}(x,\ x)$とすると，△PHQは∠H＝90°の直角二等辺三角形だから，

$$\mathrm{PH}=\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}=\frac{x-\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x\right)}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}$$

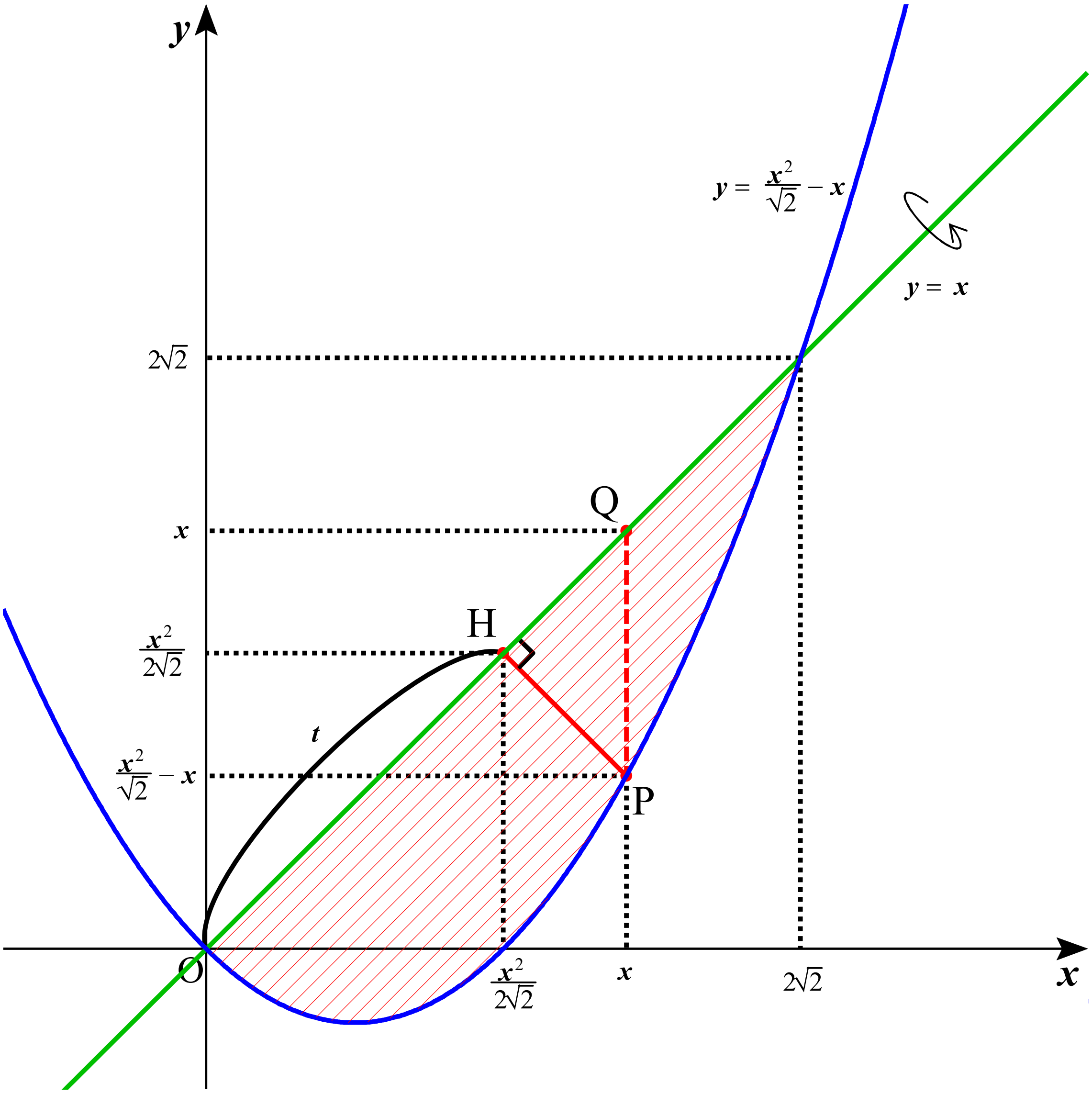
また，Hのx座標は，$x-\dfrac{\mathrm{PH}}{\sqrt{2}}$より，$\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$　$\therefore \mathrm{OH}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{x^2}{2}$

これと$\mathrm{OH}=t$から，$t=\dfrac{x^2}{2}$　$\therefore dt=xdx$　・・・②

また，$t=4 \Rightarrow x=2\sqrt{2},\ t=0 \Rightarrow x=0$　・・・③

よって，①，②，③より，

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^4 \mathrm{PH}^2 dt \\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x-\frac{x^2}{2}\right)^2 xdx \\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(2x^3-\sqrt{2}x^4+\frac{x^5}{4}\right)dx \\
&=\pi\left[\frac{x^4}{2}-\frac{\sqrt{2}}{5}x^5+\frac{x^6}{24}\right]_0^{2\sqrt{2}} \\
&=\frac{32}{15}\pi
\end{aligned}$$


y
x
O
$y=\frac{x^2}{\sqrt{2}}-x$
$y=x$
$2\sqrt{2}$
x
$\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$
$\frac{x^2}{\sqrt{2}}-x$
Q
H
P
t
$\frac{x^2}{2\sqrt{2}}$
x
$2\sqrt{2}$

別解

解法のポイント

曲線と直線を $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動すると，直線 $y=x$ は x 軸に移動する。

また，移動後の曲線を媒介変数 t を用いて $(x,\ y)=(v(t),\ u(t))$ で表されたとすると，
求める体積は曲線 $(x,\ y)=(v(t),\ u(t))$ を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積と等しい。

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}y^2dx=\pi\int_{p}^{q}\{u(t)\}^2v'(t)dt$$

回転移動の原理

原点を O とする xy 直交座標平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{OP}=r\ \left(r=\sqrt{x^2+y^2}\right)$，

OP と x 軸正方向とのなす角を α とすると，$(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$
よって，点 P を O のまわりに θ 回転移動した点を $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{aligned}(X,\ Y)&=(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))\\&=(r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta)\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ y\cos\theta+x\sin\theta)\\&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)\end{aligned}$$

解

$y=x$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動すると，$y=0$ （x 軸）　・・・①　となる。

また，$(x,\ y)$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した点を $(X,\ Y)$ とすると，

$$\begin{aligned}X&=x\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-y\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y&=x\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+y\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\&=-\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

だから，

$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ 上の点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right)$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した点は

$\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right),\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{t^2}{\sqrt{2}}-t\right)\right)=\left(\dfrac{t^2}{2},\ \dfrac{t^2}{2}-\sqrt{2}t\right)$ となる。

したがって，$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した曲線の媒介変数表示は

$x=\dfrac{t^2}{2},\ y=\dfrac{t^2}{2}-\sqrt{2}t$　・・・②

①，②より，曲線②と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積も V となるから，この体積を求めればよい。

ここで，②について，$y=\dfrac{t^2}{2}-\sqrt{2}t=\dfrac{t}{2}\left(t-2\sqrt{2}\right)$ より，$0\le t\le 2\sqrt{2}$ のとき $y\le 0$，

$t=0\Rightarrow x=0,\ t=2\sqrt{2}\Rightarrow x=4$，　$dx=tdt$ だから，

求める体積は

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^4 y^2dx\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^2}{2}-\sqrt{2}t\right)^2 tdt\\
&=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(\frac{t^5}{4}-\sqrt{2}t^4+2t^3\right)dt\\
&=\pi\left[\frac{t^6}{24}-\frac{\sqrt{2}}{5}t^5+\frac{t^4}{2}\right]_0^{2\sqrt{2}}\\
&=\frac{32}{15}\pi
\end{aligned}
$$

補足： $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転移動した曲線の式を $x,\ y$ で表してみる。

回転移動の原理（http://www.toitemita.sakura.ne.jp/4step/n4step3-8-1.pdf　20 ページ参照）

原点を O とする xy 直交座標平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，

OP と x 軸正方向とのなす角を，反時計回りを正とし，α とすると，

$(x,\ y)=(r\cos\alpha,\ r\sin\alpha)$

したがって，点 P を O のまわりに θ 回転移動した点を点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とすると，

$$
\begin{aligned}
(X,\ Y)&=(r\cos(\alpha+\theta),\ r\sin(\alpha+\theta))\\
&=(r\cos\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta,\ r\sin\alpha\cos\theta+r\cos\alpha\sin\theta)\\
&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ y\cos\theta+x\sin\theta)\\
&=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta)
\end{aligned}
$$

点 P は点 Q を O のまわりに $-\theta$ 回転移動した点だから，

これより，$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$

点 P は点 Q を O のまわりに $-\theta$ 回転移動した点だから，

これより，$(x,\ y)=(X\cos\theta+Y\sin\theta,\ -X\sin\theta+Y\cos\theta)$

$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$ より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}},\ \dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)$

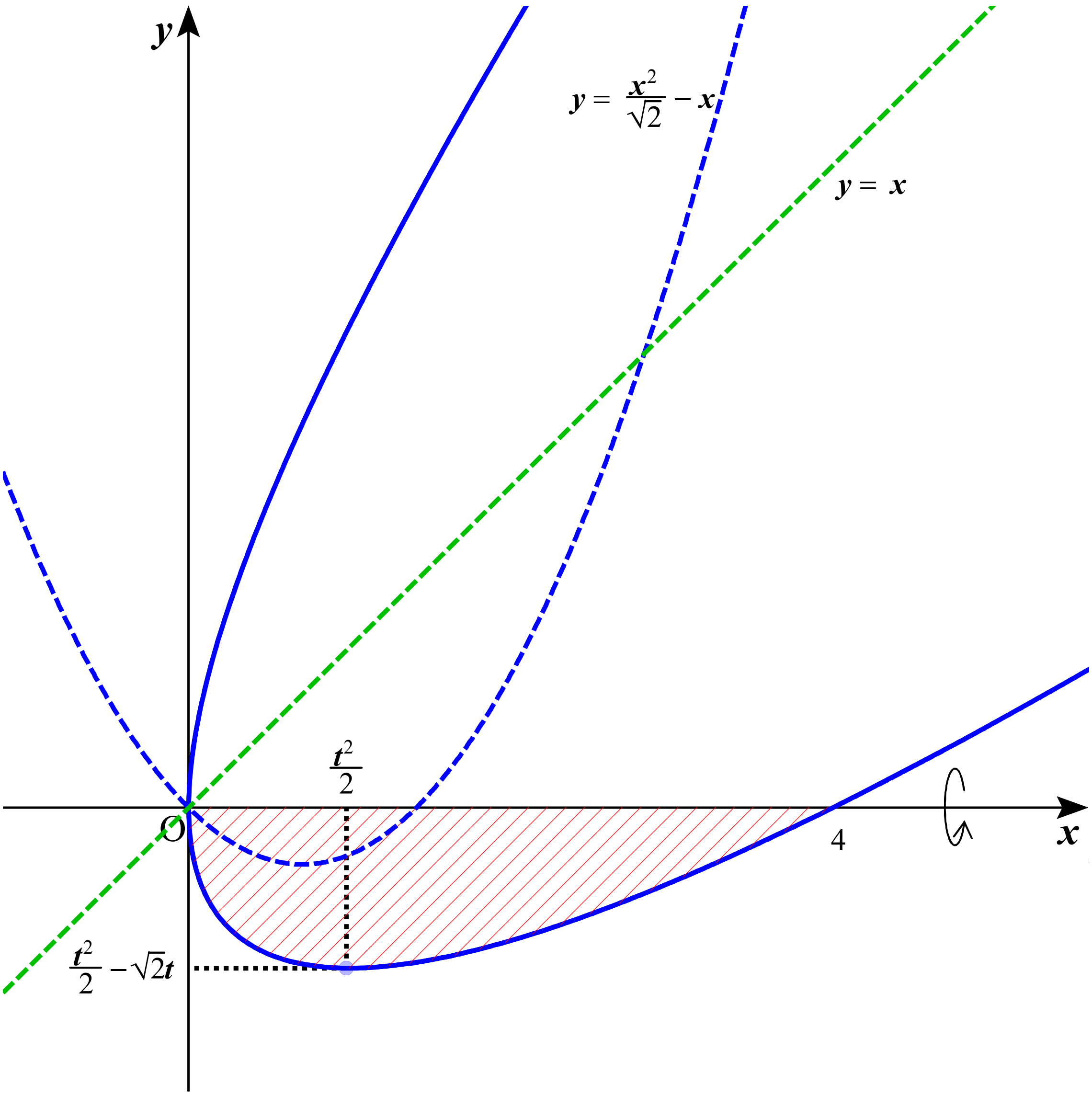
これと $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}-x$ より，$\dfrac{X}{\sqrt{2}}+\dfrac{Y}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(\dfrac{X}{\sqrt{2}}-\dfrac{Y}{\sqrt{2}}\right)$

これを整理し，$X,\,Y$ をそれぞれ $x,\,y$ に書き替えると，$(x-y)^2-4x=0$ となる。

また，これより，$y=x\pm 2\sqrt{x}$ が得られるから，

これと x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めてもよい。

しかし，媒介変数曲線で扱うほうが楽に求積できるので，この求積は省略した。



473

(1)

解法 1

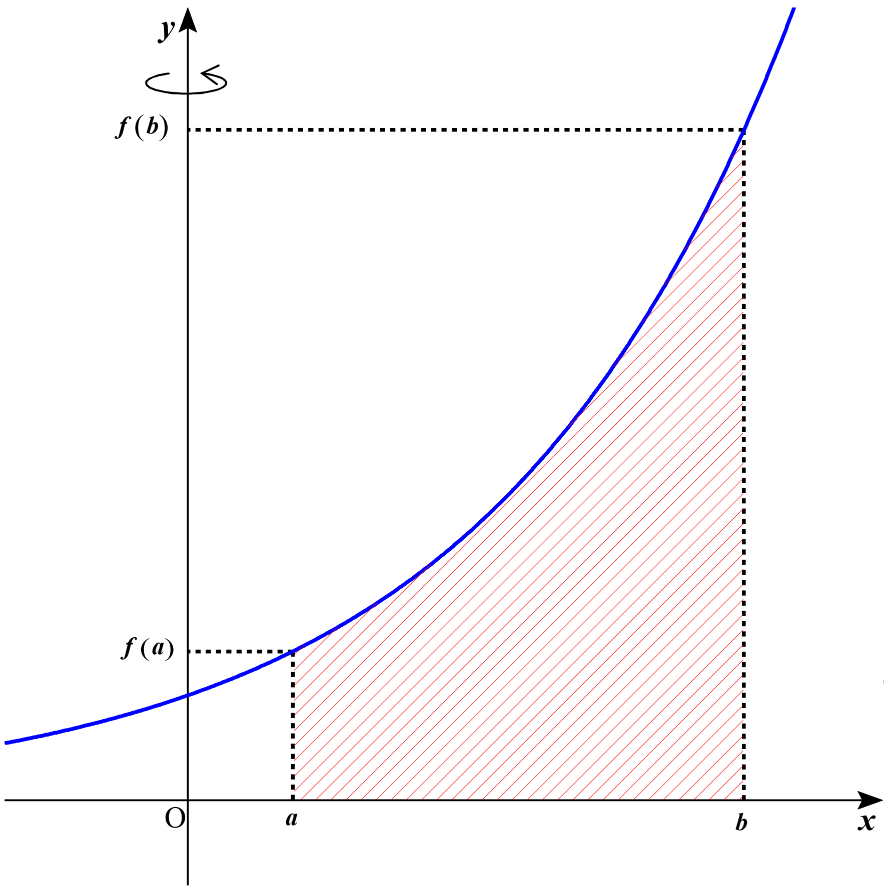
$y=f(x)$ とすると，$V=\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-\pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy$

ここで，$dy=f'(x)dx$，$y=f(b) \Rightarrow x=b$, $y=f(a) \Rightarrow x=a$ より，

$$\pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy=\pi\int_a^b x^2 f'(x)dx$$
$$=\pi\left\{\left[x^2 f(x)\right]_a^b-\int_a^b 2xf(x)dx\right\}$$
$$=\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-2\pi\int_a^b xf(x)dx$$

よって，

$$V=\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-\pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2 dy$$
$$=\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-\left\{\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-2\pi\int_a^b xf(x)dx\right\}$$
$$=2\pi\int_a^b xf(x)dx$$



解法 2：区分求積法

閉区間$[a,\ b]$をn等分したときの任意の 1 区画

すなわち

$\left(a+\dfrac{b-a}{n}k,\ f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right)$, $\left(a+\dfrac{b-a}{n}k,\ 0\right)$, $\left(a+\dfrac{b-a}{n}(k+1),\ 0\right)$,

$\left(a+\dfrac{b-a}{n}(k+1),\ f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right)$

を頂点とする四角形をy軸の周りに 1 回転させたときの体積は,

底面積$\pi\left\{a+\dfrac{b-a}{n}(k+1)\right\}^2$, 高さ$f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$の直円柱と

底面積$\pi\left\{a+\dfrac{b-a}{n}k\right\}^2$, 高さ$f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)$の直円柱の体積の差より,

$$\begin{aligned}
&\pi\left\{a+\frac{b-a}{n}(k+1)\right\}^2 f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)-\pi\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)^2 f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&\quad=\pi\left\{a+\frac{b-a}{n}(k+1)-\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}\left\{a+\frac{b-a}{n}(k+1)+\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&\quad=\pi\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\left\{2a+\frac{b-a}{n}(2k+1)\right\}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&\quad=2\pi\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\left\{a+\frac{b-a}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
V&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi\cdot\frac{b-a}{n}\left\{a+\frac{b-a}{n}\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+\frac{b-a}{2n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}\\
&=2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)+2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&=2\pi\int_a^b xf(x)dx+2\pi\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\\
&=2\pi\int_a^b xf(x)dx+2\pi\cdot0\cdot\int_a^b f(x)dx\\
&=2\pi\int_a^b xf(x)dx
\end{aligned}$$

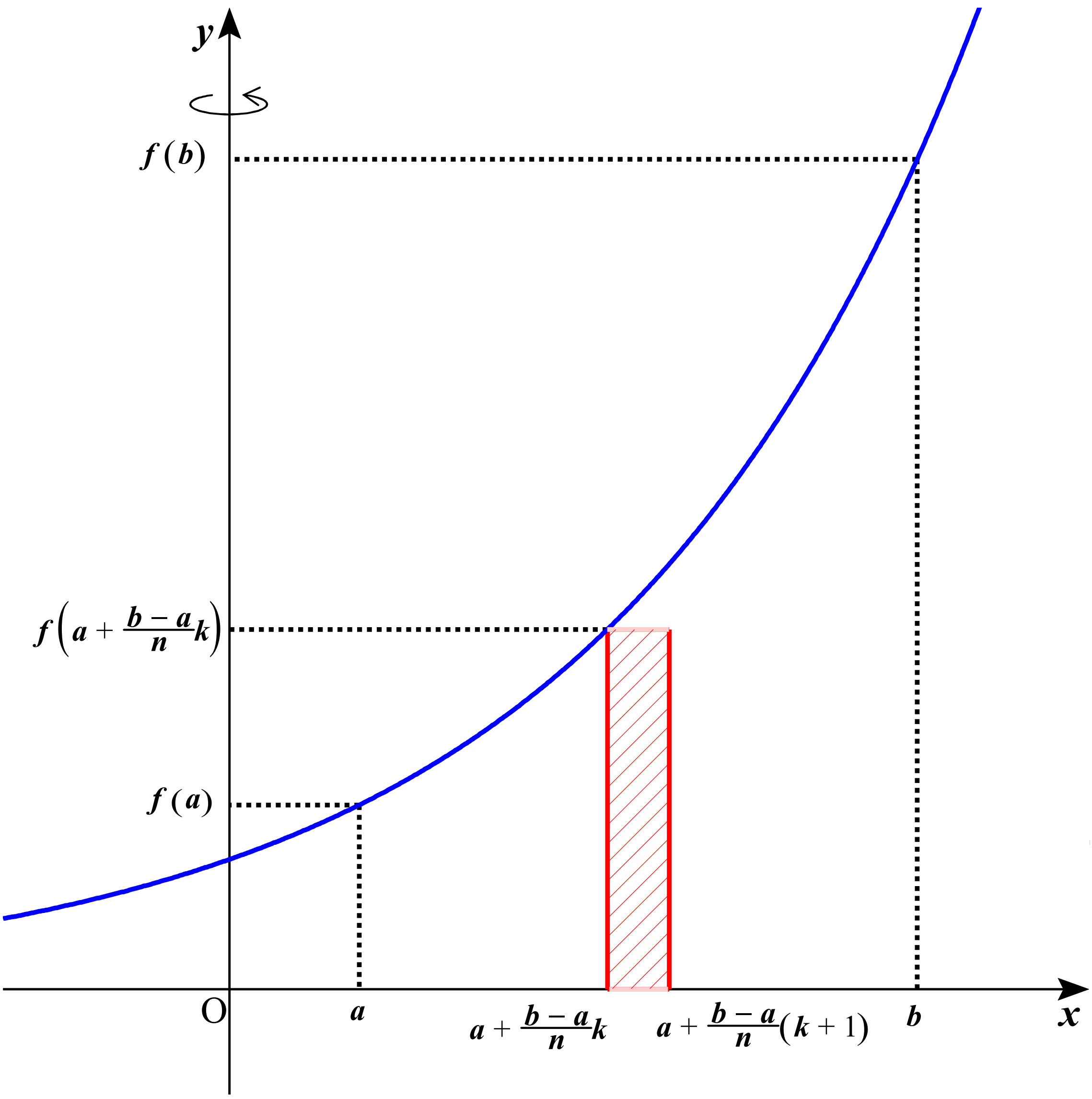
また，この結果から，$V=2\pi\int_a^b xf(x)dx$が成り立つためには,

$y=f(x)$が$a\leq x\leq b$で$f(x)$が単調増加する必要はなく,

$f(x)\geq0$でありさえすればよいことがわかる。

補足

$a+\dfrac{b-a}{n}k=x$ とおくと， $a+\dfrac{b-a}{n}\leq x\leq a+\dfrac{b-a}{n}\cdot n=b \xrightarrow{n\to\infty} a\leq x\leq b$



(2)

$$2\pi\int_0^4 x\left(-x^2+4x\right)dx=2\pi\int_0^4\left(-x^3+4x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{4}{3}x^3\right]_0^4$$
$$=\frac{128}{3}\pi$$