積分法の応用 4　速度と道のり

478

位置変化

$$\int_0^4 \left(t^2 - 2\sqrt{t}\right)dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}t\sqrt{t}\right]_0^4$$
$$= \frac{32}{3}$$

道のり（移動距離）

$0 \leq t \leq 4$ において，$t^2 - 2\sqrt{t} = \sqrt{t}\left(t\sqrt{t} - 2\right)$ より，$\left|t^2 - 2\sqrt{t}\right| = \begin{cases} t^2 - 2\sqrt{t} & \left(\sqrt[3]{4} \leq t \leq 4\right) \\ -t^2 + 2\sqrt{t} & \left(0 \leq t \leq \sqrt[3]{4}\right) \end{cases}$

よって，

$$\int_0^4 \left|t^2 - 2\sqrt{t}\right| dt = \int_{\sqrt[3]{4}}^4 \left(t^2 - 2\sqrt{t}\right)dt + \int_0^{\sqrt[3]{4}} \left(-t^2 + 2\sqrt{t}\right)dt$$
$$= \int_{\sqrt[3]{4}}^4 \left(t^2 - 2\sqrt{t}\right)dt + \int_{\sqrt[3]{4}}^0 \left(t^2 - 2\sqrt{t}\right)dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}t\sqrt{t}\right]_{\sqrt[3]{4}}^4 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}t\sqrt{t}\right]_{\sqrt[3]{4}}^0$$
$$= \frac{32}{3} - 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$$
$$= \frac{40}{3}$$

479

(1)

x 軸方向の速さ $= \left|\dfrac{dx}{dt}\right| = e^{\sqrt{3}t}\left(\sqrt{3}\cos t - \sin t\right)$，　y 軸方向の速さ $= \left|\dfrac{dy}{dt}\right| = e^{\sqrt{3}t}\left(\sqrt{3}\sin t + \cos t\right)$

$$\therefore \left|\vec{v}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4e^{2\sqrt{3}t}} = 2e^{\sqrt{3}t}$$

(2)

$$\int_0^{2\pi} \left|\vec{v}\right| dt = \int_0^{2\pi} 2e^{\sqrt{3}t}\,dt$$
$$= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(e^{2\sqrt{3}\pi} - 1\right)$$

480

最高点に達するまでの時間

最高点での速度は 0 なので，$30-10t=0$ より，3 秒後

最高点の高さ

$$\begin{aligned}\int_0^3 |v|dt &= \int_0^3 (30-10t)dt \\ &= \left[30t-5t^2\right]_0^3 \\ &= 45\end{aligned}$$

よって，45m

481

(1)

点 P が座標$(27,\ 9)$を通る時刻は，

$$(x,\ y)=\left(\frac{t^3}{3}+2t^2,\ \frac{2}{3}t^3-t^2\right),\quad (x,\ y)=(27,\ 9)\text{ より，}\begin{cases}\dfrac{t^3}{3}+2t^2=27 \\ \dfrac{2}{3}t^3-t^2=9\end{cases}\quad \therefore t=3$$

これと x 軸方向の速度$=\dfrac{dx}{dt}=t^2+4t$，y 軸方向の速度$=\dfrac{dy}{dt}=2t^2-2t$ より，

$t=3$ における速度，すなわち点 P が座標$(27,\ 9)$を通るときの速度は，$(21,\ 12)$

(2)

点 P の速さ$=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(t^2+4t\right)^2+\left(2t^2-2t\right)^2}=\sqrt{5}t\left(t^2+4\right)^{\frac{1}{2}}$

よって，

$$\begin{aligned}l &= \sqrt{5}\int_0^a t\left(t^2+4\right)^{\frac{1}{2}}dt \\ &= \sqrt{5}\left[\frac{1}{3}\left(t^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\left\{\left(a^2+4\right)^{\frac{3}{2}}-8\right\}\end{aligned}$$