場合の数と確率 7　確率の基本性質

確率問題を解くコツ：すべてを区別する。

88

白玉をW_1, W_2, W_3，赤玉をR_1, R_2, R_3, R_4, R_5，青玉をB_1, B_2, B_3, B_4とし，
同色の玉も区別する。

(1)

解法 1

全事象の数

全事象を 12 個の玉から 4 個取り出す場合の数とすると，その数は${}_{12}\mathrm{C}_4$　・・・①

3 個以上赤玉が出るという事象の数

3 個赤玉が出る，4 個赤玉が出るという 2 つの事象に排反に分類できる。

3 個赤玉が出る事象の数

赤玉 5 個から 3 個と赤玉を除く 7 個から 1 個取り出す場合の数だから，${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_1$

4 個赤玉が出る事象の数

赤玉 5 個から 4 個取り出す場合の数だから，${}_5\mathrm{C}_4$

よって，${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_4$　・・・②

①，②より，3 個以上赤玉が出る確率は$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_1 + {}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \dfrac{5}{33}$

解法 2

3 個以上赤玉が出るという事象は，

3 個赤玉が出る，4 個赤玉が出るという 2 つの事象に排反に分類できる。

したがって，求める確率はそれぞれの確率の和となる。

3 個赤玉が出る確率

12 個の玉から 4 個取り出す事象の数（全事象の数）は${}_{12}\mathrm{C}_4$

3 個の赤玉を取り出す事象の数は赤玉 5 個から 3 個と赤玉を除く 7 個から 1 個取り出す事象の数だから，${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_1$

よって，確率は$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_7\mathrm{C}_1}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \dfrac{14}{99}$　・・・③

4 個赤玉が出る確率

同様にして，$\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_{12}\mathrm{C}_4} = \dfrac{1}{99}$　・・・④

③，④より，3 個以上赤玉が出る確率は$\dfrac{14}{99} + \dfrac{1}{99} = \dfrac{15}{99} = \dfrac{5}{33}$

(2)

(1)の解法 1 で解きます。

全事象の数

全事象を 12 個の玉から 4 個取り出す場合の数とすると，

その数は${}_{12}C_4 = 11 \cdot 9 \cdot 5$　・・・⑤

取り出した玉がどの色の玉も含む事象の数

取り出した白, 赤, 青の玉の数の組合せは$(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$に排反に分類できるから，

取り出した玉がどの色の玉も含む事象の数はそれぞれの事象の数の和である。

すなわち${}_3C_2 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 + {}_3C_1 \cdot {}_5C_1 + {}_4C_2 = 270$　・・・⑥

⑤，⑥より，取り出した玉がどの色の玉も含む確率は$\dfrac{270}{11 \cdot 9 \cdot 5} = \dfrac{6}{11}$

(3)

全事象は取り出した玉の色が 3 色の場合，2 色の場合，1 色の場合に排反に分類できる。

全事象の確率＝3 色の確率＋2 色の確率＋1 色の確率

全事象の確率は 1 だから，

2 色の確率＝1－（3 色の確率＋1 色の確率）　・・・⑦

3 色の確率

(2)より$\dfrac{6}{11}$　・・・⑧

1 色の確率

4 個取り出すから，3 個しかない白玉から白玉 4 個を取り出すのは不可能である。

したがって，赤玉だけまたは青玉だけの場合しかない。

よって，$\dfrac{{}_5C_4 + {}_4C_4}{{}_{12}C_4} = \dfrac{6}{11 \cdot 9 \cdot 5} = \dfrac{2}{11 \cdot 15}$　・・・⑨

⑦～⑨より，取り出した玉の色が 2 色である確率は$1 - \left(\dfrac{6}{11} + \dfrac{2}{11 \cdot 15}\right) = \dfrac{73}{165}$

89

「少なくとも」ときたらまずは余事象の利用

(1)

サイコロの目の出方はすべての目が異なる場合と少なくとも 2 個の目が等しい場合に排反に分類できるから，

少なくとも 2 個の目が等しい確率＝1－すべての目が異なる確率　・・・①

すべての目が異なる確率

3 個のサイコロをサイコロ A，サイコロ B，サイコロ C に区別すると，

サイコロの目の出方の総数は6^3，すべての目が異なる場合の数は$6\cdot 5\cdot 4$

よって，すべての目が異なる場合の確率は$\dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{6^3}=\dfrac{5}{9}$　・・・②

①，②より，少なくとも 2 個の目が等しい確率は$1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$

(2)

サイコロの目の出方は 3 個の目の積が偶数の場合と 3 個の目の積が奇数の場合に排反に分類できるから，3 個の目の積が偶数の確率＝1－3 個の目の積が奇数の確率　・・・③

3 個の目の積が奇数の確率

3 個のサイコロをサイコロ A，サイコロ B，サイコロ C に区別すると，

サイコロの目の出方の総数は6^3

3 個の目の積が奇数となるのは奇数の目しか出ない場合だから，その数は3^3

よって，3 個の目の積が奇数の確率は$\dfrac{3^3}{6^3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$　・・・④

③，④より，3 個の目の積が偶数の確率は$1-\dfrac{1}{8}=\dfrac{7}{8}$

90

2 個のサイコロをサイコロ 1，サイコロ 2 に区別する。

目の出方の総数を$n(U)$とすると，$n(U)=6^2=36$　・・・①

少なくとも 1 個は 1 の目が出る場合の数を$n(A)$とすると，

1 の目が出ない場合の数は$5^2=25$だから，$n(A)=36-25=11$　・・・②

出る目の和が奇数である場合の数を$n(B)$とすると，

サイコロ 1 が偶数でサイコロ 2 が奇数の場合とサイコロ 1 が奇数でサイコロ 2 が偶数の場合があるから，$n(B)=3\cdot 3\times 2=18$　・・・③

$n(A\cap B)$は 1 の目が出てかつ出る目の和が奇数の場合の数であり，

サイコロ 1 の目が 1 でサイコロ 2 の目が偶数の場合とサイコロ 1 の目が偶数でサイコロ 2 の目が奇数の場合があるから，$n(A\cap B)=1\cdot 3\times 2=6$　・・・④

少なくとも 1 個は 1 の目が出るか，または出る目の和が奇数である場合の数は$n(A\cup B)$

だから，②～④より，$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=11+18-6=23$

これと①より，求める確率は$\dfrac{23}{36}$

補足

まずそれぞれの確率を求めた後，

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{11}{36}+\dfrac{18}{36}-\dfrac{6}{36}=\dfrac{23}{36}$

としてもよい。

別解

表を作って解く

条件を満たすのは下表の○である。

目の出方（マス目の数）は 36 あり，そのうち○が 23 あるから，求める確率は$\dfrac{23}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○	○	○	○
2	○		○		○	
3	○	○		○		○
4	○		○		○	
5	○	○		○		○
6	○		○		○	

91

(1)

サイコロの目の出方は何回目かにその回の番号と同じ目がでる場合とどの回にもその回の番号と同じ目が出ない場合とに排反に分類できるから，

何回目かにその回の番号と同じ目がでる場合の数

＝目の出方の総数－どの回にもその回の番号と同じ目が出ない場合の数　・・・①

目の出方の総数＝6^3　・・・②

どの回にもその回の番号と同じ目が出ない場合の数

1 回目は 1 以外目かつ 2 回目は 2 以外目かつ 3 回目は 3 以外の目より，5^3　・・・③

①～③より，

何回目かにその回の番号と同じ目がでる場合の数＝6^3-5^3

よって，求める確率は$\dfrac{6^3-5^3}{6^3}=\dfrac{91}{216}$

(2)

1 回目は 1 以外の目かつ 2 回目は 1 と 2 以外の目かつ 3 回目は 1 と 3 以外の目より，

求める確率は$\dfrac{5\cdot 4\cdot 4}{6^3}=\dfrac{10}{27}$

92

ベン図を描いて考える。

(1)

$P(A\cup B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ より，

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=0.5+0.3-0.6=0.2$$

$P(A\cap\overline{B})$

$$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$$
$$=0.5-0.2$$
$$=0.3$$

$P(\overline{A}\cap B)$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.3-0.2$$
$$=0.1$$

(2)

A, B のどちらか一方だけ起こる事象：$(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

A, B のどちらか一方だけ起こる事象の確率

$$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)-P((A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B))$$

ここで，$(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)$ は空集合だから，$P((A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B))=0$

よって，

$$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=0.3+0.1+0$$
$$=0.4$$

または，

$$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=P(A\cup B)-P(A\cap B)$$
$$=0.6-0.2$$
$$=0.4$$