

積分法の応用 演習問題

74

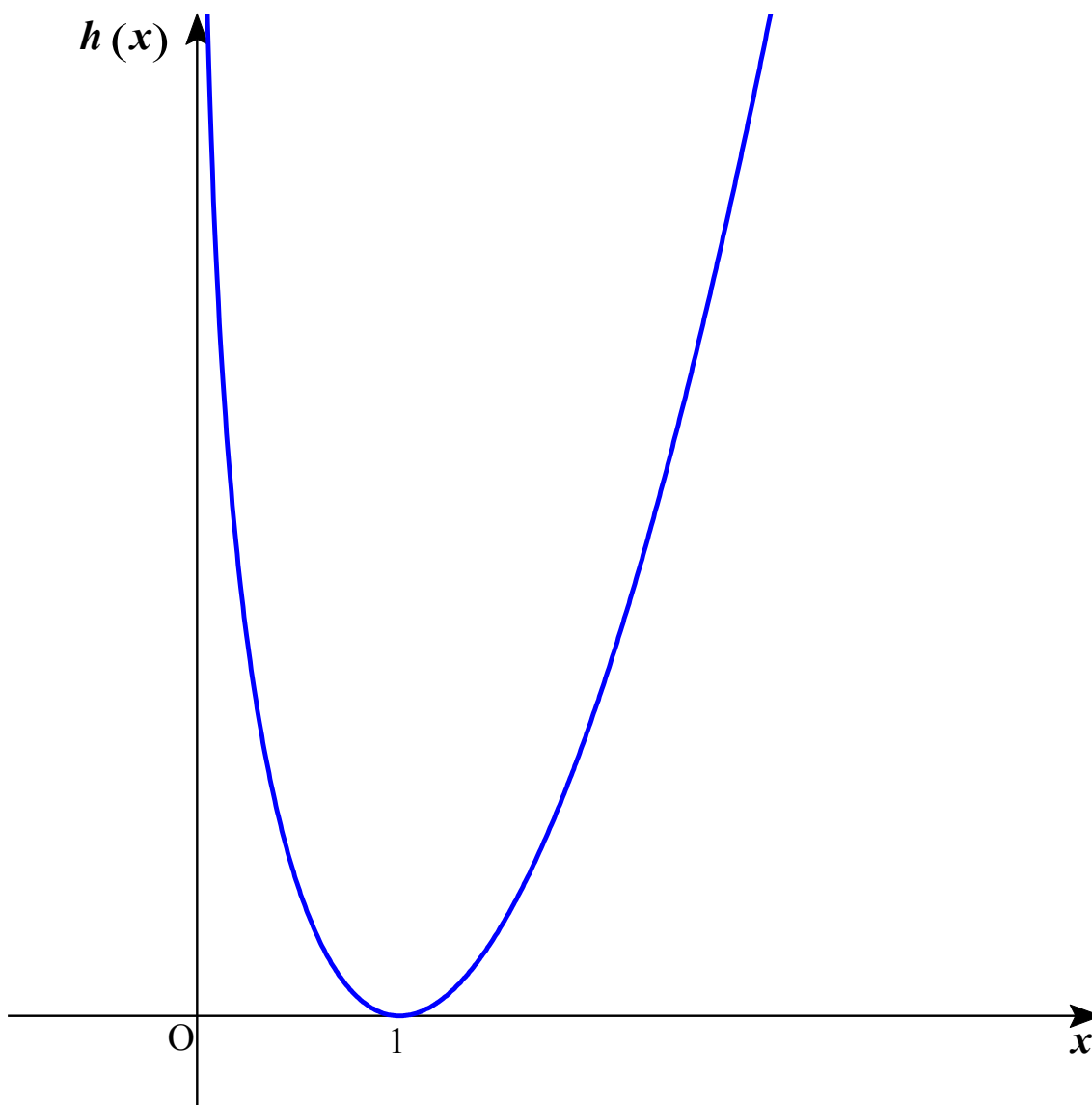
(1)

$h(x) = f(x) - g(x)$ ($x > 0$) とすると,

$h(x) = x^2 - \log x^2 - 1$, $h'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x}$ より, $h(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	...	1	...
$h'(x)$	/	-	0	+
$h(x)$	/	↓	0	↑

よって, $x=1$ のとき極小値 0 をとる。



(2)

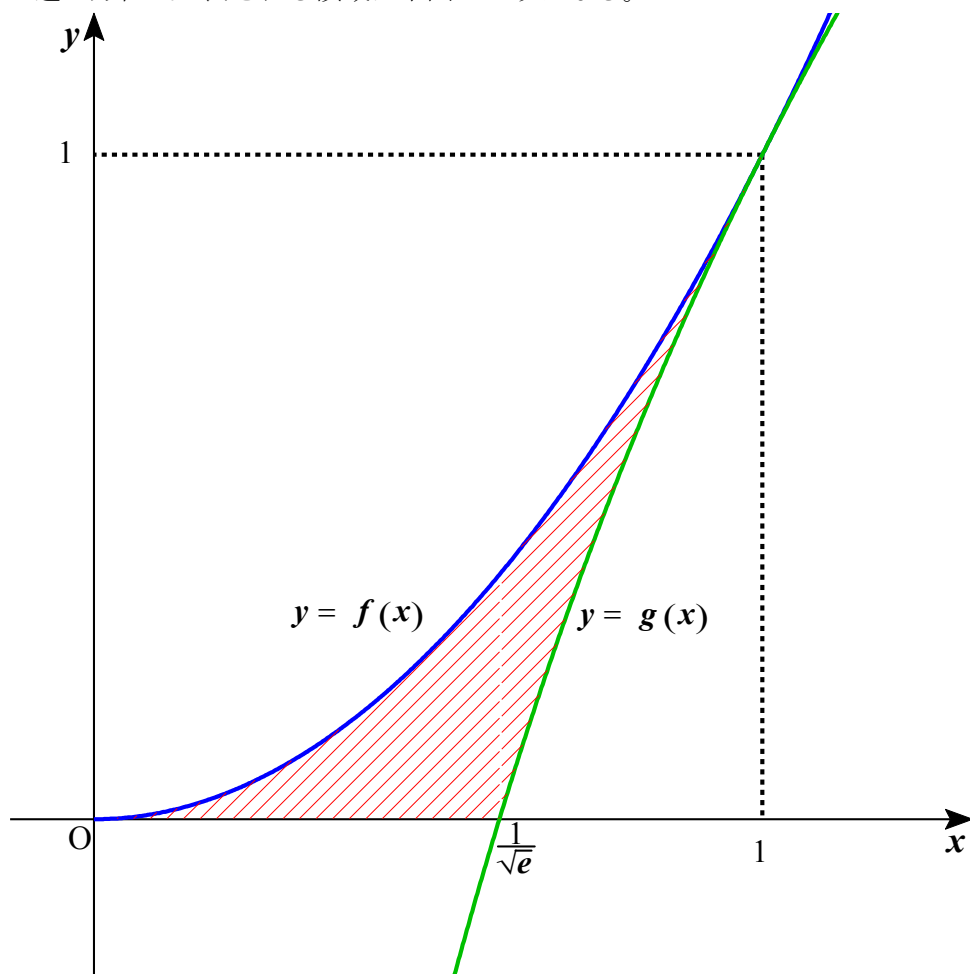
$f(x)=g(x)$ となるのは $h(x)=0$ のときだから $(1, 1)$

(3)

$h(1)=f(1)-g(1)=0$, $h'(1)=f'(1)-g'(1)=0$ より, $f(x)$ と $g(x)$ は点 $(1, 1)$ で接する。

これと $0 < x < 1$, $1 < x$ のとき $h(x) > 0$, すなわち $f(x) > g(x)$ より,

連立方程式で表される領域は下図のようになる。



よって,

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 g(x) dx &= \int_0^1 x^2 dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 (1 + \log x^2) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[x \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 - 2 \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \log x dx \\
 &= -\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{e}} - 2 \left[x \log x - x \right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{e}}
 \end{aligned}$$

75

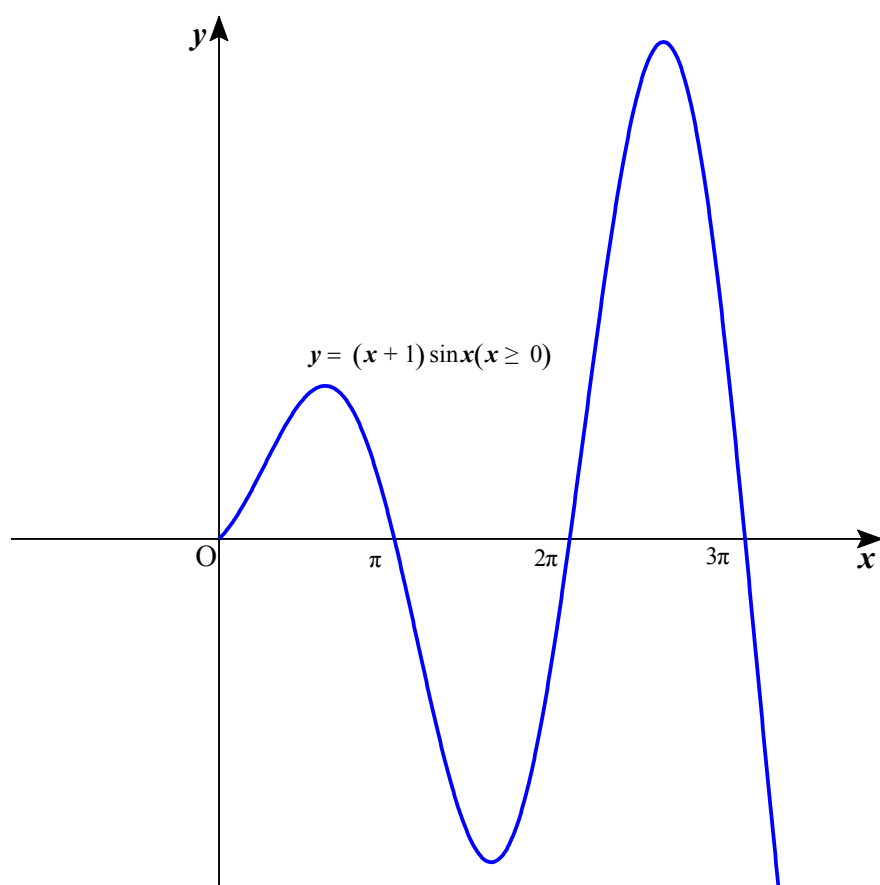
(1)

$$\begin{aligned}
 \int_a^b (x+1) \sin x dx &= \left[-(x+1) \cos x \right]_a^b + \int_a^b \cos x dx \\
 &= -(b+1) \cos b + (a+1) \cos a + [\sin x]_a^b \\
 &= -(b+1) \cos b + (a+1) \cos a + \sin b - \sin a
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left| -(n\pi+1) \cos n\pi + \{(n-1)\pi+1\} \cos(n-1)\pi + \sin n\pi - \sin \{(n-1)\pi\} \right| \\
 &= \left| -(n\pi+1)(-1)^n + \{(n-1)\pi+1\}(-1)^{n-1} \right| \\
 &= \left| -1 \cdot (-1)(n\pi+1)(-1)^{n-1} + \{(n-1)\pi+1\}(-1)^{n-1} \right| \\
 &= \left| \{(n\pi+1) + (n-1)\pi+1\}(-1)^{n-1} \right| \\
 &= |(2n-1)\pi+2|
 \end{aligned}$$

n は正の整数だから, $S_n = (2n-1)\pi+2$



曲線 $y = f(x)$ の概形は $x+1$ と $\sin x$ の積からイメージすればよい。

76

点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ における接線の傾きは, $f'(x) = \sin x + x \cos x$ より, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

これより, その点における法線の方程式は $y = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}$ すなわち $y = -x + \pi$

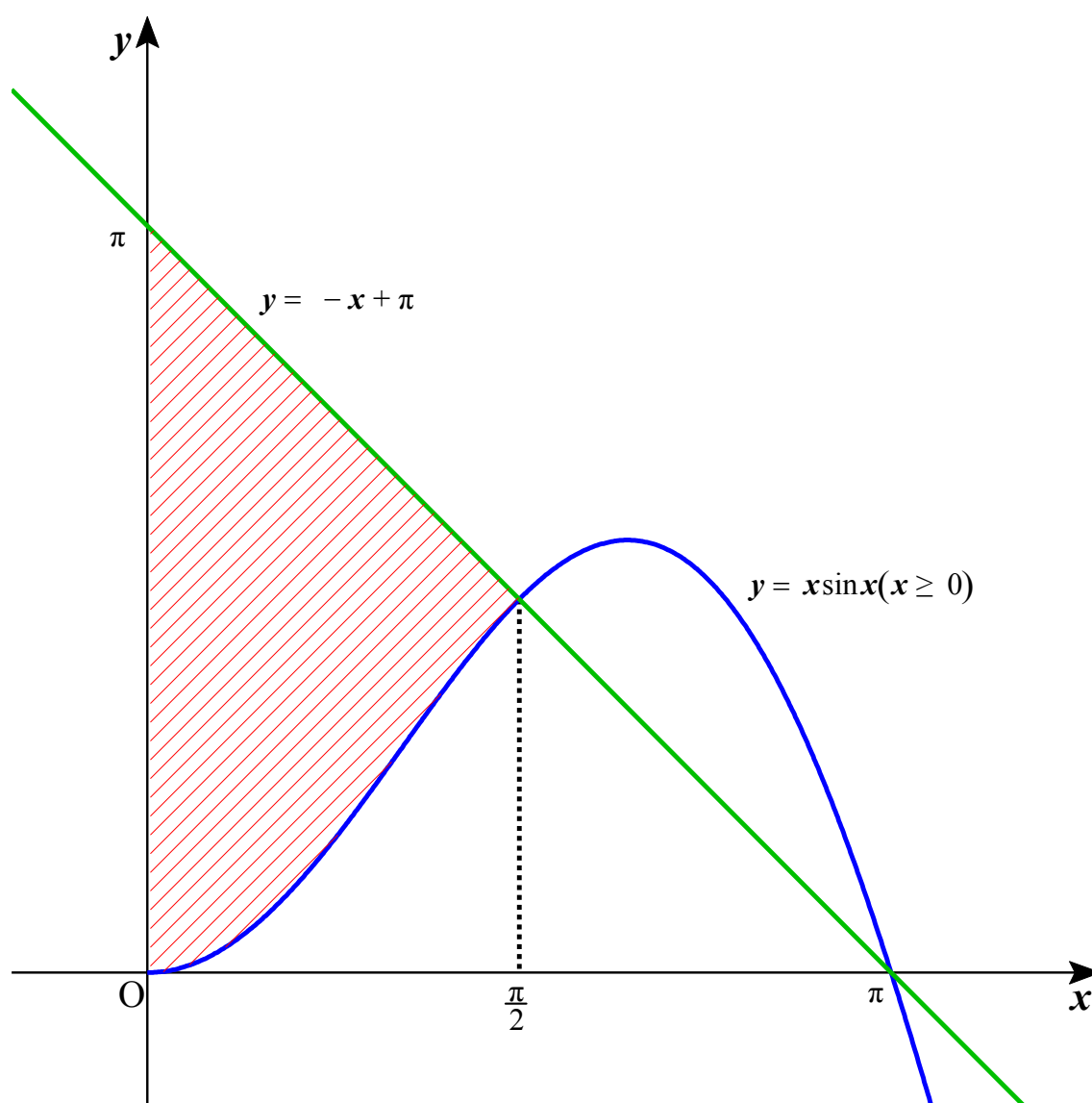
よって, 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi \cdot \pi^2 \cdot (\pi - 0) - \frac{1}{3} \pi \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin x)^2 dx \\ &= \frac{7}{24} \pi^3 - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin^2 x dx \\ &= \frac{7}{24} \pi^3 - \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 (1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{7}{24} \pi^3 - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx \\ &= \frac{13}{48} \pi^3 + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx &= \left[\frac{x^2 \sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx \\ &= \left[\frac{x \cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \\ &= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore V = \frac{13}{48} \pi^3 - \frac{\pi^2}{8}$$



77

(1)

$$\begin{aligned}
 \left\{ x\sqrt{x^2+1} + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \right\}' &= \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{2(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= 2\sqrt{x^2+1}
 \end{aligned}$$

よって, $a=2$, $f(x)=x^2+1$

(2)

求める長さを L とすると,

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2} dx$$

ここで, $2x=t$ とおくと, $dx = \frac{dt}{2}$, $x=1 \Rightarrow t=2$, $x=0 \Rightarrow t=0$ より,

$$\begin{aligned}
 L &= \int_0^2 \sqrt{1+t^2} \frac{dt}{2} \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^2 2\sqrt{t^2+1} dt \\
 &= \frac{1}{4} \left[t\sqrt{t^2+1} + \log\left(t + \sqrt{t^2+1}\right) \right]_0^2 \\
 &= \frac{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})}{4}
 \end{aligned}$$

78

(1)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^t \\ 3e^{3t} - 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

(2)

道のりを L とすると,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{(6e^t)^2 + (3e^{3t} - 3e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{36e^{2t} + 9e^{6t} - 18e^{2t} + 9e^{-2t}} dt \\ &= 3 \int_0^3 \sqrt{2e^{2t} + e^{6t} + e^{-2t}} dt \\ &= 3 \int_0^3 \sqrt{(e^{3t} + e^{-t})^2} dt \\ &= 3 \int_0^3 (e^{3t} + e^{-t}) dt \\ &= 3 \left[\frac{e^{3t}}{3} - e^{-t} \right]_0^3 \\ &= [e^{3t} - 3e^{-t}]_0^3 \\ &= e^9 - 3e^{-3} + 2 \end{aligned}$$

79

(1)

曲線 C の導関数は $y' = \frac{1}{x}$ だから、

接線 l_1 の方程式は、 $y = \frac{1}{t}(x-t) + \log t$ ($t > 1$)、すなわち $y = \frac{1}{t}x - 1 + \log t$ ($t > 1$)

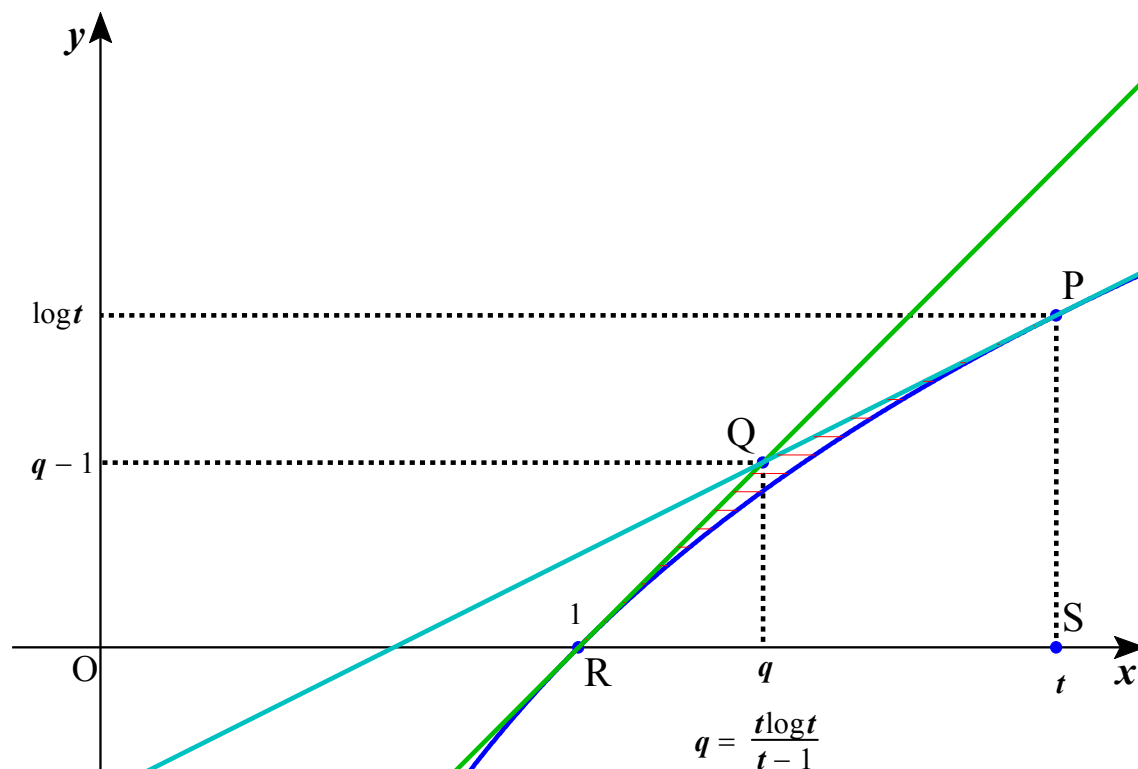
よって、 Q の x 座標は $\frac{1}{t}x - 1 + \log t = x - 1$ ($t > 1$) の解、すなわち $x = \frac{t \log t}{t-1}$

(2)

曲線 C 上の点 $(1, 0)$ における接線の方程式は $y = x - 1$ だから、

直線 l_2 は曲線 C 上の点 $(1, 0)$ における接線である。

よって、2 直線 l_1 、 l_2 と曲線 C で囲まれた部分は下図のようになる。



よって,

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \Delta QRS + \Delta PQS - \int_1^t \log x dx \\
 &= \frac{1}{2}(t-1)(q-1) + \frac{1}{2}(t-q)\log t - [x \log x - x]_1^t \\
 &= \frac{1}{2}\{q(t - \log t - 1) + t \log t - t + 1\} - t \log t + t - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{t \log t}{t-1} \{(t-1) - \log t\} - t \log t + t - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ t - 1 - \frac{t(\log t)^2}{t-1} \right\}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\frac{S(t)}{t-1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - t \left(\frac{\log t}{t-1} \right)^2 \right\}$$

ここで, $f(t) = \log t$ とすると, $f(t)$ は $t > 0$ で微分可能だから,

$$\text{平均値の定理より, } \frac{\log t - \log 1}{t-1} = f'(c) \quad (1 < c < t),$$

すなわち $\frac{\log t}{t-1} = \frac{1}{c} \quad (1 < c < t)$ を満たす c が少なくとも 1 つ存在する。

$$\text{これと } t \rightarrow 1+0 \text{ のとき } c \rightarrow 1+0 \text{ より, } \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\log t}{t-1} = \lim_{c \rightarrow 1+0} \frac{1}{c} = 1$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{S(t)}{t-1} &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 1+0} \left\{ 1 - t \left(\frac{\log t}{t-1} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \lim_{t \rightarrow 1+0} t \cdot \left(\lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\log t}{t-1} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (1 - 1 \cdot 1^2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

補足

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\log t}{t-1} = 1 \text{ の別解}$$

$f(t) = \log t$ とすると, $f(t)$ は $t > 0$ で微分可能で $f'(t) = \frac{1}{t}$ だから,

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\log t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1+0} \frac{\log t - \log 1}{t-1} = f'(1) = 1$$

80

(1)

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ より, } f(x) = \sqrt{2} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{よって, } f(a_n) = \sqrt{2} e^{-\frac{a_n}{2}} \sin\left(a_n + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\text{ここで, } e^{-\frac{a_n}{2}} > 0 \text{ より, } a_n + \frac{\pi}{4} = n\pi, \text{ すなわち } a_n = n\pi - \frac{\pi}{4} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2)

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} \left\{ e^{-\frac{x}{2}} (\cos x + \sin x) \right\}^2 dx \\ &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-x} (1 + \sin 2x) dx \\ &= \pi \left[-e^{-x} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} + \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-x} \sin 2x dx \\ &= \pi \left(-e^{-a_{n+1}} + e^{-a_n} \right) + \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-x} \sin 2x dx \end{aligned}$$

ここで,

$$(e^{-x} \sin 2x)' = -e^{-x} \sin 2x + 2e^{-x} \cos 2x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(e^{-x} \cos 2x)' = -2e^{-x} \sin 2x - e^{-x} \cos 2x \quad \dots \textcircled{2}$$

だから,

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \text{ より, } (e^{-x} \sin 2x)' + 2(e^{-x} \cos 2x)' = -5e^{-x} \sin 2x$$

$$\text{よって, } e^{-x} \sin 2x = -\frac{1}{5} \{e^{-x} (\sin 2x + 2 \cos 2x)\}'$$

これより,

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \left(-e^{-a_{n+1}} + e^{-a_n} \right) + \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} e^{-x} \sin 2x dx \\ &= \pi \left(-e^{-a_{n+1}} + e^{-a_n} \right) - \pi \left[\frac{e^{-x}}{5} (\sin 2x + 2 \cos 2x) \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \\ &= \pi \left\{ e^{-a_n} \left(1 + \frac{\sin 2a_n}{5} + \frac{2 \cos 2a_n}{5} \right) - e^{-a_{n+1}} \left(1 + \frac{\sin 2a_{n+1}}{5} + \frac{2 \cos 2a_{n+1}}{5} \right) \right\} \end{aligned}$$

さらに, ここで,

$$\sin 2a_n = \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\sin 2a_{n+1} = \sin\left\{2(n+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right\} = -1$$

$$\cos 2a_n = \cos\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos 2a_{n+1} = \cos\left\{2(n+1)\pi - \frac{\pi}{2}\right\} = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} V_n &= \pi \left\{ e^{-a_n} \left(1 + \frac{\sin 2a_n}{5} + \frac{2 \cos 2a_n}{5} \right) - e^{-a_{n+1}} \left(1 + \frac{\sin 2a_{n+1}}{5} + \frac{2 \cos a_{n+1}}{5} \right) \right\} \\ &= \pi \left\{ e^{-n\pi + \frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{5} \right) - e^{-(n+1)\pi + \frac{\pi}{4}} \left(1 - \frac{1}{5} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-\pi}) \cdot (e^{-\pi})^n \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-\pi}) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-\pi})^n \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-\pi}) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{-\pi})^k \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-\pi}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\pi} - (e^{-\pi})^{n+1}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (1 - e^{-\pi}) \cdot \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{4}{5} \pi e^{-\frac{3}{4}\pi} \end{aligned}$$

または,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \\
 &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (e^{-k\pi} - e^{-(k+1)\pi}) \\
 &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (e^{-\pi} - e^{-2\pi}) + (e^{-2\pi} - e^{-3\pi}) + \cdots + (e^{-n\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \right\} \\
 &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-\pi} - e^{-(n+1)\pi}) \\
 &= \frac{4}{5} \pi e^{\frac{\pi}{4}} (e^{-\pi} - 0) \\
 &= \frac{4}{5} \pi e^{-\frac{3}{4}\pi}
 \end{aligned}$$

81

(1)

$$\frac{dx}{dt} = 2t, \frac{dy}{dt} = 3t^2 \text{ より, } t \neq 0 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2}t$$

よって、点 (a^2, a^3) ($a \neq 0$) における曲線 C の接線 l_a の方程式は $y = \frac{3}{2}a(x - a^2) + a^3$,

$$\text{すなわち } y = \frac{3}{2}ax - \frac{a^3}{2}$$

(2)

求める長さを L とすると,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 9t^4} dt \\ &= \int_0^1 t(4 + 9t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{array}{cccc} t & \cdots & 0 & \cdots \\ \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) & (-, +) & (0, 0) & (+, +) \\ (x, y) & (\leftarrow, \uparrow) & (0, 0) & (\rightarrow, \uparrow) \end{array}$$

より,

媒介変数 t で表される点は、 t の増加にともない、 xy 座標平面上を第 4 象限を左上方向に原点 $(0, 0)$ まで移動してから第 1 象限を右上方向に移動していく。

$$\text{また, } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{d\left(\frac{3}{2}t\right)}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2t} = \frac{3}{4t} \text{ より,}$$

$t < 0$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ より上に凸, $t > 0$ のとき $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ より下に凸となる。

補足

$(x, y) = (t^2, t^3)$ より, $x^3 = y^2 \geq 0$ だから, 定義域は $x \geq 0$ であり

また, 曲線の概形は, $x^3 = y^2$ より, $y = \pm x^{\frac{3}{2}}$ だから,

$y = x$ ($x \geq 0$) と $y = x^2$ ($x \geq 0$) の中間であることがわかる。

直線 l_1 は曲線 C 上の点 $(1, 1)$ の接線で, その方程式は(1)より $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ である。

したがって, 曲線 C と直線 l_1 の共有点を求めるための t の方程式は,

$$(x, y) = (t^2, t^3) \text{ を } y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \text{ に代入することにより, } t^3 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$$

これを整理すると, $2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$ となり,

さらに, $t = 1$ は $2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$ の重解であることから,

因数分解により, $(t - 1)^2(2t + 1) = 0$ となる。

よって, 方程式の解は $t = 1, -\frac{1}{2}$

ゆえに, 共有点の座標は $(1, 1), \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

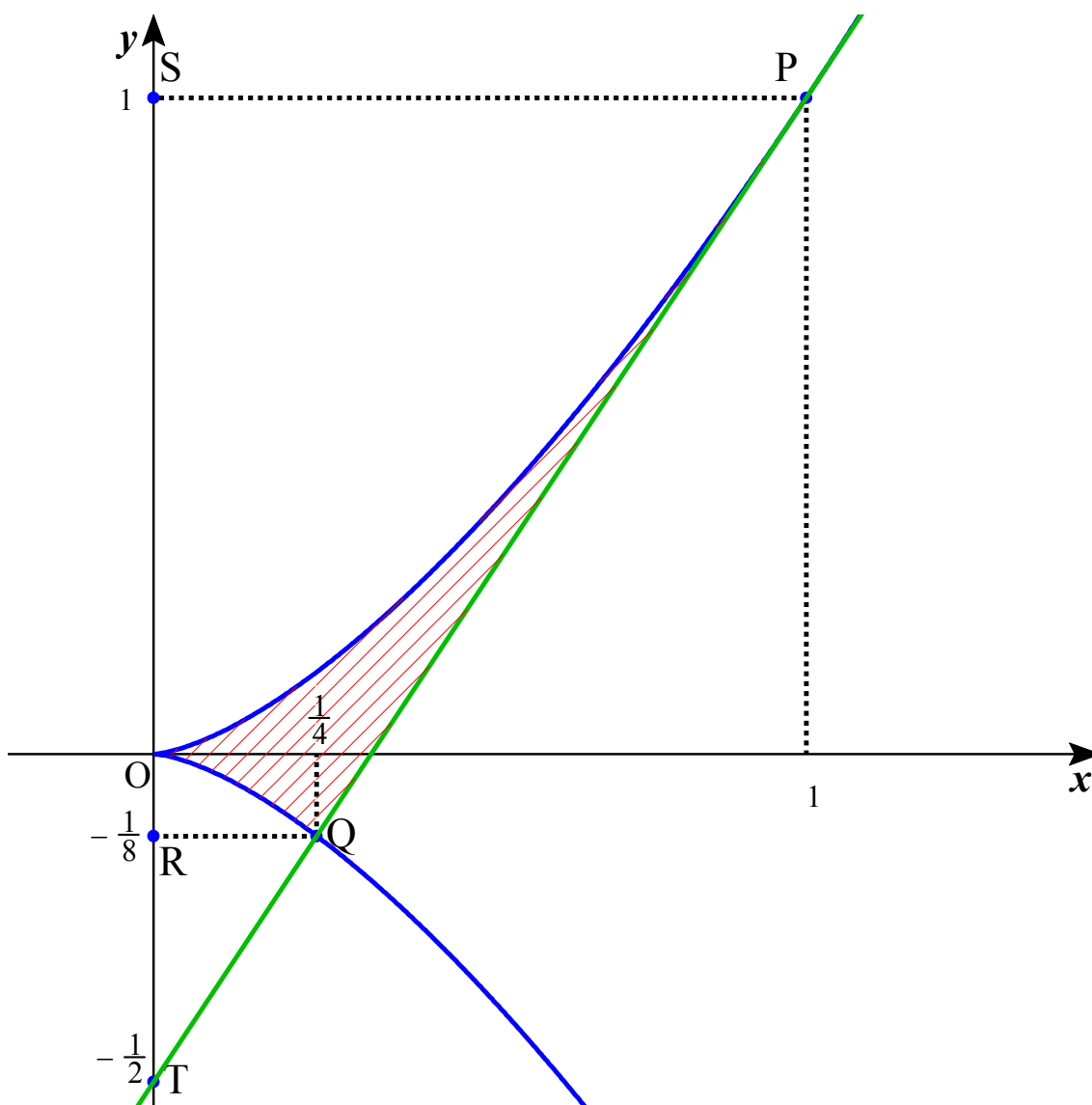
したがって, 次頁図の斜線部の面積を求めればよい。

斜線部は, 台形 PQRS から曲線 C と y 軸で囲まれた $-\frac{1}{8} \leq y \leq 1$ の部分を除いた部分だから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left\{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} - \int_{-\frac{1}{8}}^1 x dy &= \frac{45}{64} - \int_{-\frac{1}{8}}^1 y^{\frac{2}{3}} dy \\ &= -\frac{3}{5} \left[y^{\frac{5}{3}} \right]_{-\frac{1}{8}}^1 \\ &= \frac{45}{64} - \frac{99}{160} \\ &= \frac{27}{320} \end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left\{1 - \left(-\frac{1}{8}\right)\right\} - \int_{-\frac{1}{8}}^1 x dy &= \frac{45}{64} - \int_{-\frac{1}{2}}^1 t^2 \cdot 3t^2 dt \\ &= \frac{45}{64} - \frac{3}{5} \left[t^5 \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{45}{64} - \frac{99}{160} \\ &= \frac{27}{320} \end{aligned}$$



(4)

上図より，台形 PQRQ を y 軸の周りに 1 回転してできる円錐台から，

曲線 C と y 軸で囲まれた $-\frac{1}{8} \leq y \leq 1$ の部分を 1 回転した部分を除いた体積を求めればよい。

台形 PQRQ を y 軸の周りに 1 回転してできる円錐台の体積

$\triangle TPS$ を回転してできる円錐の体積 $- \triangle TQR$ を回転してできる円錐より，

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} - \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^2 \left\{ -\frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{63}{128}\pi$$

曲線 C と y 軸で囲まれた $-\frac{1}{8} \leq y \leq 1$ の部分を 1 回転してできる立体の体積

$$\begin{aligned}\pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 x^2 dy &= \pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^2 dy \\ &= \frac{3}{7} \pi \left[y^{\frac{7}{3}} \right]_{-\frac{1}{8}}^1 \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{129}{128} \pi\end{aligned}$$

あるいは,

$$\begin{aligned}\pi \int_{-\frac{1}{8}}^1 x^2 dy &= \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (t^2)^2 \cdot 3t^2 dt \\ &= \frac{3}{7} \pi \left[t^7 \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \frac{3}{7} \cdot \frac{129}{128} \pi\end{aligned}$$

よって, 求める体積は

$$\begin{aligned}\frac{63}{128} \pi - \frac{3}{7} \cdot \frac{129}{128} \pi &= \frac{7 \cdot 63 - 3 \cdot 129}{7 \cdot 128} \pi \\ &= \frac{3(7 \cdot 21 - 129)}{7 \cdot 128} \pi \\ &= \frac{27}{448} \pi\end{aligned}$$

82

図形 A の方程式は $x^2 + y^2 = 1, 1 \leq z \leq 2$

これを平面 $x = t$ ($-1 \leq t \leq 1$) で切ったときの切り口の線分を

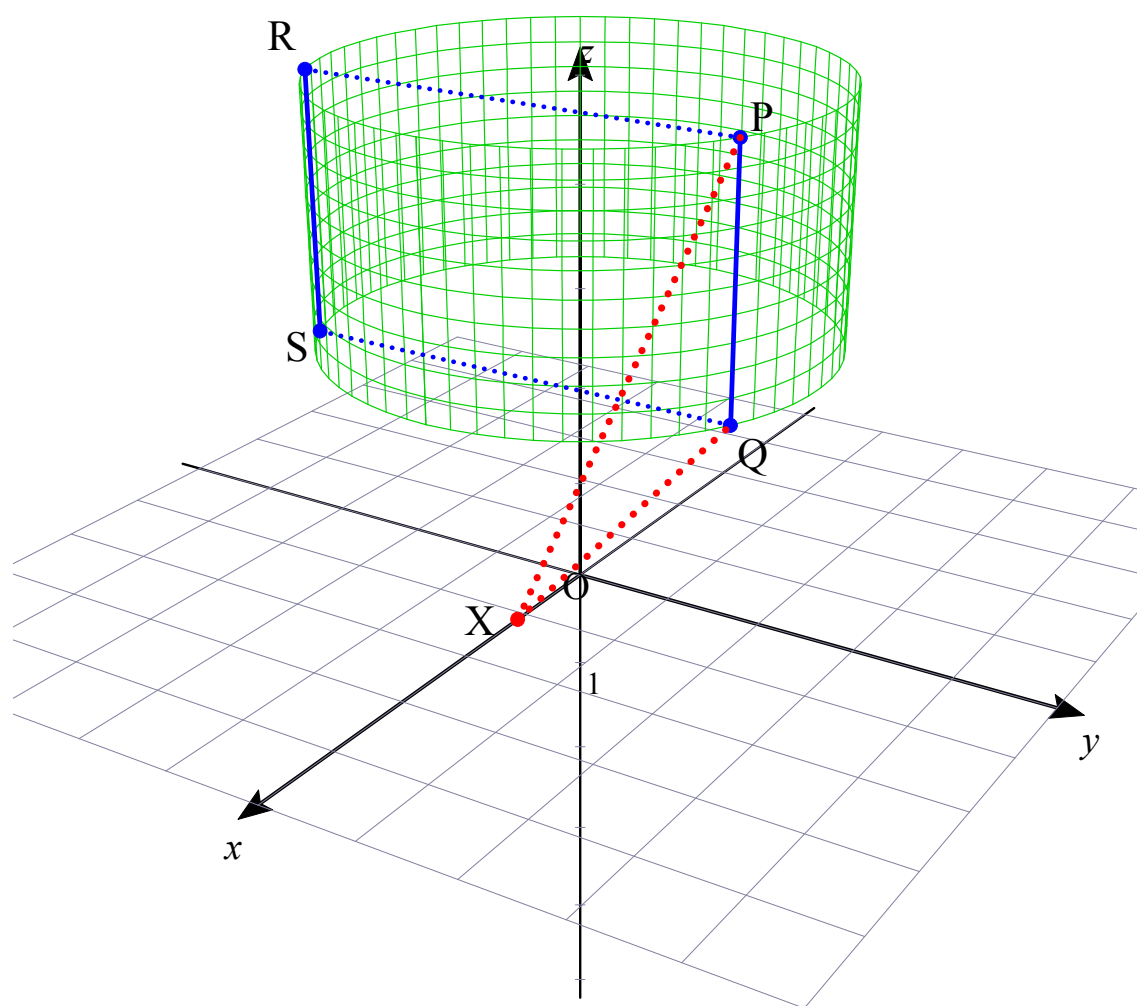
下図のように PQ, RS とすると,

$P(t, \sqrt{1-t^2}, 2), Q(t, \sqrt{1-t^2}, 1), R(t, -\sqrt{1-t^2}, 2), S(t, -\sqrt{1-t^2}, 1)$ より,

線分 PQ と RS は xz 平面に関して対称である。

よって, この切り口を x 軸の周りに 1 回転してできる図形の面積と

線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転してできる図形の面積は等しい。



これと、線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転してできる図形の面積は、 $X(t, 0, 0)$ とすると、

$$\begin{aligned}\pi XP^2 - \pi XQ^2 &= \pi \left\{ (t-t)^2 + \left(\sqrt{1-t^2} - 0 \right)^2 + (2-0)^2 \right\} - \pi \left\{ (t-t)^2 + \left(\sqrt{1-t^2} - 0 \right)^2 + (1-0)^2 \right\} \\ &= 3\pi\end{aligned}$$

より、求める立体の体積は $\int_{-1}^1 3\pi dt = 6\pi$

