

積分法の応用 発展 微分方程式

482

(1)

$$dy = (2x+1)dx \text{ より, } \int dy = \int (2x+1)dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $y = x^2 + x + C$

(2)

$$dy = \cos kx dx \text{ より, } \int dy = \int \cos kx dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $y = \frac{1}{k} \sin kx + C$

(3)

$$dy = \frac{2}{x} dx \text{ より, } \int dy = \int \frac{2}{x} dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $y = 2 \log|x| + C$

(4)

$$dy = e^{kx} dx \text{ より, } \int dy = \int e^{kx} dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $y = \frac{1}{k} e^{kx} + C$

483

(1)

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \text{ より, } \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $\log|y| = \log|x| + C$

これより $|y| = e^C |x|$, すなわち $y = \pm e^C x$

ここで, $\pm e^C = A$ とおくと, $y = Ax$ ($A \neq 0$)

(2)

$$y dy = (1-x) dx \text{ より, } \int y dy = \int (1-x) dx$$

よって, 任意の積分定数を C とすると, $\frac{1}{2} y^2 = -\frac{1}{2} x^2 + x + C$

これより $x^2 + y^2 - 2x - 2C = 0$

ここで, $-2C = A$ とおくと, $x^2 + y^2 - 2x + A = 0$

(3)

【1】 $y=1$ のとき $y'=0$ だから, $xy'+1=y$ を満たす。よって, $y=1$ は微分方程式 $xy'+1=y$ の解である。【2】 $y \neq 1$ のとき $xy'=y-1 \neq 0$ より, 与式は $\frac{1}{y-1}dy = \frac{1}{x}dx$ と変形できる。

$$\text{よって, } \int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

ゆえに, 任意の積分定数を C とすると, $\log|y-1| = \log|x| + C$ これより $|y-1| = e^C|x|$, すなわち $y-1 = \pm e^C x$ ここで $\pm e^C = A$ とおいて, 式を整理すると, $y = Ax + 1$ ($A \neq 0$)【1】 は $y = Ax + 1$ に $A = 0$ を代入しても得られるから,【1】 と 【2】 をまとめて, $y = Ax + 1$ (A は任意の定数)

(4)

【1】 $y=1$ のとき $\frac{dy}{dx} = 0$ だから, $(x-1)\frac{dy}{dx} + (y-1) = 0$ を満たす。よって, $y=1$ は微分方程式 $(x-1)\frac{dy}{dx} + (y-1) = 0$ の解である【2】 $y \neq 1$ のとき $-(x-1)\frac{dy}{dx} = y-1 \neq 0$ より, 与式は $\frac{1}{y-1}dy = -\frac{1}{x-1}dx$ と変形できる。

$$\text{よって, } \int \frac{1}{y-1} dy = -\int \frac{1}{x-1} dx$$

ゆえに, 任意の積分定数を C とすると, $\log|y-1| = \log\frac{1}{|x-1|} + C$ これより $|y-1| = \frac{e^C}{|x-1|}$, すなわち $y = \frac{\pm e^C}{x-1} + 1$ ここで $\pm e^C = A$ とおくと, $y = \frac{A}{x-1} + 1$ ($A \neq 0$)【1】 は $y = \frac{A}{x-1} + 1$ に $A = 0$ を代入しても得られるから,【1】 と 【2】 をまとめて, $y = \frac{A}{x-1} + 1$ (A は任意の定数)

(5)

【1】 $y=0$ のとき $y'=0$ だから, $(1-x^2)y'+xy=0$ を満たす。よって, $y=0$ は微分方程式 $(1-x^2)y'+xy=0$ の解である。【2】 $y \neq 0$ のとき $(1-x^2)y'+xy=0$ より $x \neq \pm 1$ だから, $(1-x^2)y'+xy=0$ を変形すると,

$$\frac{1}{y} dy = \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$\text{よって, } \int \frac{1}{y} dy = \int \frac{x}{x^2-1} dx$$

$$\text{ゆえに, 任意の積分定数を } C \text{ とすると, } \log|y| = \frac{1}{2} \log|x^2-1| + C$$

$$\text{これより } |y| = e^C \sqrt{|x^2-1|}, \text{ すなわち } y = \pm e^C \sqrt{|x^2-1|}$$

$$\text{ここで } \pm e^C = A \text{ とおくと, } y = A\sqrt{|x^2-1|} \quad (A \neq 0)$$

【1】 は $y = A\sqrt{|x^2-1|}$ に $A=0$ を代入しても得られるから,【1】 と 【2】 をまとめて, $y = A\sqrt{|x^2-1|}$ (A は任意の定数)

484

(1)

$$\frac{dy}{dx} = (2x-1)^3 \text{ より, } dy = (2x-1)^3 dx$$

$$\text{よって, } \int dy = \int (2x-1)^3 dx$$

$$\text{ゆえに, 積分定数を } C \text{ とすると, } y = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + C$$

$$x=0 \text{ のとき } y=1 \text{ だから, } 1 = \frac{1}{8} + C \quad \therefore C = \frac{7}{8}$$

$$\text{したがって, 微分方程式の解は } y = \frac{1}{8}(2x-1)^4 + \frac{7}{8}$$

(2)

$$(2-x)\frac{dy}{dx}=1 \text{ より, } dy=-\frac{1}{x-2}dx$$

$$\text{よって, } \int dy = -\int \frac{1}{x-2} dx$$

$$\text{ゆえに, 積分定数を } C \text{ とすると, } y = -\log|x-2| + C$$

$$x=1 \text{ のとき } y=0 \text{ だから, } 0 = \log 1 + C \quad \therefore C=0$$

$$\text{したがって, 微分方程式の解は } y = -\log|x-2|$$

(3)

$y=0$ を解とすると, $x=0$ のとき $y=1$ であることに反するから, $y=0$ は解でない。

$$\text{したがって, } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cos x}{(\sin x + 1)^2} \text{ は } \frac{1}{y^2} dy = \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} dx \text{ と変形でき,}$$

$$\text{これより, } \int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} dx$$

$$\text{よって, 積分定数を } C \text{ とすると, } -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sin x + 1} + C$$

$$x=0 \text{ のとき } y=1 \text{ だから, } -1 = -1 + C \quad \therefore C=0$$

$$\text{ゆえに, } \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin x + 1}$$

$$\text{よって, 微分方程式の解は } y = \sin x + 1$$

485

(1)

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \{e^x f(x)\}' \\
 &= (e^x)' f(x) + e^x f'(x) \\
 &= e^x f(x) + e^x f'(x) \\
 &= e^x \{f(x) + f'(x)\} \\
 &= e^x \cdot 4xe^{-x} \sin 2x \\
 &= 4x \sin 2x
 \end{aligned}$$

(2)

$$(1)より, \int g'(x) = 4 \int x \sin 2x dx$$

したがって, 積分定数を C とすると,

$$\begin{aligned}
 g(x) &= 4 \int x \sin 2x dx \\
 &= 4 \int x \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right)' dx \\
 &= 4 \left\{ x \cdot \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right\} \\
 &= 4 \left(-\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) + C \\
 &= -2x \cos 2x + \sin 2x + C
 \end{aligned}$$

ここで, $f(0)=0$ より, $g(0)=0$

これと $g(0)=C$ から, $C=0$

よって, $g(x) = -2x \cos 2x + \sin 2x$

ゆえに,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x} g(x) \\
 &= e^{-x} (-2x \cos 2x + \sin 2x)
 \end{aligned}$$

486

(1)

与式より, $x \neq 0, y \neq 0, u \neq 0$ である。

等式左辺について,

$$\frac{y}{x} = u \text{ より, } y = xu$$

ここで, u は x と y の 2 変数関数だから, $u = f(x, y)$ とおくと, $y = xf(x, y)$
 $y, xf(x, y), x, f(x, y)$ を x について微分したものを

それぞれ $y', \{xf(x, y)\}', x', f'(x, y)$ と表すことにし,

$y = xf(x, y)$ の両辺を x について微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= \{xf(x, y)\}' \\ &= x'f(x, y) + xf'(x, y) \\ &= f(x, y) + xf'(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに, } \frac{dy}{dx} = u + x \cdot \frac{du}{dx} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{上記の内容を簡単に記述すると,} \\ \frac{y}{x} = u \text{ より, } y = xu \\ \text{この両辺を } x \text{ について微分すると,} \\ \frac{dy}{dx} = \frac{d(xu)}{dx} \\ \quad = \frac{dx}{dx} \cdot u + x \cdot \frac{du}{dx} \\ \quad = u + x \cdot \frac{du}{dx} \end{array} \right)$$

$$\text{等式右辺について, } \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = u + \frac{1}{u} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } u + x \cdot \frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u}, \text{ すなわち } x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$

$$\text{これより } udu = \frac{1}{x} dx$$

$$\text{よって, } \int udu = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\text{ゆえに, 任意の積分定数を } C \text{ とすると, } \frac{1}{2}u^2 = \log|x| + C, \text{ すなわち } \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{x^2} = \log|x| + C$$

$$\text{したがって, 求める微分方程式の解は } y^2 = 2x^2(\log|x| + C)$$

(2)

 $y = z - x$ より,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d(z-x)}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - \frac{dx}{dx} \\ &= \frac{dz}{dx} - 1\end{aligned}$$

これと $\frac{dy}{dx} = z$ より, $\frac{dz}{dx} - 1 = z$ 【1】 $z = -1$ のとき $\frac{dz}{dx} = 0$ だから, $\frac{dz}{dx} - 1 = z$ を満たす。よって, $z = -1$ は微分方程式 $\frac{dz}{dx} - 1 = z$ の解である。【2】 $z \neq -1$ のとき

$$\frac{dz}{dx} - 1 = z \text{ より, } \frac{1}{z+1} dz = dx$$

$$\text{よって, } \int \frac{1}{z+1} dz = \int dx$$

ゆえに, 任意の積分定数を C とすると, $\log|z+1| = x + C$ すなわち $\log|x+y+1| = x + C$ これより, $|x+y+1| = e^C e^x$ すなわち $x+y+1 = \pm e^C e^x$ ここで, $\pm e^C = A$ とおき, 両辺を整理すると, $y = Ae^x - x - 1$ ($A \neq 0$) $y = Ae^x - x - 1$ に $A = 0$ を代入すると, $y = -x - 1$ これと $z = x + y$ から, $z = -1$

よって, 求める微分方程式の解は, 【1】, 【2】 をまとめることにより,

 $y = Ae^x - x - 1$ (A は任意の定数)

487

直線 OP の傾きは $\frac{y}{x}$ だから、条件より、 $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{y}{x}$

$y=0$ は条件を満たさないから $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{y}{x}$ の解でない。

したがって、 $\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{y}{x}$ は $\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$ と変形でき、これより $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx$

よって、積分定数を C とすると、 $\log|y| = \log x^2 + C$ すなわち $y = \pm e^C x^2$

ここで $\pm e^C = A$ とおくと、 $y = Ax^2$ ($A \neq 0$)

条件より、 $x=1$ のときと $y=2$ となるから、 $2 = A$

ゆえに、与えられた条件をすべて満たす曲線の方程式は $y = 2x^2$

488

与式両辺を x について微分すると $\frac{df(x)}{dx} = 2x + 2xf(x)$

$y = f(x)$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = 2x + 2xy$ $\therefore \frac{dy}{dx} = 2x(y+1)$

【1】 $y = -1$ のとき

$\frac{dy}{dx} = 0$ だから、 $\frac{dy}{dx} = 2x(y+1)$ を満たす。

よって、 $y = -1$ は微分方程式 $\frac{dy}{dx} = 2x(y+1)$ の解である。

【2】 $y \neq -1$ のとき

$\frac{dy}{dx} = 2x(y+1)$ より、 $\frac{1}{y+1} dy = 2x dx$ $\therefore \int \frac{1}{y+1} dy = \int 2x dx$

ゆえに、積分定数を C とすると、 $\log|y+1| = x^2 + C$ すなわち $y = \pm e^C e^{x^2} - 1$

ここで $\pm e^C = A$ とおくと、微分方程式の解は $y = Ae^C e^{x^2} - 1$ ($A \neq 0$)

$A=0$ とすると $y = -1$ となるから、微分方程式の解は、【1】、【2】をまとめることにより、

$f(x) = Ae^{x^2} - 1$ (A は任意の定数)

これより $f(1) = Ae - 1$ 、また、与式より $f(1) = 1 + 2 + 2 \int_1^1 f(t) dt = 3$

よって、 $Ae - 1 = 3$ 、すなわち $A = \frac{4}{e}$ ゆえに、 $f(x) = 4e^{x^2-1} - 1$