場合の数と確率 4　円順列・重複順列

43

(1)

一列に並んだ場合，両端が存在するので，どちらかの端を基準位置とすれば，

たとえば「右端から何番目の位置」と各位置を区別することができる。

しかし，輪になると端がなくなるため基準位置も消えてしまう。

問題の場合，大人 2 人を A，子供を a,b,c,d,e,f,g,h とすれば，A,a,b,c,d,e,f,g,h が一列に，

たとえば，Aabcdefgh，abcdefghA，bcdefghAa，cdefghAab，defghAabc，efghAabcd，fghAabcde

ghAabcdef，hAabcdef と並んだとき，これらは，すべて区別できるが，手をつないで輪にな

ると区別がなくなる。これは他の順列でも同じで，輪になると順列の数が $\frac{1}{9}$ になる。

よって，一列順列の数が $9!$ であることから，輪になったときの順列は $9!\times\frac{1}{9}=(9-1)!=8!$

これと，A の順列が 2 通りであることから，円形の並び方は $8!\cdot 2=80640$ （通り）

あるいは，

基準位置が消えてしまったならば，基準位置を意図的に設定すればよい。

つまり，特定の 1 つを基準位置とすればよい。

すると，「基準位置から時計回りに何番目」と表現することで各位置を区別できる。

したがって，たとえば A の位置を基準にすると，

基準位置を A にする場合の数は 1　・・・①

子供 8 人の順列は $8!$　・・・②

A すなわち大人 2 人の順列の数は $2!$　・・・③

よって，並び方は，①×②×③より，$1\cdot 8!\cdot 2!=80640$ （通り）

(2)

大人を A_1, A_2，子供を a, b, c, d, e, f, g, h とし，A_1 の位置を基準位置とすると，

A_1 の位置を基準位置とする場合の数は 1

A_2 の位置のとり方は A_1 の向かいの 1 通り

子供の順列の数は $8!$

よって，$1\cdot 1\cdot 8!=40320$ （通り）

44

(1)

女子 4 人をひとかたまりとし，これを基準位置とすると，

女子のかたまりを基準位置とする場合の数は 1　・・・①

男子 4 人の順列の数は $4!$　・・・②

女子のかたまりにおける女子の順列の数は $4!$　・・・③

よって，①×②×③より，$1\cdot 4!\cdot 4!=576$ （通り）

(2)

まず女子が並び，続いて男子が並ぶとすると，女子の円順列は 3!通り　・・・④

女子が円順列をつくってしまうと，それが基準位置になってしまうので，男子が入る位置はすべて区別される。つまり，女子を A,B,C,D とし，その円順列がたとえば ABCD の場合なら，男子が入る場所は AB の間，BC の間，CD の間，DA の間とすべて区別できる。

よって，男子の場合はただの順列で，その数は $4!$　・・・⑤

ゆえに，④×⑤より，$3!\cdot 4!=144$（通り）

45

5 人が一列に並ぶ順列は ${}_8\mathrm{P}_5$ 通り

5 人が円形状になると，順列の数が $\frac{1}{5}$ になるから，並び方は ${}_8\mathrm{P}_5\times\frac{1}{5}=1344$（通り）

46

互いに色の異なる玉を使った首輪だから，ある首輪を一方の側から見たときの円順列とその反対側から見たときの円順列は異なる。

つまり，1 つの首輪は 2 つの異なる円順列を含む。

また，円順列の数は $6!$

よって，首輪にする方法は $\frac{6!}{2}=360$（通り）

47

解法 1

特定の色の面を底面とし，それを基準にすると，特定の色の面を底面とする方法は 1 通り，もう 1 つの底面の色は 5 通り。側面は 4 色の円順列だから 3!通り。

よって，$1\cdot 5\cdot 3!=30$ 通り。

解法 2

6 色で塗り分けられたある立方体の各面を上底面，下底面，側面 1，側面 2，側面 3，側面 4 と区別すると，上底面にする面の選び方は 6 通りある。

上底面にしたある色の面に対し，下底面は 1 通りに決まり，側面は 4 通りがある。

したがって，6 色で塗り分けられたある立方体の各面を上底面，下底面，側面 1，側面 2，側面 3，側面 4 と区別すると，$6\times 1\times 4=24$ 通りの区別の仕方がある。

よって，面を区別したときの塗り分け方は，面を区別しないときの塗り分け方×24

一方，面を区別したときの塗り分け方は 6!通りあるから，

面を区別しないときの塗り分け方×24＝6!

ゆえに，面を区別しないときの塗り分け方は $\frac{6!}{24}=30$（通り）

48

(1)

百の位は 3 通り，十の位は 4 通り，一の位は 4 通り

よって，できる自然数の数は$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$

(2)

2 桁の整数は百の位が 0 の整数，1 桁の整数は百と十の位が 0 の整数，0 は 000 と表すことにより，つまり，2 桁の整数は 012，1 桁の整数は 001 のように表すことにより，

0 以上の整数の数は$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$であることがわかる。

このうち 000 は自然数でないから，自然数の数は$64 - 1 = 63$

(3)

まず 123 より小さい整数の数を求める。

百の位が 0 のとき

$4 \cdot 4 = 16$

百の位が 1，十の位が 0 または 1 のとき

$2 \cdot 4 = 8$

百の位が 1，十の位が 0 または 1 のとき

3（120, 121, 122）

よって，$16 + 8 + 3 = 27$

このうち 000 は自然数でないから，求める数は$27 - 1 = 26$

49

部分集合の総数

各要素について部分集合か部分集合でないかの 2 通りがあるから，$2^9 = 512$

2 個の特定の要素を含む部分集合の総数

特定の 2 個を部分集合にする方法は 1 通り

残り 7 個の要素について部分集合か部分集合でないかの 2 通り

よって，$1 \cdot 2^7 = 128$

50

(1)

10 人それぞれに A にするか B にするかの 2 通りの決め方があるから，$2^{10} = 1024$（通り）

(2)

A または B が 0 人の場合を除くから，$2^{10} - 2 = 1022$（通り）

(3)

たとえば，出席番号で A 組が 1～5，B 組が 6～10 の組分けと A 組が 6～10，B 組が 1～5 の組分けは異なる組分けである。ところが A 組，B 組の区別をなくすと，いずれも 1～5 の組と 6～10 の組となり，同じ組分けとなる。つまり，場合の数が(2)の半分になる。

よって，$1022 \div 2 = 511$（通り）

51

(1)

8 人それぞれに A にするか，B にするか，C にするかの 3 通りの決め方があるから，

$3^8=6561$ （通り）

(2)

8 人を 3 つの組 A,B,C に分けられないのは 1 組または 2 組が 0 人となる場合である。

2 組が 0 人の場合

A,B,C のどれか 1 つに 8 人全員が入る場合だから 3 通り

1 組が 0 人の場合

0 人になる組は A,B,C のどれか 1 つが 0 人となるから 3 通り

8 人は 2 組のどちらかに入るから 2^8 通り

しかし，2^8 通りにはどちらか 1 組に全員が入る場合があり，これは 2 通りあるから，

これを除くことにより，2^8-2

補足

たとえば，A 組と B 組の 2 組に入るとすると，

8 人それぞれの組の選び方は 2 通りあるから 2^8 通り

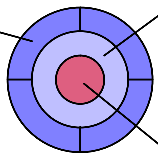
これには A 組が 0 人の場合と B 組が 0 人の場合も含まれるから，

これを除くことにより 2^8-2 通り

よって，$3\left(2^8-2\right)$ 通り

ゆえに，8 人を 3 つの組 A,B,C に分ける方法は $3^8-3\left(2^8-2\right)-3=5796$

52



内層，中層，外層の順に塗り分けるとする。

(1)

内層は 6 通り，中層は 5 通り，等価な 4 つの部分からなる外層は 4 色の円順列だから 3!通り

よって，$6\cdot 5\cdot 3!=180$ （通り）

(2)

内層は 7 通り，中層は 6 通り，等価な 4 つの部分からなる外層は 4 色の円順列だから $\dfrac{{}_5P_4}{4}$ 通り

よって，$7\cdot 6\cdot \dfrac{{}_5P_4}{4}=1260$ （通り）