場合の数と確率 6　事象と確率

確率問題を解くコツ：すべてを区別する。

すべてを区別してもしなくても確率は変わらない。

たとえば，3 つのサイコロがあり，それらを区別してもしなくても確率は変わらない。

これと「場合の数は区別した方が求めやすい」ことから，確率問題を解くコツは，原則として，すべてを区別することである。

77

全事象の数，すなわち 8 文字の順列の総数＝$8!$

(1)

両端が A,B である順列の数＝両端の A,B の順列の数×A,B 以外の 6 文字の順列の数

＝$2!\cdot 6!$

よって，求める確率は$\dfrac{2!\cdot 6!}{8!}=\dfrac{1}{28}$

(2)

A,B が隣り合う順列の数＝A,B を一塊として扱ったときの順列の数×A,B の順列の数

＝$7!\cdot 2!$

よって，求める確率は$\dfrac{2!\cdot 7!}{8!}=\dfrac{1}{4}$

(3)

A は B より左で，B は C より左にある順列の数，

すなわち A,B,C の位置関係が左から A,B,C となる順列の数について

求め方 1

8 文字の全順列は，A,B,C の位置関係により，$3!$のグループに分類できる。

位置関係が A,B,C になるのはその 1 グループだから，

位置関係が A,B,C になる順列の数は$\dfrac{8!}{3!}$

求め方 2

一列に並んだ 8 つの枠から 5 枠を選んで, A,B,C 以外の 5 文字を並べる場合数は${}_8C_5\cdot 5!$

残り 3 枠の左の枠から順に A,B,C を入れる場合の数は${}_3C_3\cdot 1$

よって，${}_8C_5\cdot 5!\cdot {}_3C_3\cdot 1=\dfrac{8!}{3!}$

求め方 3

A,B,C の位置関係は 1 通りしかない。

同じもの 3 つの位置関係は 1 通りしかない。

ということは, 求める順列の数は同じもの 3 つとそれ以外の異なる 5 個の順列の数と等しい。

よって，$\dfrac{8!}{3!}$

ゆえに，求める確率は$8!\div\dfrac{8!}{3!}=\dfrac{1}{6}$

78

全事象の数，すなわち 8 人が円卓に座る場合の数＝$7!$

(1)

女子 2 人が隣り合う円順列の数について

女子 2 人を基準位置にすると，円順列は$6!$通り

女子 2 人の順列は 2 通り

よって，女子 2 人が隣り合う円順列の数は$6!\cdot 2$

ゆえに，求める確率は$\dfrac{6!\cdot 2}{7!}=\dfrac{2}{7}$

(2)

女子 2 人が向かい合う場合の数について

特定の女子 1 人を基準位置にすると，もう 1 人の女子の席の選び方は 1 通り。

また，男子の座り方は$6!$通り。

よって，円順列の数は$1\cdot 6!$

ゆえに，求める確率は$\dfrac{6!\cdot 1}{7!}=\dfrac{1}{7}$

別解

たとえば座席に番号をつけるなどして，座席をすべて区別しても確率は変わらない。

そこで，座席をすべて区別した上で確率を求めることにする。

すると，全事象の数，すなわち 8 人が座席の区別がある円卓に座る場合の数は$8!$

(1)

女子 2 人が隣り合う席の選び方は 8 通り。

たとえば，席に時計回りに 1,2,3,4,5,6,7,8 と番号をつけて区別したとき，

女子 2 人の席は$(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 4),\ (4,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 7),\ (7,\ 8),\ (8,\ 1)$の 8 通り。

隣り合う女子の順列は 2 通り。

男子 6 人の座り方は$6!$通り。

よって，求める場合の数は$8\cdot 2\cdot 6!$

ゆえに，求める確率は$\dfrac{8\cdot 2\cdot 6!}{8!}=\dfrac{2}{7}$

(2)

向かい合う席の選び方は 4 通り。

向かい合う女子の順列は 2 通り。

男子 6 人の座り方は$6!$通り。

よって，求める確率は$\dfrac{4\cdot 2\cdot 6!}{8!}=\dfrac{1}{7}$

79

A,B,C が出す手の組合せの総数は，それぞれ手の出し方が 3 通りあるから， 3^3

(1)

A の出す手は 3 通りあり, A が出す手で A だけが負ける手の組合せは決まってしまうから,
A だけが負ける手の組合せの数は 3

よって，求める確率は$\dfrac{3}{3^3}=\dfrac{1}{9}$

(2)

(1)と同様にして，A だけが勝つ確率＝B だけが勝つ確率＝C だけが勝つ確率＝$\dfrac{1}{9}$

よって，1 人だけが勝つ確率，すなわち A だけが勝つまたは B だけが勝つまたは C だけが勝つ確率は$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{3}$

80

3 つのサイコロをすべて区別すると，目の組合せの数は6^3

(1)

$150=2\cdot 3\cdot 5^2$ より，3 つの目は$6,\ 5,\ 5$

よって，目の組合せはどのサイコロが 6 の目かで 3 通り。

補足：$(6,\ 5,\ 5),\ (5,\ 6,\ 5),\ (5,\ 5,\ 6)$の 3 通り。

ゆえに，求める確率は$\dfrac{3}{6^3}=\dfrac{1}{72}$

(2)

3 つの目は$6,\ 5,\ 5$， $6,\ 6,\ 5$， $6,\ 6,\ 6$の 3 通りあり,

それぞれの組合せの数は 3,3,1

よって，目の積が 150 以上になる目の組合せの数は$3+3+1=7$

ゆえに，求める確率は$\dfrac{7}{6^3}=\dfrac{7}{216}$