

場合の数と確率 5 組合せ

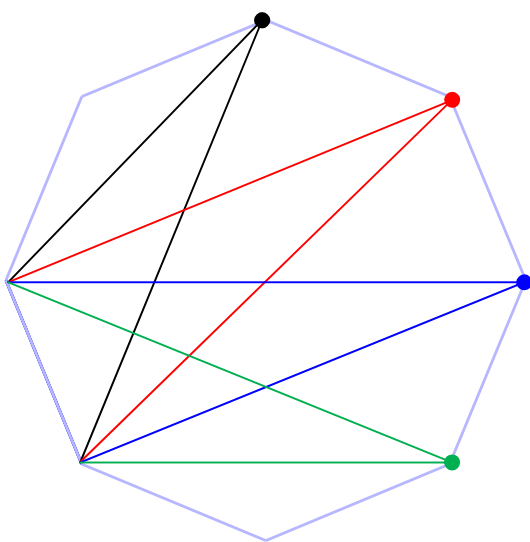
59

(1)

共有する 1 辺の選び方は 8 通り。

共有する 1 辺を決めると三角形をつくるための頂点の選び方は 4 通り。

よって、三角形は $8 \cdot 4 = 32$ (個)



(2)

三角形は全部で ${}_8C_3 = 56$ (個) できる。

これらの三角形は八角形と辺を共有しない三角形, 1 辺を共有する三角形, 2 辺を共有する三角形に分類できる。

1 辺を共有する三角形の個数は(1)より 32

2 辺を共有する三角形の個数は八角形の頂点の個数と等しいから 8

よって、八角形と辺を共有しない三角形の個数は $56 - 32 - 8 = 16$

60

(1)

異なる奇数は全部で 10 個あるから、それから 3 個選ぶことになる。

よって、 ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)

(2)

異なる 3 個の整数の組は全部で ${}_{20}C_3 = 1140$ (通り)

偶数だけを含んでいる組は、異なる偶数が全部で 10 個あるから、 ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)

奇数だけを含んでいる組は、(1)より、120 通り

よって、奇数も偶数も含んでいる組は $1140 - 120 - 120 = 900$ (通り)

(3)

奇数だけの組または偶数が 2 個，奇数が 1 個の組の場合である。

奇数だけの組は，(1)より，120 通り

偶数が 2 個，奇数が 1 個の組は， ${}_{10}C_2 \cdot {}_{10}C_1 = 450$ (通り)

よって， $120 + 450 = 570$ (通り)

61

(1)

12 人から 7 人を選んで 7 人の組に入れ，残り 5 人から 5 人を選んで 5 人の組に入れるとすると，

$${}_{12}C_7 \cdot {}_5C_5 = 792 \text{ (通り)}$$

(2)

12 人から 6 人を選んで 6 人の組に入れ，残り 6 人から 4 人を選んで 4 人の組に入れ，

最後に残り 2 人から 2 人を選んで 2 人の組に入れるとすると，

$${}_{12}C_6 \cdot {}_6C_4 \cdot {}_2C_2 = 13860 \text{ (通り)}$$

(3)

12 人から 6 人を選んで A 部屋に，残り 6 人から 6 人を選んで B 部屋に入れるとすると，

$${}_{12}C_6 \cdot {}_6C_6 = 924 \text{ (通り)}$$

(4)

12 人から 6 人を選んで 6 人の組に，残り 6 人から 6 人を選んで 6 人の組に入れるのだが，

6 人の組と 6 人の組は人数が同じ組で，区別するための組名もないから 2 組は区別できない。

$$\text{よって，場合の数は(3)の半分，すなわち } \frac{{}_{12}C_6 \cdot {}_6C_6}{2} = 462 \text{ (通り)}$$

補足 1

生徒を $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$ とすると，たとえば，

A 組 $\{a, b, c, d, e, f\}$ ，B 組 $\{g, h, i, j, k, l\}$ と A 組 $\{g, h, i, j, k, l\}$ ，B 組 $\{a, b, c, d, e, f\}$ は異なるが，組の区別をなくすと，どちらも $\{a, b, c, d, e, f\}$ ， $\{g, h, i, j, k, l\}$ になってしまう。

つまり，(3)では 2 通りに区別できていたのが(4)では 1 通りになってしまう。

補足 2

12 人から 6 人を選ぶ場合と 12 人を 6 人ずつ 2 組に分ける場合の違い

12 人から 6 人を選ぶという行為により，選ばれた 6 人組と選ばれなかった 6 人組という区別できる 2 組ができる。よって，12 人から 6 人を選ぶ方法は ${}_{12}C_6 = 924$ (通り)

(5)

2 人の組 2 組は区別できないから，区別した場合の数の $\frac{1}{2}$ になる。

$$\text{よって， } {}_{12}C_8 \cdot \frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{2} = 1485 \text{ (通り)}$$

(6)

3 人の組 4 組は区別できないから、4 組を区別した場合の $\frac{1}{4!}$ になる。

$$\text{よって, } \frac{{}_{12}C_3 \cdot {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{4!} = 15400 \text{ (通り)}$$

補足

3 人ずつ A,B,C,D の 4 組に分ける方法は ${}_{12}C_3 \cdot {}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3$ (通り) ある。

この場合、たとえば構成員が $(a,b,c), (d,e,f), (g,h,i), (j,k,l)$ の 4 組それぞれに組名があるので、構成員がこれらの 4 組は $4!$ 通りに区別される。

しかし、組名をなくすとただの $(a,b,c), (d,e,f), (g,h,i), (j,k,l)$ 1 通りになってしまう。

62

(1)

解法 1

最短経路をとるということは後戻りすることなく P から Q まで行くということである。

したがって、碁盤の目の各区間を $\rightarrow$ または $\uparrow$ の向きに進むことになる。

P から Q まで $\rightarrow$ の向きに進む区間の数は 7, $\uparrow$ の向きに進む区間の数は 5 だから、

$\rightarrow$ が 7 個, $\uparrow$ が 5 個の順列となる。

$$\text{よって, } \frac{12!}{7!5!} = 792 \text{ (通り)}$$

補足： $\rightarrow$ が 7 個, $\uparrow$ が 5 個の順列の数

a が 7 個, b が 5 個の順列の数を求めるのと同じだから、これで説明する。

たとえば, $aaaaaaabbbbbb$ という順列がある。

ここで、7 個の a を $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$, 5 個の b を b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 に区別すると、

$aaaaaaabbbbbb$ という 1 通りの順列の数が $7!5!$ 通りの順列になる。

これは $aaaaaaabbbbbb$ など他の順列についても同じだから、

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ の順列の数 = a が 7 個, b が 5 個の順列の数 $\times 7!5!$

一方, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ の順列の数 = $12!$

よって, a が 7 個, b が 5 個の順列の数 $\times 7!5! = 12!$

$$\text{ゆえに, } a \text{ が 7 個, } b \text{ が 5 個の順列の数} = \frac{12!}{7!5!}$$

解法 2

次のように左から順に 12 個の $\square$ が並んでいる。

$\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square\square$

これから 7 個の $\square$ を選んで 7 個の $\rightarrow$ を入れ、残りの $\square$ に 5 個の $\uparrow$ を入れる場合の数と

$\rightarrow$ が 7 個, $\uparrow$ が 5 個の順列は等しい。

$$\text{よって, } {}_{12}C_7 \cdot {}_5C_5 = 792 \text{ (通り)}$$

解法 3

P から A までの進み方が a 通り, B までの進み方が b 通りとすると,

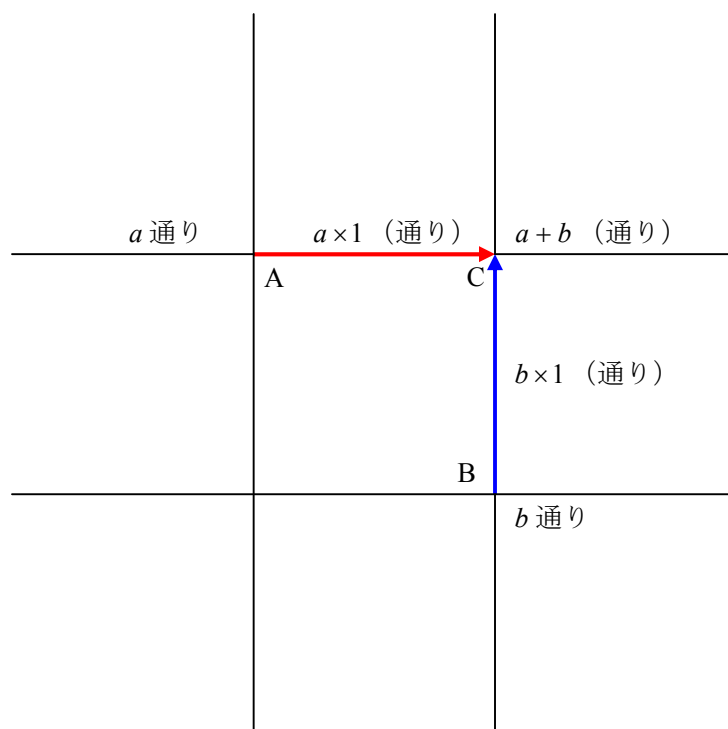
A から C への進み方は 1 通りだから,

P から A を経て C までの進み方は $a \times 1$ (通り)

同様に, P から B を経て C までの進み方は $b \times 1$ (通り)

P から C への進み方は P から A を経て C または P から B を経て C だから,

$a \times 1 + b \times 1 = a + b$ (通り)



これを使うと, 下図より, 792 通り

								Q
1	6	21	56	126	252	462	792	
1	5	15	35	70	126	210	330	
1	4	10	20	35	56	84	120	
1	3	6	10	15	21	28	36	
1	2	3	4	5	6	7	8	
P	1	1	1	1	1	1	1	

例題 13

別解：グループ分けの考え方

GAKUSEI の 7 文字の並べ方の順列は $7!$ (通り)

この 7 文字の順列を G,K,S,I の 4 文字の順列でグループ分けすると、 $4!$ のグループに分けられる。(たとえば、**KAGUSEI** と **EAKGSUI** は KGS I のグループに属する)

GKSI のグループは $4!$ あるグループの 1 グループだから、

G,K,S,I がこの順にある順列の数は $\frac{7!}{4!} = 210$

63

(1)

Y,K,H,M,O,O,A,A について、

奇数番目に入るのは Y,K,H,M だから、奇数番目に入る文字の順列は $4!$ 通り

偶数番目に入るのは O,O,A,A だから、偶数番目に入る文字の順列は $\frac{4!}{2!2!}$ 通り

よって、求める順列の数は $4! \cdot \frac{4!}{2!2!} = 144$ (通り)

(2)

例題 13 の考え方より、 $\frac{8!}{2!2!} \times \frac{1}{4!} = 420$

あるいは、Y,K,H,M,O,O,A,A の順列は $\frac{8!}{2!2!}$ 通り

これを Y,K,H,M の順列でグループ分けすると $4!$ のグループに分けられる。

順列が YKHM のグループは $4!$ あるグループの 1 つだから、 $\frac{8!}{2!2!} \times \frac{1}{4!} = 420$ (通り)

64

(1)

まず 0 から 9 までの 10 個の数から異なる数を 4 つ選ぶ (選び方の数 $= {}_{10}C_4$)

↓

大きい順に並べる (並べ方の数 $= 1$)

よって、条件を満たす 4 桁の整数 n の個数は ${}_{10}C_4 \times 1 = 210$

(2)

$a \geq b > c > d$ は $a > b > c > d$ の場合と $a = b > c > d$ の場合に排反に分類できる。

$a > b > c > d$ となる整数の個数は (1) より $210 \cdots \textcircled{1}$

$a = b > c > d$ となる整数の個数については、

0 から 9 までの 10 個の数から異なる数を 3 つ選ぶ (選び方の数 $= {}_{10}C_3$)

↓

選んだ 3 数のうち最も大きい数と同じ数をあと 1 つ選ぶ (選び方の数=1)

↓

大きい順に並べる (並べ方の数=1)

よって, ${}_{10}C_3 \times 1 \times 1 = 120 \quad \cdots \textcircled{2}$

条件を満たす 4 桁の整数 n の個数は, ①+②より, 330

65

(1)

D, F, N, S から 1 個選べばよいから, 組合せは 4 通り

1 つの組合せにつき順列が 4 通りあるから, 順列は全部で $4 \cdot 4 = 16$ (通り)

(2)

D, F, N, S から 2 個選べばよいから, 組合せは ${}_4C_2 = 6$ (通り)

1 つの組合せにつき順列が $\frac{4!}{2!} = 12$ (通り) あるから, 順列は全部で $12 \cdot 6 = 72$ (通り)

(3)

5 種の文字 D, E, F, N, S から 4 種選べばよいから, 組合せは 5 通り

1 つの組合せにつき順列が $4! = 24$ (通り) あるから, 順列は全部で $24 \cdot 5 = 120$ (通り)

(4)

E の数に注目すると, E を 3 個含む場合, E を 2 個含む場合, E を 1 個含む場合, E を含まない場合に排反に分類できるが, E を 1 個含む場合と E を含まない場合を合わせて 4 文字とも異なる場合とすることができから,

E を 3 個含む場合, E を 2 個含む場合, 4 文字とも異なる場合に排反に分類できる。

E を 3 個含む場合は(1), E を 2 個含む場合は(2), 4 文字とも異なる場合は(3)だから,

(1)または(2)または(3)より,

組合せは $4 + 6 + 5 = 15$ (通り)

順列は $16 + 72 + 120 = 208$ (通り)

66

(1)

白玉は 1 個だから、これを基準にする。(基準は白玉だけだから基準の選び方は 1 通り)

白玉が見ると、赤玉 4 個と青玉 6 個が並んで見えるから、順列は $\frac{10!}{4!6!} = 210$ (通り)

また、赤玉 4 個と青玉 6 個の順列は白玉からしか見えない唯一無二の順列である。

よって、白玉 1 個、赤玉 4 個、青玉 6 個の円順列は $1 \cdot 210 = 210$ (通り)

補足

白玉から見ると、たとえば下図のように並んだ赤玉と青玉が見える。



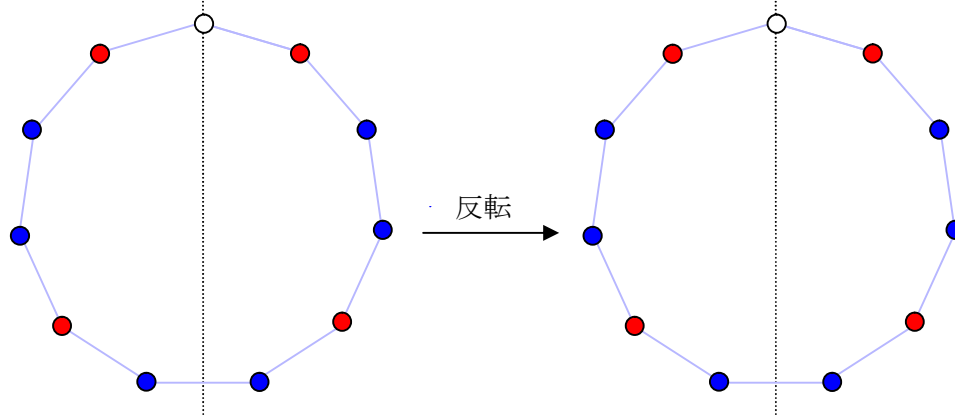
また、これは他の玉からは見えない唯一無二の順列である。

しかし、赤玉や青玉は 2 個以上あるから、たとえば、ある 1 個の赤玉から見える次の順列 は他の赤玉からでも見えるので、唯一無二の順列ではない。

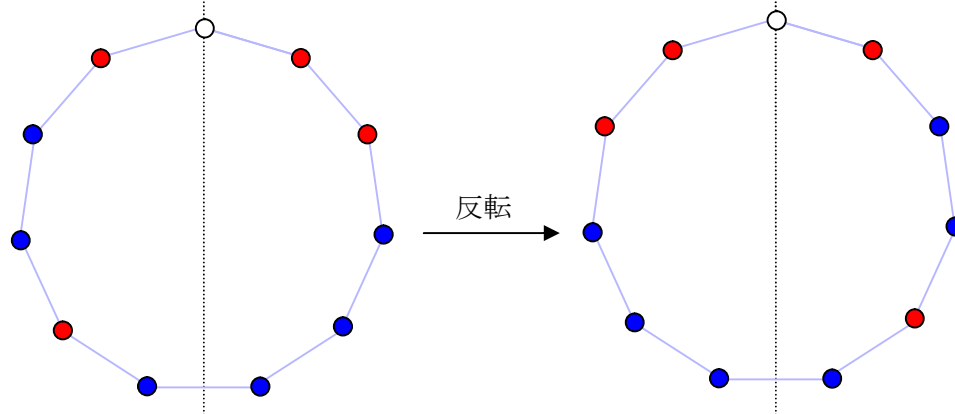
これは青玉についても同じである。したがって、複数個あるものを基準にして順列の数を求めるのは難しい。

余力があれば、最後部「同じものを含む円順列の求め方」も見てください。

白玉を通る直線に関して対称な円順列を反転すると同じ円順列になる。



白玉を通る直線に関して非対称な円順列を反転すると別の円順列になる。



したがって、首飾りの種類の数は

$$\text{白玉を通る直線に関して対称な円順列の数} + \frac{\text{白玉を通る直線に関して非対称な円順列の数}}{2}$$

白玉を通る直線に関して対称な円順列の数

白玉を通る直線に関して片側の赤玉 2 個と青玉 3 個の順列が決まればもう片側の順列も同じ順列、すなわち 1 通りに決まってしまう。

白玉を通る直線に関して片側の赤玉 2 個と青玉 3 個の順列は $\frac{5!}{2!3!} = 10$ 通りだから、

白玉を通る直線に関して対称な円順列は $10 \cdot 1 = 10$ (通り)

白玉を通る直線に関して非対称な円順列の数

円順列 210 通りのうち白玉を通る直線に関して対称な円順列の数は 10 だから、

白玉を通る直線に関して非対称な円順列は $210 - 10 = 200$ (通り)

よって、首飾りの作り方は全部で $10 + \frac{200}{2} = 110$ (通り)

(2)

白玉は 1 個だから、これを基準にする。(基準は白玉だけだから基準の選び方は 1 通り)

白玉から見ると、並んだ 6 個の青玉の両端と青玉の間の全 7 ヶ所のうちの 4 ヶ所に赤玉が入ることになるから、白玉から見た赤玉の入れ方は ${}^7C_4 = 35$ (通り) ……①

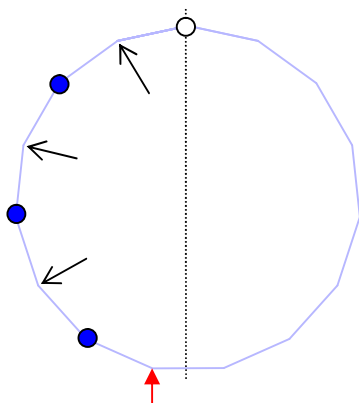
補足：白玉から見た赤玉の入る位置↑



よって、円順列の数は $1 \cdot 35 = 35$ 通り

白玉を通る直線に関して対称になるように片側への赤玉の入れ方は ${}_3C_2 = 3$ (通り)

すなわち、白玉を通る直線に関して対称な円順列は 3 通り ……②



ここに入れると 2 個の赤玉が隣り合ってしまう。

また、白玉を通る直線に関して非対称な円順列は、①－②より、32 通り ……③

首飾りの種類の数は

白玉を通る直線に関して対称な円順列の数 + $\frac{\text{白玉を通る直線に関して非対称な円順列の数}}{2}$

だから、これに②と③を代入することにより、作り方は $3 + \frac{32}{2} = 19$ (通り)

例題 16 重複組合せ

(1)

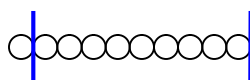
2つの仕切りを用意し、左の仕切りの左側の果物を柿、仕切りと仕切りの間の果物をりんご、右の仕切りの右側の果物をみかんとする。

柿 | りんご | みかん

すると、



柿 1
りんご 3
みかん 6



柿 1
りんご 9
みかん 0



柿 0
りんご 10
みかん 0

つまり、区別できない10個の○と2本の仕切り | の順列がそれぞれの果物の個数を決める。

よって、買い方は $\frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66$ (通り)

または、左から1番目、2番目、・・・、13番目と区別できる□の10ヶ所に○を2ヶ所に仕切り | を入れる場合の数より、 ${}_{12}C_{10} \cdot {}_2C_2 = 66$ (通り)



(2)

まず、それぞれの果物を1個ずつ買う。この買い方は1通りしかない。

つぎに、3種類の果物の中から7個の果物を買う。

この買い方は(1)と同様にして、 $\frac{9!}{7! \cdot 2!} = 36$ (通り) または ${}_9C_7 \cdot {}_2C_2 = 36$ (通り)

よって、買い方は $1 \cdot 36 = 36$ (通り)

まとめ

重複組合せは区別できない n 個を区別できる r 個の箱に0個を許して入れる場合のことで、

$\frac{\{n + (r-1)\}!}{n! (r-1)!}$ 通り または ${}_{n+(r-1)}C_r$ 通り ($r-1$ は仕切りの数)

67

5 個のりんごは区別できない (場合の数の約束)。3 人は区別できる。

1 個ももらわない人があってもよい場合

区別できない 5 個を区別できる 3 個の箱に 0 個も許して入れる場合と同じだから、

$$\frac{\{5+(3-1)\}!}{5!(3-1)!} = 21 \text{ (通り)} \text{ または } {}_{5+(3-1)}C_5 = 21 \text{ (通り)}$$

1 人に少なくとも 1 個は与えるものとする場合

まず、3 人にりんごを 1 個ずつ与える。これは 1 通りしかない。

すると、残り 2 個のりんごの分け方については、1 個ももらわない人があってもよいから、

$$\frac{\{2+(3-1)\}!}{2!(3-1)!} = 6 \text{ (通り)} \text{ または } {}_{2+(3-1)}C_2 = 6 \text{ (通り)}$$

68

3 人の候補者は区別できる。

無記名投票だから誰が誰に投票したかわからない。つまり 8 票は区別できない。

投票だから獲得票が 0 もあり得る。

よって、区別できない 8 個を区別できる 3 個の箱に 0 個も許して入れる場合と同じ。

$$\text{ゆえに、} \frac{\{8+(3-1)\}!}{8!(3-1)!} = 45 \text{ (通り)} \text{ または } {}_{8+(3-1)}C_8 = 45 \text{ (通り)}$$

補足：無記名投票でない場合、つまり、誰が誰に投票したかがわかる場合

各投票者は 3 通りの選び方がある。よって、 $3^8 = 6561$ (通り)

69

(1)

整数の最小単位の大きさは 1 だから、 $x+y+z=7$ の整数解の数は、

7 個の 1 の x, y, z への分け方の数と同じである。

また、負でない整数解、すなわち 0 以上の整数解ということは、

1 が 0 個も許される分け方ということ。

したがって、区別できない 7 個を区別できる 3 個の箱に 0 個も許して入れる場合と同じ。

$$\text{よって、整数解は} \frac{\{7+(3-1)\}!}{7!(3-1)!} = 36 \text{ (個)} \text{ または } {}_{7+(3-1)}C_7 = 36 \text{ (個)}$$

(2)

12 個の 1 を x, y, z へ 1 個ずつ以上分ける場合である。

そこで、まず 1 を 1 個ずつ x, y, z に分配する。これは 1 通りしかない。

つぎに、残り 9 個の 1 を 0 個を許して x, y, z に分配する。

$$\text{これは} \frac{\{9+(3-1)\}!}{9!(3-1)!} = 55 \text{ (通り)} \text{ または } {}_{9+(3-1)}C_9 = 55 \text{ (通り)}$$

よって、整数解は $1 \cdot 55 = 55$ (個)

70

(1)

1~6 の目から異なる 3 つの目を選べば自動的に a, b, c が決まる。

よって、1~6 の目から異なる 3 つの目を選ぶ場合と同じである。

ゆえに、 ${}_6C_3 = 20$ (通り)

(2)

解法 1

まず、出た 3 つの目の組み合わせを求める。

これは区別できない 3 個を区別できる 6 個の箱のどれかに重複を許して入れるのと同じ。

よって、 $\frac{\{3+(6-1)\}!}{3!(6-1)!} = 56$ (通り) または ${}_{3+(6-1)}C_3 = 56$ (通り)

つぎに各組み合わせについて a, b, c の決めるわけだが、これは 1 通りずつしかない。

よって、 $56 \times 1 = 56$ 通り。

補足

具体的には、5 つの仕切りを用意し、左端の仕切りから、

1 の目 | 2 の目 | 3 の目 | 4 の目 | 5 の目 | 6 の目

と分けする。

たとえば、| | | ○○ | | ○ ならば、3 つの目は 4, 4, 6 である。

したがって、目の出方は 5 つの | と 3 つの ○ の順列で決まる。

よって、目の出方は、 $\frac{8!}{5!3!} = 56$ 通り。

解法 2

$1 \leq a \leq b \leq c \leq 6$ より、 $1 \leq a < b+1 < c+2 \leq 8$ が成り立つ。

ここで、 $b+1=B$ 、 $c+2=C$ とおくと、 (a, b, c) と (a, B, C) が 1 対 1 に対応するから、

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ から $a < B < C$ を満たす (a, B, C) の組の数を求めればよい。

これは $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ から異なる 3 数を選ぶのと同じである。

よって、 ${}_8C_3 \times 1 = 56$

区別できないものを含む円順列の数の求め方

白玉 6 個, 赤玉 3 個を円形に並べる場合の数 を例に
解法は, 友田先生の解法を元にさせていただきました。

<http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>

1 つを固定する解き方の考え方

異なる n 個の円順列

A,B,C,D,E,F,G,H,I の円順列の場合

A から I のうち適当な 1 つの文字を, たとえば A を左端に固定する。

A,B,C,D,E,F,G,H,I

残りの文字を適当に並べ, 右端にきた文字と A をつないで円にする。

例

ABCDEFGH**I**



図より, B,C,D,E,F,G,H,I の並べ方を変えると円順列も変わるの明らかである。

よって, 円順列の数は, B,C,D,E,F,G,H,I の順列の数と一致し,

その数は, $8!$ 通りである。

つぎに, B を左端に固定してみる。

B,C,D,E,F,G,H,I,A

残りの文字を適当に並べ, 右端にきた文字と B をつないで円にする。

例

BCDEFGH**I**A



でも, この例を 1 つずらすと A を左端に固定したときの, 上の例と同じである。

ABCDEFGH**I**



結局, 固定する文字を変えたところで, A を固定した場合の円順列と同じになってしまう。

よって, 異なる n 個の円順列は, $(n-1)!$ となる。

同じものを含む円順列への応用と限界

1 つしかないものがある場合は使える。

例：A,B,B,B,C,C,C,C の場合

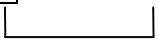
1 つしかない文字 A を左端に固定する。

A,B,B,B,C,C,C,C

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字と A をつないで円にする。

例

ABBBCCCCC



異なる n 個の円順列の場合と同様、

円順列は、残りの 8 文字、B,B,B,C,C,C,C,C の順列で決まってしまう。

よって、円順列の数は、 $\frac{8!}{3!5!} = 56$ 通り

補足

円順列は、A の右に並ぶ B の数が 0 個、1 個、2 個、3 個の場合に排反に分類できるが、それらの順列の和と B,B,B,C,C,C,C,C の順列が一致するのは明らかである。

1 つしかないものがない場合はややこしい。

例：A,A,B,B,B,C,C,C,C の場合

たとえば、A を左端に固定する。

A,A,B,B,B,C,C,C,C

残りの文字を適当に並べ、右端にきた文字と A をつないで円にする。

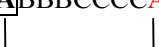
例

AABBBCCCCC



でも、この円順列は、次の円順列と同じである。

ABBBCCCCA



したがって、

残りの文字 A,B,B,B,C,C,C,C の順列の数＝円順列の数とならない。

1 つしかないものがない場合の円順列の数の求め方 問

白玉 6 個, 赤玉 3 個を円形に並べる方法は全部で何通りあるか?

解法

赤玉を R, 白玉を W とすると,

R の数が 3, W の数が 6 の円順列だから, 1 つを固定する方法で解くのは困難である。

たとえば, 1 つの R を左端に固定した場合,

$$\left. \begin{array}{l} \text{RRRWWWWWW} \\ \text{RRWWWWWWR} \\ \text{RWWWWWWRR} \end{array} \right\} \text{の円順列は一致してしまう。}$$

そこで, 原点に戻って考える。

A,B,C,D,E,F,G,H,I の順列

順列が ABCDEFGHI のとき

$$\left. \begin{array}{l} \text{ABCDEFGHI} \\ \text{BCDEFGHIA} \\ \text{CDEFGHIAB} \\ \text{DEFGHIABC} \\ \text{EFGHIABCD} \\ \text{FGHIABCDE} \\ \text{GHIABCDEF} \\ \text{HIABCDEF G} \\ \text{IABCDEFGHI} \end{array} \right\} \text{円順列にすると, 同じ順列になってしまう。}$$

これは, 他の順列についても成り立つから, 円順列の数は, $\frac{9!}{9}$

よって, 異なる n 個の円順列の数は, $\frac{n!}{n}$

あとは, R,R,R,W,W,W,W,W の並べ方の工夫である。

では, 解法へ

まず、並べ方を工夫してみる。

R,R,R,W,W,W,W,W の順列を R,R,R,W,W,W,W,W の繰り返し配列について分類する。

R が 3 個, W が 6 個だから, 公約数は 3 と 1 である。

よって, 次の 2 つのタイプの繰り返し単位ができる。

3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 3 分割することでできる繰り返し単位による繰り返し配列

繰り返し単位の要素: (R,W,W)

繰り返し配列の例: |RWW|RWW|RWW|

3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 1 分割することでできる繰り返し単位による繰り返し配列

繰り返し単位の要素: (R,R,R,W,W,W,W,W,W)

繰り返し配列の例: |RRRWWWWWW|

繰り返し単位が 1 個しかないのに「繰り返し配列」というのはおかしいが,

流れの都合上そうしてしまいました。「繰り返し配列なし」でもいいです。

次に, それぞれの場合についての円順列を求める。

A. 3 個の R, 6 個の W をそれぞれ 3 分割することでできる繰り返し単位の円順列

繰り返し単位の順列の数

繰り返し単位の要素は, (R,W,W)で, これが 3 単位できる。

また, 繰り返し単位の要素の順列の数は, $\frac{3!}{2!}$ である。

RWW, WRW, WWR の 3 つであるのは自明だが, あえて同じものを含む順列の式で表した。

繰り返し配列の順列の総数

繰り返し配列だから, 繰り返し単位の順列を決めると, 残りの順列は 1 通りである。

よって, 繰り返し配列の全順列も, $\frac{3!}{2!}$ となる。

円順列にするとどうなるか

たとえば, 繰り返し単位の順列が RWW の場合,

全体の順列は, |RWW|RWW|RWW|となる。

ここで, |RWW|RWW|RWW|で考えると,

$$\left. \begin{array}{l} |RWW|RWW|RWW| \\ |WRW|WRW|WRW| \\ |WWR|WWR|WWR| \end{array} \right\} \text{ は, 1 つずつずらしたただけの関係なので, 同じ円順列になる。}$$

他の繰り返し単位の場合でも同じだから,

円順列にすると同じ順列になるのが 3 つずつあることになる。

よって, 円順列の数は,

繰り返し配列の順列の総数を繰り返し単位の要素の数 3 で割った数になる。

すなわち $\frac{3!}{2!} \div 3 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

補足

繰り返し単位の要素の数をもう少し多くしたほうが分かりやすいかもしれないので、
繰り返し単位の要素を(R,R,B,W)とすると、

$$\text{繰り返し配列の順列の総数} = \text{繰り返し単位の要素の順列の数} = \frac{4!}{2!}$$

繰り返し配列を円順列にするとどうなるか？

たとえば、繰り返し配列|RRBW|RRBW|RRBW|を円順列にすると

$$\left. \begin{array}{l} |RRBW|RRBW|RRBW| \\ |RBWR|RBWR|RBWR| \\ |BWRR|BWRR|BWRR| \\ |WRRB|WRRB|WRRB| \end{array} \right\} \text{の4つは、同じ円順列になる。}$$

つまり、4つの「4」とは、繰り返し単位の要素の数の「4」のことであり、
円順列の数 = 繰り返し配列の順列の総数 ÷ 繰り返し単位の要素の数
となる。

よって、この場合の円順列の数は、 $\frac{4!}{2!} \div 4 = 3$ である。

B. 3個の R, 6個の W をそれぞれ 1 分割することでできる繰り返し単位の円順列

繰り返し単位(R,R,R,W,W,W,W,W,W)の要素の順列は、 $\frac{9!}{3!6!}$ である。

しかし、この順列には、繰り返し単位の構成が(R,W,W)の繰り返し配列も含まれるから、
これを除外しなければならない。

したがって、この場合の円順列を考える対象となる順列の数は $\frac{9!}{3!6!} - \frac{3!}{2!}$ である。

これと繰り返し単位の要素の数が 9 であることから、

$$\text{円順列の数は} \left(\frac{9!}{3!6!} - \frac{3!}{2!} \right) \div 9 = 9 \quad \cdots \textcircled{2}$$

C. 円順列の総数

①+②より、10 個

解法のまとめ

1. 各要素の数の公約数を調べる。
公約数が繰り返し単位数となるので、各要素を繰り返し単位に等配分する。
2. 重複を避けるため、繰り返し単位の要素の数が少ないものあるいは多いものから順に
各円順列の数を求めていく。
(円順列の対象となる繰り返し配列の順列の数 ÷ 繰り返し単位の要素の数)
3. 各円順列の数を合計する。

練習問題

赤球 4 個，白球 6 個の円順列の数を求めよ。

解

公約数 2,1 より, 繰り返し単位の数 2,1

よって, 円順列の数は $\frac{5!}{2!3!} \div 5 + \left(\frac{10!}{4!6!} - \frac{5!}{2!3!} \right) \div 10 = 22$