場合の数と確率 9　反復試行の確率

確率問題を解くコツ：すべてを区別する。

すべてを区別してもしなくても確率は変わらない。

たとえば，3 つのサイコロがあり，それらを区別してもしなくても確率は変わらない。

これと「場合の数は区別した方が求めやすい」ことから，確率問題を解くコツは，原則として，すべてを区別することである。

105

1 回の試行につき

当たりくじを引く確率は $\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

はずれくじを引く確率は当たりくじを引く事象の余事象の確率より $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

または $\dfrac{20-5}{20}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

余事象の確率

余事象は 5 回ともはずれくじを引くまたは当たりくじを 1 回だけ引く事象だから，

余事象の確率＝5 回ともはずれくじを引く確率＋当たりくじを 1 回だけ引く確率

5 回ともはずれくじを引く確率

5 回はずれくじを引く場合の数は ${}_5C_5$

各々の場合の確率は $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5$

よって，${}_5C_5\left(\dfrac{3}{4}\right)^5$

当たりくじを 1 回だけ引く確率

何回目に当たりくじを引くかの場合の数は ${}_5C_1$

補足

当たりを○，はずれを×とすると，

○××××，×○×××，××○××，×××○×，××××○

各々の場合の確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

補足

たとえば，○××××の場合の確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

これは他の場合も同じである。

よって，${}_5C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^4$

したがって，余事象の確率は

$$
\begin{aligned}
{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{3}{4}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4 &= \frac{3^5}{4^5}+5\cdot\frac{3^4}{4^5} \\
&= \frac{3\cdot 3^4+5\cdot 3^4}{1024} \\
&= \frac{8\cdot 3^4}{4^2\cdot 4^3} \\
&= \frac{3^4}{2\cdot 4^3} \\
&= \frac{81}{128}
\end{aligned}
$$

ゆえに，求める確率は$1-\frac{81}{128}=\frac{47}{128}$　・・・(答)

106

1 回の試行につき

3 または 6 が出る確率は$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3 と 6 以外の目が出る確率は$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

3 または 6 が 4 回中 3 回出る確率

どの回に 3 または 6 が出るかの場合の数は${}_4\mathrm{C}_3$　・・・①

補足

3 または 6 が出た場合を○，3 と 6 以外の目が出た場合を×とすると，

×○○○，○×○○，○○×○，○○○×

各場合の確率は$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$　・・・②

補足

たとえば，×○○○の場合の確率は$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

これは他の場合でも同じである。

①，②より，3 または 6 が 4 回中 3 回出る確率は${}_4\mathrm{C}_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{3^4}$　・・・③

3 または 6 が 4 回中 4 回出る確率

同様にして，${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{3^4}$　・・・④

3 または 6 が 4 回中 3 回以上出る確率

③＋④より，$\dfrac{8}{3^4}+\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{9}{3^4}=\dfrac{1}{9}$

3 または 6 を 4 回中 3 回以上出す確率は A 君も B 君も $\dfrac{1}{9}$ だから，

A 君が 3 または 6 を 4 回中 3 回以上出し且つ

B 君が 3 または 6 を 4 回中 3 回以上出す確率は $\dfrac{1}{9}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{81}$ ・・・(答)

107

・1,2,3,4 の目が出る確率は $\dfrac{2}{3}$，5,6 の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$

・1,2,3,4 の目が出た回数を x，5,6 の目が出た回数を y とすると，

$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=p \end{cases}$ より，$x=\dfrac{p+4}{3}$, $y=\dfrac{-p+8}{3}$

(1)

$x=\dfrac{8+4}{3}=4,\ y=0$ より，${}_4C_4\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$ ・・・(答)

(2)

$x=\dfrac{2+4}{3}=2,\ y=2$ より，${}_4C_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$ ・・・(答)

(3)

$x=\dfrac{0+4}{3}=\dfrac{4}{3}$

x は 0 以上 4 以下の整数であることが必要である。

よって，$p=0$ になることはない。

ゆえに，$p=0$ になる確率は 0 ・・・(答)

108

・1,2 の目が出る確率は $\dfrac{1}{3}$，3～6 の目が出る確率は $\dfrac{2}{3}$

・1,2 の目が出た回数を x，3～6 の目が出た回数を y とすると，

$\begin{cases} x+y=6 \\ 50x-20y=160 \end{cases}$ より，$x=4,\ y=2$

よって，求める確率は ${}_6C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{20}{243}$ ・・・(答)

109

製品が不良品である確率は$\frac{3}{10}$，製品が不良品でない確率は$\frac{7}{10}$

(1)

${}_3C_2\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{189}{1000}$ ・・・(答)

(2)

余事象の確率は 2 個または 0 個の不良品を含む確率である。

2 個の不良品を含む確率は，(1)より，$\frac{189}{1000}$

0 個の不良品を含む確率は${}_3C_0\left(\frac{7}{10}\right)^3=\frac{343}{1000}$

よって，余事象の確率は$\frac{189}{1000}+\frac{343}{1000}=\frac{133}{250}$

ゆえに，求める確率は$1-\frac{133}{250}=\frac{117}{250}$ ・・・(答)

110

(1)

C 地点を通るのは，東へ 2 筋，北へ 1 筋進んだ場合である。

よって，求める確率は${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$ ・・・(答)

(2)

甲と乙が CD 間ですれ違うのは，

甲が A→C→D と進み且つ乙が B→D→C と進んだ場合である。

甲が A→C→D と進む確率

A→C に進む確率×C→D に進む確率より，甲が A→C→D と進む確率＝$\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

乙が B→D→C と進む確率

D 地点を通るのは，西へ 1 筋，南へ 2 筋進んだ場合である。

よって，B→D に進む確率は${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$

これと，乙が B→D→C と進む確率＝B→D に進む確率×D→C に進む確率より，

乙が B→D→C と進む確率＝$\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

よって，求める確率は$\frac{3}{16}\times\frac{3}{16}=\frac{9}{256}$ ・・・(答)

111

(1)

4 回目までに表が 1 回，裏が 3 回出て，5 回目に裏が出る場合だから，

求める確率＝4 回目までに表が 1 回，裏が 3 回出る確率×5 回目に裏が出る確率

$$= {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}$$ ・・・(答)

(2)

B が勝つ確率

B が勝ったとき，表が出た回数は 0 回または 1 回である。

したがって，B は 4 回目または 5 回目に勝つ。

B が 4 回目に勝つ確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

B が 5 回目に勝つ確率は，(1)より，$\frac{1}{8}$

よって，B が勝つ確率，すなわち B が 4 回目または 5 回目に勝つ確率は

$\frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$ ・・・(答)

A が勝つ確率

引き分けることがないから，

B が勝つ確率の余事象の確率は B が負ける確率，すなわち A が勝つ確率である。

よって，A が勝つ確率は $1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}$ ・・・(答)

112

1 の目が出る確率＝2 の目が出る確率＝$\frac{1}{6}$

1,2 以外の目が出る確率＝$\frac{2}{3}$

7 回中 1 の目が 3 回，2 の目が 2 回，その他の目が 2 回出る順序の数＝$\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$

よって，求める確率は $\frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{35}{2916}$ ・・・(答)