

## 場合の数と確率 演習題

1

$$\begin{aligned}
 n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap \overline{B}) &= \{n(B) - n(A \cap B)\} + \{n(A) - n(A \cap B)\} \\
 &= n(A) + n(B) - 2n(A \cap B) \\
 &= 10 - 2n(A \cap B)
 \end{aligned}$$

ここで,  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$  より,

$$\begin{aligned}
 n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\
 &= 10 - 7 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 n(\overline{A} \cap B) + n(A \cap \overline{B}) &= 10 - 2n(A \cap B) \\
 &= 10 - 2 \cdot 3 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

2

それぞれの本について「取り出す」、「取り出さない」の2通りがあるから,

取り出し方は全部で  $2^7$  通りある。

このうち1冊も取り出さない場合の数は1

よって, 少なくとも1冊以上取り出す場合の数は  $2^7 - 1 = 127$

3

三角形をつくるには, 8本の直線から3直線を選ぶ必要があり, その場合の数は  ${}_8C_3$ 。

このうち平行な2直線と他の6直線のうちの1直線の組合せでは三角形ができない。

このような組合せの数は6。

よって,  ${}_8C_3 - 6 = 50$

4

同じ色の玉も区別する。つまり, すべての玉を区別する。

(1)

すべて赤玉またはすべて青玉またはすべて黄玉の確率より,

$$\frac{{}_5C_3}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_3C_3}{{}_{15}C_3} + \frac{{}_7C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{46}{455}$$

(2)

赤玉または青玉から3個取り出す確率より,  $\frac{{}_8C_3}{{}_{15}C_3} = \frac{8}{65}$

(3)

赤玉1個と青玉1個と黄玉1個を取り出す確率より,  $\frac{{}_5C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_7C_1}{{}_{15}C_3} = \frac{3}{13}$

(4)

赤玉 4 個の場合の確率

$$\frac{{}_5C_4}{{}_{15}C_4} = \frac{5}{15 \cdot 13 \cdot 7} = \frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 7}$$

赤玉 3 個と青玉黄玉から 1 個の場合の確率

$$\frac{{}_5C_3 \cdot {}_{10}C_1}{{}_{15}C_4} = \frac{10 \cdot 10}{15 \cdot 13 \cdot 7} = \frac{20}{3 \cdot 13 \cdot 7}$$

赤玉 2 個, 青玉 1 個, 黄玉 1 個の場合の確率

$$\frac{{}_5C_2 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_7C_1}{{}_{15}C_4} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 7}{15 \cdot 13 \cdot 7} = \frac{42}{3 \cdot 13 \cdot 7}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{1}{3 \cdot 13 \cdot 7} + \frac{20}{3 \cdot 13 \cdot 7} + \frac{42}{3 \cdot 13 \cdot 7} = \frac{3}{13}$$

5

和が奇数になるのは奇数が 3 個の場合または奇数が 1 個で偶数が 2 個の場合である。

 $n=6$  のとき

$$1,2,3,4,5,6 \text{ より, } \frac{{}_3C_3}{{}_6C_3} + \frac{{}_3C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_6C_3} = \frac{1}{2}$$

 $n=7$  のとき

$$1,2,3,4,5,6,7 \text{ より, } \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} + \frac{{}_4C_1 \cdot {}_3C_2}{{}_7C_3} = \frac{16}{35}$$

6

(1)

当たりくじを引く場合またはチャンスくじを引きかつ当たりくじを引く場合があるから,

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(2)

$$\text{あたり} \rightarrow \text{あたりの場合の確率} : \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$\text{チャンス} \rightarrow \text{あたり} \rightarrow \text{あたりの場合の確率} : \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{120}$$

$$\text{あたり} \rightarrow \text{チャンス} \rightarrow \text{あたりの場合の確率} : \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{8} = \frac{1}{120}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{15} + \frac{1}{120} + \frac{1}{120} = \frac{1}{12}$$

(3)

はずれ→あたりの場合の確率： $\frac{6}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{5}$

チャンス→はずれ→あたりの場合の確率： $\frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{40}$

はずれ→チャンス→あたりの場合の確率： $\frac{6}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{40}$

よって、 $\frac{1}{5} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{4}$

7

白球の数を  $n$  ( $1 \leq n \leq 10$ ) とすると、赤玉が出ない確率は  $n$  を用いて  $\frac{{}_n C_3}{{}_{10} C_3}$  と表せる。

よって、 $\frac{{}_n C_3}{{}_{10} C_3} = \frac{7}{10}$

これと  $\frac{{}_n C_3}{{}_{10} C_3} = \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2}} = \frac{n(n-1)(n-2)}{10 \cdot 9 \cdot 8}$  より、 $\frac{n(n-1)(n-2)}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{7}{10}$

すなわち  $n(n-1)(n-2) = 9 \cdot 8 \cdot 7$

これと  $1 \leq n \leq 10$  より、 $n = 9$

ゆえに、9 個

8

(1)

例えば番号が 1 と 2 の 2 人が自分の番号ともらったカードの数字が一致したとすると、番号 4, 5, 6 の 3 人がもらうカードの数字は (4, 5, 3) または (5, 3, 4) の 2 通りある。

これと自分の番号と数字が一致する 2 人の選び方は  ${}_5 C_2$  通りあることから、

カードの配り方は  $2 \cdot {}_5 C_2 = 20$  通り

(2)

カードの配り方は全部で  $5! = 120$  通りある。

これらのうち、

もらったカードの数字と自分の番号の数字が一致する人が 1 人だけの場合の数

例えば番号が 1 の人だけが一致したとすると、カードの配り方は

(1, 3, 2, 5, 4), (1, 3, 4, 5, 2), (1, 3, 5, 2, 4), (1, 4, 2, 5, 3), (1, 4, 5, 2, 3), (1, 4, 5, 3, 2),  
(1, 5, 2, 3, 4), (1, 5, 4, 2, 3), (1, 5, 4, 3, 2)

の 9 通り。

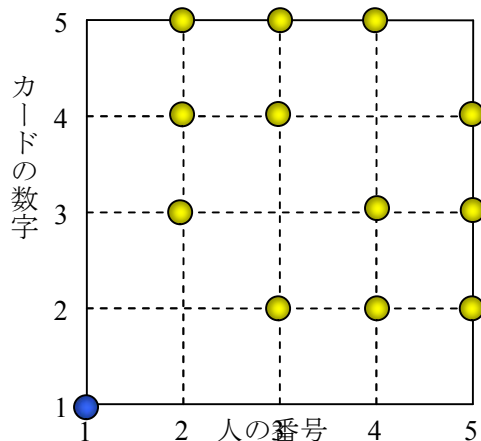
一致する人の選び方は 5 通りあるから、全部で  $5 \times 9 = 45$  通り

## 補足

下図を利用すると数字の組合せを見つけやすい。

これを使うと直接求めることも可能である。

番号が 1 の人だけが一致する場合の組合せ早見図



もらったカードの数字と自分の番号の数字が一致する人が 2 人だけの場合の数

(1)より 20 通り

もらったカードの数字と自分の番号の数字が一致する人が 3 人の場合の数

例えば番号が 1,2,3 の人が一致したとすると, (1, 2, 3, 5, 4)の 1 通り

一致する人の選び方は  ${}_5C_3 = 10$  通りあるから, 全部で  $1 \times 10 = 10$  通り

もらったカードの数字と自分の番号の数字が一致する人が 4 人の場合の数

例えば番号が 1,2,3,4 の人が一致したとすると, (1, 2, 3, 4, 5)となってしまう,

5 人とも一致してしまう。これは他の 4 人が一致したとしても同じだから, 0 通り

もらったカードの数字と自分の番号の数字が全員一致する場合の数

(1,2,3,4,5)の 1 通り

よって,

もらったカードの数字と自分の番号の数字が一致する人が 1 人もいないようなカードの

配り方は  $120 - (45 + 20 + 10 + 1) = 44$  通り

## 9

## (1)

A に入る男子 3 人選び方:  ${}_5C_3 = 10$  通り

↓

残り 6 人から B に入る 3 人の選び方:  ${}_6C_3 = 20$  通り

↓

残り 3 人から C に入る 3 人の選び方: 1 通り

よって,  $10 \times 20 \times 1 = 200$  通り

(2)

女子は 4 人だから、女子だけが入る部屋は 1 室しかない。

したがって、例えば A に女子だけが入るとすると、

A に入る女子の選び方： ${}_4C_3 = 4$  通り

↓

残り 6 人から B に入る 3 人の選び方： ${}_6C_3 = 20$  通り

↓

残り 3 人から C に入る 3 人の選び方：1 通り

よって、 $4 \times 20 \times 1 = 80$  通り

B に女子だけが入る場合も C に女子だけが入る場合もそれぞれ 80 通りだから、

全部で  $80 \times 3 = 240$  通り

(3)

解法 1

A 室に男子 1, 女子 2

B 室に男子 2, 女子 1

C 室に男子 2, 女子 1

となるような入り方は  $({}_5C_1 \cdot {}_4C_2) \cdot ({}_4C_2 \cdot {}_2C_1) \cdot ({}_2C_2 \cdot {}_1C_1) = 360$  通り

男子 1, 女子 2 が B 室, C 室の場合もそれぞれ 360 通りだから、

全部で  $360 \times 3 = 1080$  通り

解法 2

女子が 1 人も入らない部屋ができるような入り方と男子だけが入る部屋ができるような入り方は同じである。

男子だけが入る部屋ができるような入り方は「A に男子だけが入る」、「B に男子だけが入る」、「C に男子だけが入る」場合に分類でき、(1)より、それぞれ 200 通りあるから、全部で 600 通り。

よって、女子が 1 人も入らない部屋ができるような入り方も 600 通り。

入り方は全部で  ${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3 = 1680$  通りあるから、

各室に女子が少なくとも 1 人入る入り方は  $1680 - 600 = 1080$  通り

(4)

A 室に男子 1, 女子 2

B 室に男子 1, 女子 2

C 室に男子 3, 女子 0

となるような入り方は  $({}_5C_1 \cdot {}_4C_2) \cdot ({}_4C_1 \cdot {}_2C_2) \cdot ({}_3C_3 \cdot {}_0C_0) = 120$  通り

男子 3, 女子 0 が A 室, B 室の場合もそれぞれ 120 通りだから、 $120 \times 3 = 360$  通り

10

8 以上の番号を含む事象を  $A$ , 2 以下の番号を含む事象を  $B$  とすると,

求める確率は  $\frac{n(A \cap B)}{n(U)}$

$$n(A) = n(U) - n(\overline{A}) = {}_{10}C_3 - {}_7C_3$$

$$n(B) = n(U) - n(\overline{B}) = {}_{10}C_3 - {}_8C_3$$

$$n(A \cup B) = n(U) - n(\overline{A \cup B}) = {}_{10}C_3 - {}_5C_3$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{n(A \cap B)}{n(U)} &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cup B)}{n(U)} \\ &= \frac{({}_{10}C_3 - {}_7C_3) + ({}_{10}C_3 - {}_8C_3) - ({}_{10}C_3 - {}_5C_3)}{{}_{10}C_3} \\ &= \frac{{}_{10}C_3 - {}_7C_3 - {}_8C_3 + {}_5C_3}{{}_{10}C_3} \\ &= \frac{120 - 35 - 56 + 10}{120} \\ &= \frac{39}{120} \\ &= \frac{13}{40} \end{aligned}$$

11

(1)

勝者数が 1 人

$$1 \text{ 人がパーで } 3 \text{ 人がグーだから, } {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}$$

勝者数が 2 人

$$2 \text{ 人がパーで } 2 \text{ 人がグーだから, } {}_4C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}$$

勝者数が 3 人

$$3 \text{ 人がパーで } 1 \text{ 人がグーだから, } {}_4C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

(2)

パーを出した者が勝者になる確率は, (1)より,  $\frac{4}{81} + \frac{2}{27} + \frac{4}{81} = \frac{14}{81}$

同様に, グーを出した者が勝者になる確率もチョキを出した者が勝者になる確率も  $\frac{14}{81}$

よって, 求める確率は  $\frac{14}{81} \times 3 = \frac{14}{27}$

## 12

## 解法 1

3 回のうち 2 回目までに少なくとも 1 回は赤玉が取り出される事象を  $A$

3 回目に赤玉が取り出される事象を  $B$  とすると,

求める確率は  $P_A(B)$  だから,  $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P(A)$  について

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{8} = \frac{39}{64}$$

補足

$$\begin{pmatrix} R \\ W \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{8}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{8}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3+5}{8+8}} \rightarrow \text{より},$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \right) \\ &= \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{8} \end{aligned}$$

$P(A \cap B)$  について

始め→赤→白→赤の場合

$$\begin{pmatrix} R \\ W \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{6}{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{8}} \rightarrow \text{より}, \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{2}{8}$$

始め→白→赤→赤の場合

$$\begin{pmatrix} R \\ W \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{5}{8}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{8}} \rightarrow \text{より}, \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8}$$

始め→赤→白→赤の場合

$$\begin{pmatrix} R \\ W \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{3}{8}} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{8}} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{+W} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}} \rightarrow \text{より}, \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{8}$$

よって,

$$P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 6 \cdot 2}{8 \cdot 8 \cdot 8} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 8 \cdot 8} + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{72}{8 \cdot 8 \cdot 8}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}P_A(B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\&= \frac{\frac{72}{64}}{\frac{39}{64}} \\&= \frac{3}{13}\end{aligned}$$

## 解法 2

3 回取り出す事象を  $U$ ,

3 回のうち 2 回目までに少なくとも 1 回は赤玉が取り出される事象を  $A$ ,

3 回目に赤玉が取り出される事象を  $B$  とすると, 求める確率は  $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

これと

$$n(A) = n(U) - n(\overline{A}) = 8^3 - 5^3 = 8 \cdot 39$$

$$n(A \cap B) = 3 \cdot 6 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$$

$$\text{より, } \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{72}{8 \cdot 39} = \frac{3}{13}$$