

2 次関数 演習問題

14

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= 4x^2 + 8mx + 4m \\
 &= 4(x^2 + 2mx) + 4m \\
 &= 4(x + m)^2 - 4m^2 + 4m
 \end{aligned}$$

よって、 $x = -m$ で最小値 $-4m^2 + 4m$ をとる。

ゆえに、 $l = -4m^2 + 4m$

(2)

$$\begin{aligned}
 l &= -4m^2 + 4m \\
 &= -4m(m - 1)
 \end{aligned}$$

より、

$l > 0$ であるための必要十分条件は $-4m(m - 1) > 0$ すなわち $m(m - 1) < 0 \quad \therefore 0 < m < 1$

(3)

$$\begin{aligned}
 l &= -4m^2 + 4m \\
 &= -4\left(m^2 - m\right) \\
 &= -4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1
 \end{aligned}$$

よって、 $m = \frac{1}{2}$ のとき l は最大値 1 をとる。

(4)

$$n = f(m) = -4m^2 + 4m + a$$

m 軸すなわち $n = 0$ と 1 点で接するための必要十分条件は

m の 2 次方程式 $-4m^2 + 4m + a = 0$ が重解をもつことである。

そこで、この方程式の判別式を D とすると、

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot a = 16 + 16a$$

重解をもつのは $D = 0$ のときだから、 $16 + 16a = 0 \quad \therefore a = -1$

別解

$n = f(m) = -4m^2 + 4m + a$ は下に凸な放物線だから、

m 軸と 1 点で接するための必要十分条件は $f(m)$ の最小値が 0 となることである。

$$\begin{aligned}
 f(m) &= -4m^2 + 4m + a \\
 &= -4(m^2 - m) + a \\
 &= -4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 + a
 \end{aligned}$$

より、 $f(m)$ の最小値は $1 + a$

よって、 $1 + a = 0$ より、 $a = -1$

15

(1)

$f(x) = x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 + 2k - 4$ とおくと,

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

したがって, $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 + 2k - 4 < 0$ の解が存在するための必要十分条件は

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と 2 つの異なる共有点をもつことである。

$y = f(x)$ のグラフが x 軸と 2 つの異なる共有点をもつための必要十分条件は

$x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 + 2k - 4 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつことである。

よって, $x^2 - 2(k-1)x + 2k^2 + 2k - 4 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めればよい。

そこで, この方程式の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} D &= \{-2(k-1)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2k^2 + 2k - 4) \\ &= -4\{(k-1)^2 + (2k^2 + 2k - 4)\} \\ &= -4(k^2 + 4k - 5) \\ &= -4(k+5)(k-1) \end{aligned}$$

異なる 2 つの実数解をもつのは $D > 0$ のときだから, $-4(k+5)(k-1) > 0$

すなわち $(k+5)(k-1) < 0 \quad \therefore -5 < k < 1$

補足

x の係数が 2 の積になっているある場合の判別式について

$ax^2 + 2b'x + c = 0$ の判別式を D とすると,

$$D = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) \text{ より, } \frac{D}{4} = b'^2 - ac$$

(2)

$f(1) < 0$ であればよい。

$f(1) = 2k^2 + 4k - 5$ より, $2k^2 + 4k - 5 < 0$

これと $2k^2 + 4k - 5 = 0$ の解は $k = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$ であることから,

$$\frac{-2 - \sqrt{14}}{2} < k < \frac{-2 + \sqrt{14}}{2}$$

16

 $-2 \leq x < -1$ のとき

$$\begin{aligned}
 y &= |x+1| + |x-1| + |x-2| \\
 &= -(x+1) + \{-(x-1)\} + \{-(x-2)\} \\
 &= -3x+2
 \end{aligned}$$

 $-1 \leq x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 y &= |x+1| + |x-1| + |x-2| \\
 &= (x+1) + \{-(x-1)\} + \{-(x-2)\} \\
 &= -x+4
 \end{aligned}$$

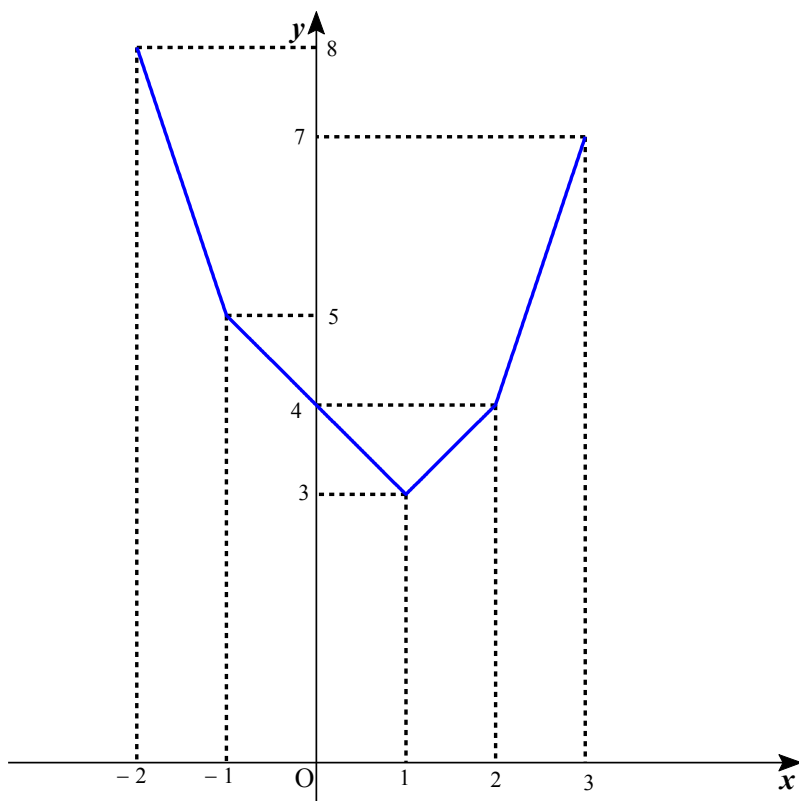
 $-1 \leq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 y &= |x+1| + |x-1| + |x-2| \\
 &= (x+1) + (x-1) + \{-(x-2)\} \\
 &= x+2
 \end{aligned}$$

 $2 \leq x \leq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
 y &= |x+1| + |x-1| + |x-2| \\
 &= (x+1) + (x-1) + (x-2) \\
 &= 3x-2
 \end{aligned}$$

よって、グラフは下図のようになる。

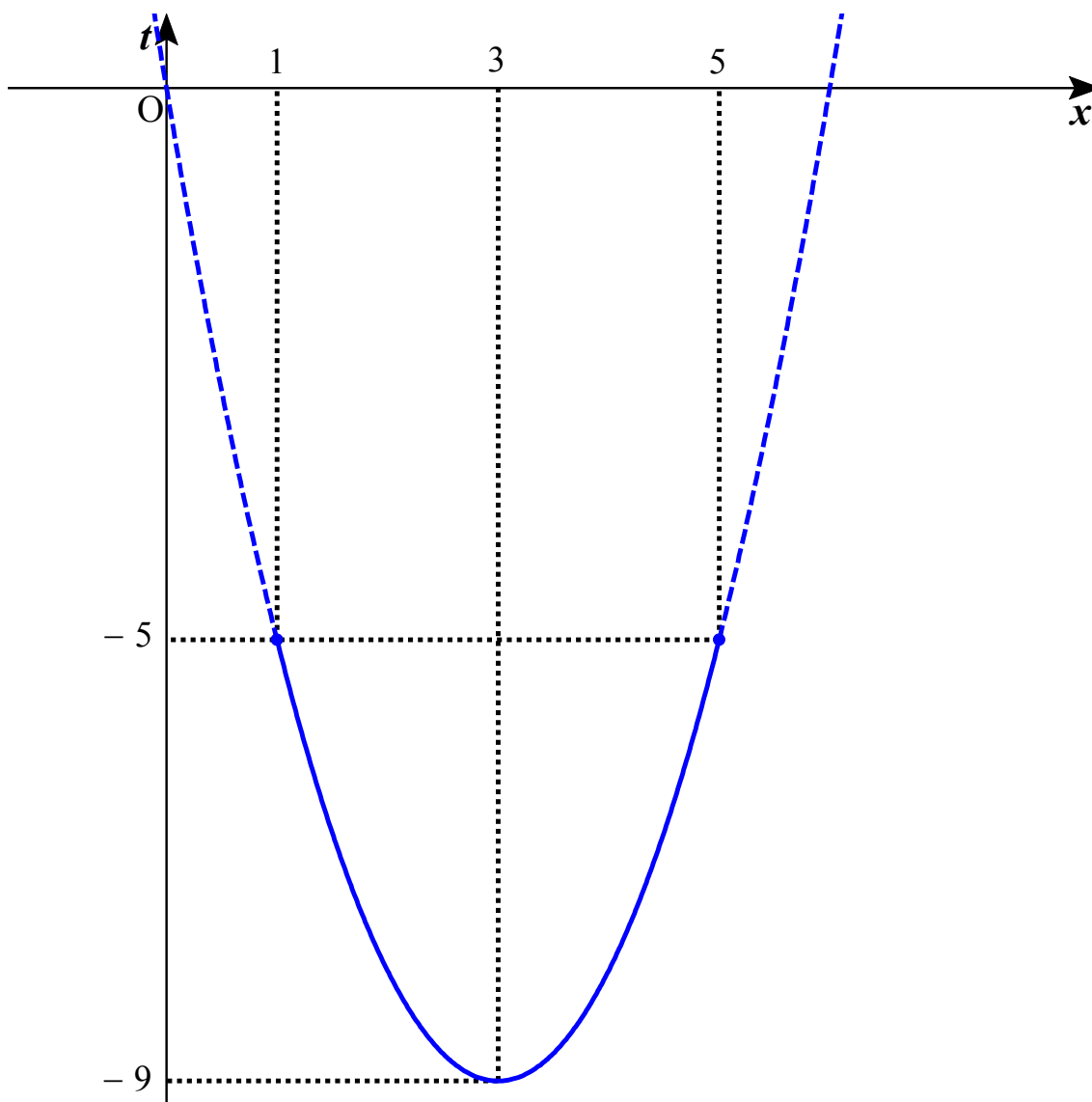
ゆえに、 $x = -2$ で最大値 8, $x = 1$ で最小値 3 をとる。

17

(1)

$t = x^2 - 6x$ ($1 \leq x \leq 5$) とおくと, $t = (x-3)^2 - 9$ ($1 \leq x \leq 5$) より,

$t = x^2 - 6x$ ($1 \leq x \leq 5$) のグラフは下図実線部分となるから, その値域は $-9 \leq t \leq -5$



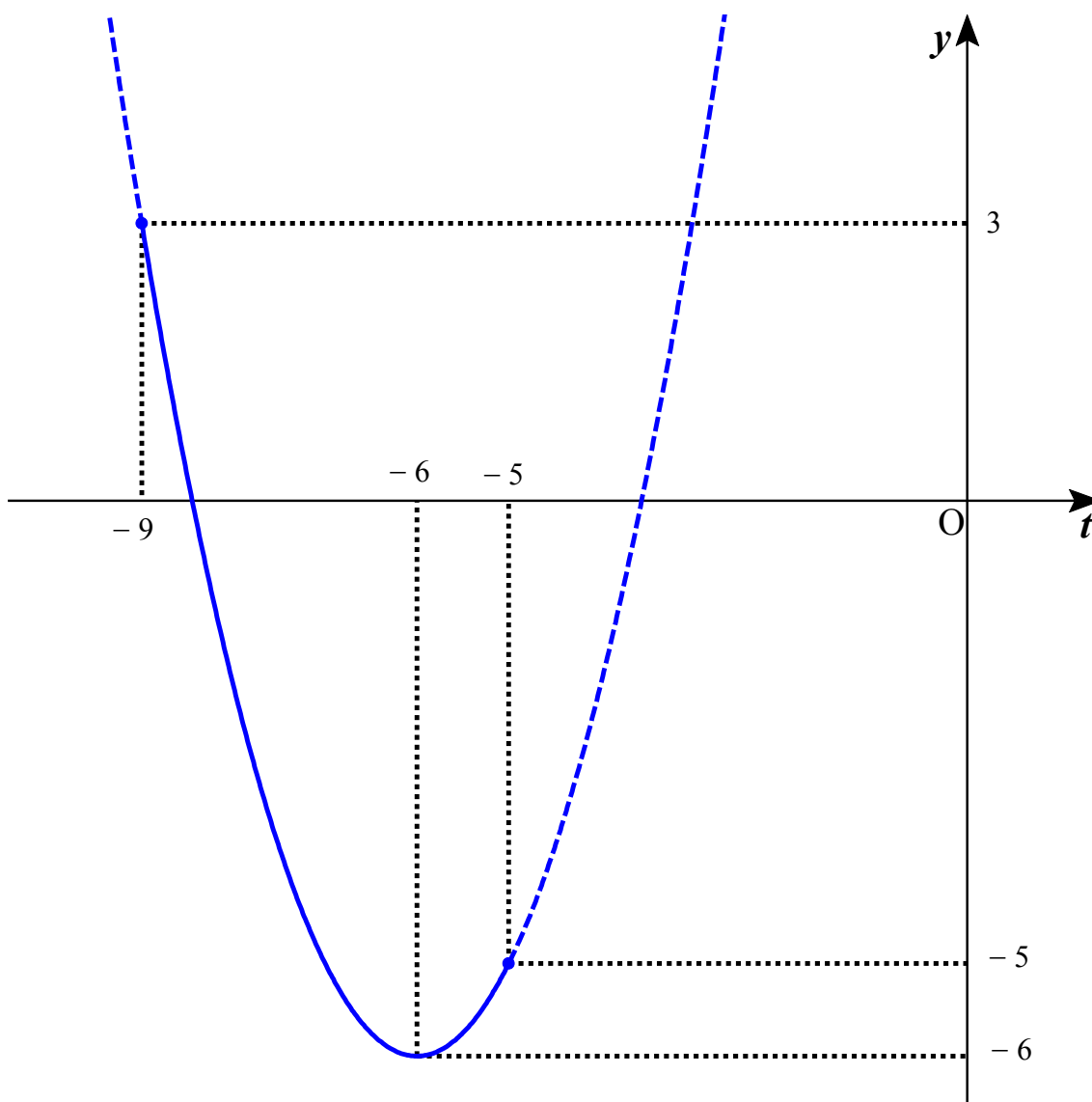
よって, $y = t^2 + 12t + 30$ ($-9 \leq t \leq -5$) の値域を求めればよく,

$$y = t^2 + 12t + 30$$

$$= (t+6)^2 - 6$$

より,

そのグラフは次図実線部分となるから, 求める値域は $-6 \leq y \leq 3$



(2)

与式を x について整理すると,

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2xy + 5y^2 + 6x - 14y + 5 &= x^2 - 2yx + 6x + 5y^2 - 14y + 5 \\
 &= x^2 - 2(y-3)x + 5y^2 - 14y + 5 \\
 &= \{x - (y-3)\}^2 - (y-3)^2 + 5y^2 - 14y + 5 \\
 &= \{x - (y-3)\}^2 + 4y^2 - 8y - 4 \\
 &= \{x - (y-3)\}^2 + 4(y^2 - 2y) - 4 \\
 &= \{x - (y-3)\}^2 + 4(y-1)^2 - 8
 \end{aligned}$$

これと $\{x - (y-3)\}^2 \geq 0$, $(y-1) \geq 0$ より,

与式は, $x = y-3$ かつ $y-1=0$ で, すなわち $x=-2$, $y=1$ で最小値 -8 をとる。

18

(1)

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) &= x^2 - (a-2)x + 3 - (-x^2 + ax + a - 2) \\ &= 2x^2 - 2(a-1)x - a + 5 \end{aligned}$$

$$f(x) < g(x) \text{ より, } g(x) - f(x) > 0$$

$$\text{よって, } 2x^2 - 2(a-1)x - a + 5 > 0$$

ここで, $y = g(x) - f(x)$ とおくと, $y = g(x) - f(x)$ のグラフは下に凸の放物線だから,

$2x^2 - 2(a-1)x - a + 5 > 0$ のとき $y = g(x) - f(x)$ は x 軸と共有点をもたない。

これは $2x^2 - 2(a-1)x - a + 5 = 0$ が実数解をもたないことと同値だから,

$2x^2 - 2(a-1)x - a + 5 = 0$ が実数解をもたないときの定数 a の範囲を求めればよい。

そこで, この方程式の判別式を D とすると,

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a-1)^2 - 2(-a+5) \\ &= a^2 - 9 \\ &= (a+3)(a-3) \end{aligned}$$

これと, 実数解をもたない条件 $D < 0$ より, $(a+3)(a-3) < 0 \quad \therefore -3 < a < 3$

(2)

$f(x)$ の最大値 $< g(x)$ の最小値 が成り立てばよい。

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + ax + a - 2 \\ &= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + a - 2 \\ &= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2 + 4a - 8}{4} \end{aligned}$$

より, $f(x)$ の最大値は $\frac{a^2 + 4a - 8}{4}$

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - (a-2)x + 3 \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-2}{2}\right)^2 + 3 \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 - \frac{(a-2)^2}{4} + 3 \\ &= \left(x - \frac{a-2}{2}\right)^2 + \frac{-a^2 + 4a + 8}{4} \end{aligned}$$

より, $g(x)$ の最小値は $\frac{-a^2 + 4a + 8}{4}$

よって, $\frac{a^2 + 4a - 8}{4} < \frac{-a^2 + 4a + 8}{4}$ これより, $a^2 < 8 \quad \therefore -2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$

19

(1)

$$y = x^2 + px + q$$

$$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

より, 軸 $x = a$ を p の式で表すと $x = -\frac{p}{2}$

よって, $-\frac{p}{2} = a$ すなわち $p = -2a$ $\cdots$ ①

放物線 C は点 $(1, 9)$ を通るから, $9 = 1 + p + q$ $\therefore q = -p + 8$ $\cdots$ ②

①, ②より, $q = 2a + 8$

ゆえに, $p = -2a, q = 2a + 8$

(2)

(1)より放物線 C の式は a を用いて $y = x^2 - 2ax + 2a + 8$ と表せる。

放物線 C は下に凸の放物線だから, x 軸より上側にあるならば x 軸と共有点をもたない。

これは $x^2 - 2ax + 2a + 8 = 0$ が実数解をもたないことと同値である。

そこで, 判別式を D とすると, $D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a + 8) = 4(a + 2)(a - 4)$

補足: または, x の係数が 2 の積になっているから, $\frac{D}{4} = a^2 - 1 \cdot (2a + 8) = (a + 2)(a - 4)$

実数解をもたないのは $D < 0$ のときであるから, $4(a + 2)(a - 4) < 0$ $\therefore -2 < a < 4$

(3)

条件より, C と x 軸との共有点の x 座標の差の大きさは 8 である。

これは, $x^2 - 2ax + 2a + 8 = 0$ の異なる 2 実数解の差の大きさが 8 であることと同値である。

異なる 2 実数解の差の大きさについては, 解の公式より,

$$x = a - \sqrt{a^2 - 2a - 8}, a + \sqrt{a^2 - 2a - 8} \quad (\text{ただし, } a^2 - 2a - 8 > 0 \text{ すなわち } a < -2, 4 < a)$$

$$\text{よって, } a + \sqrt{a^2 - 2a - 8} - \left(a - \sqrt{a^2 - 2a - 8}\right) = 8 \quad (a < -2, 4 < a) \text{ より,}$$

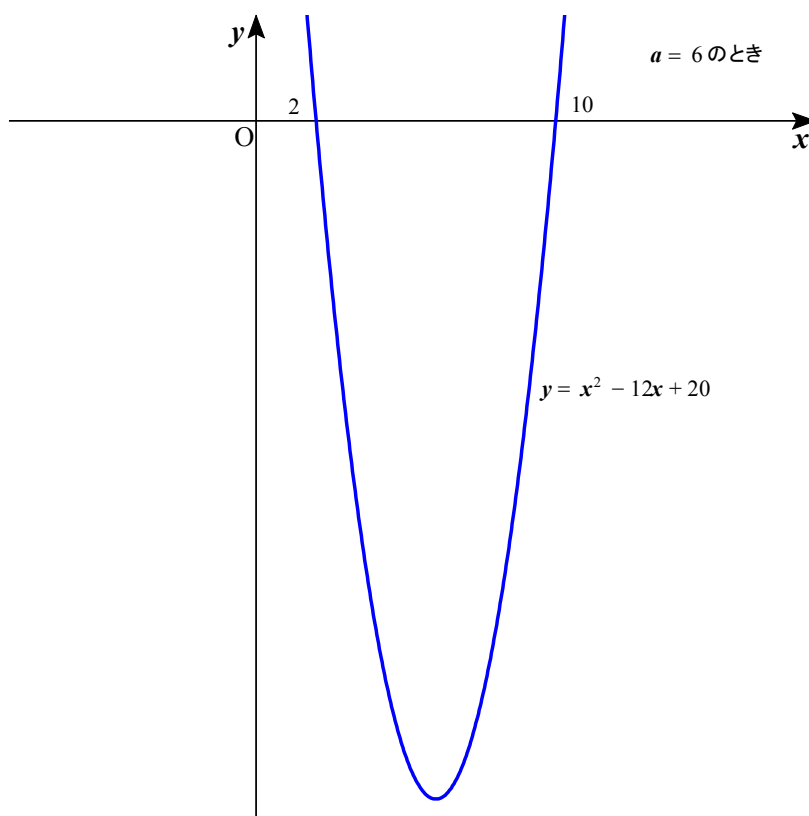
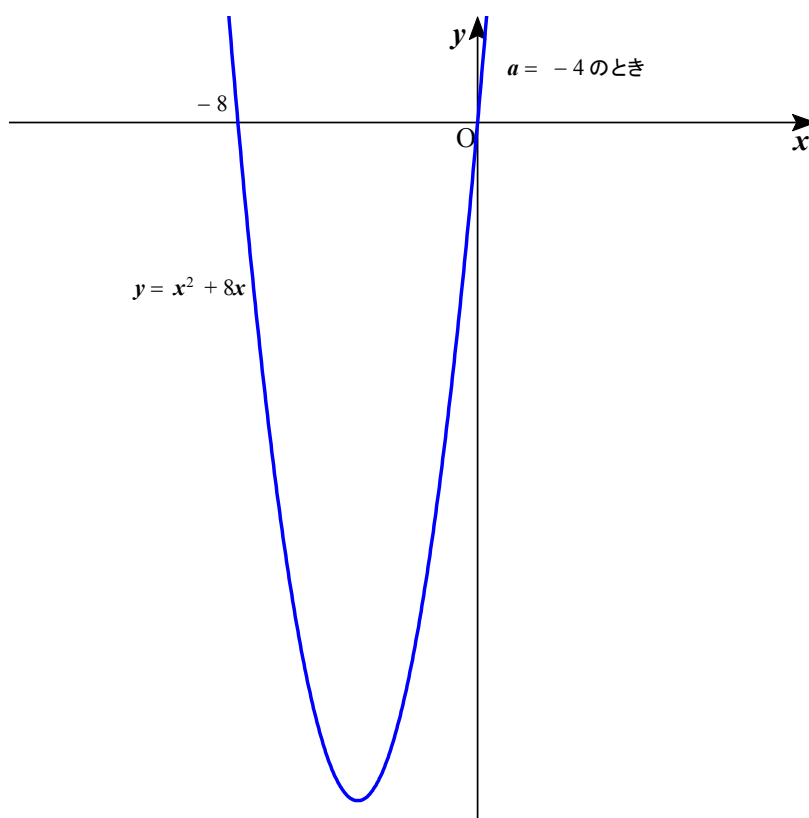
$$\sqrt{(a + 2)(a - 4)} = 4 \quad (a < -2, 4 < a)$$

$$\sqrt{(a + 2)(a - 4)} = 4 \text{ の両辺を 2 乗し, } a \text{ について整理すると } a^2 - 2a - 24 = 0$$

$$\text{よって, } (a + 4)(a - 6) = 0 \text{ より, } a = -4, 6$$

これは $a < -2, 4 < a$ を満たす。

ゆえに, $a = -4, 6$



(4)

$y = x^2 - 2ax + 2a + 8$ は下に凸の放物線だから、 x 軸と異なる 2 点で交わるためには、
軸 $x = a > 3$. . . ③

x 軸と異なる 2 点で交わる。すなわち $D > 0$. . . ④

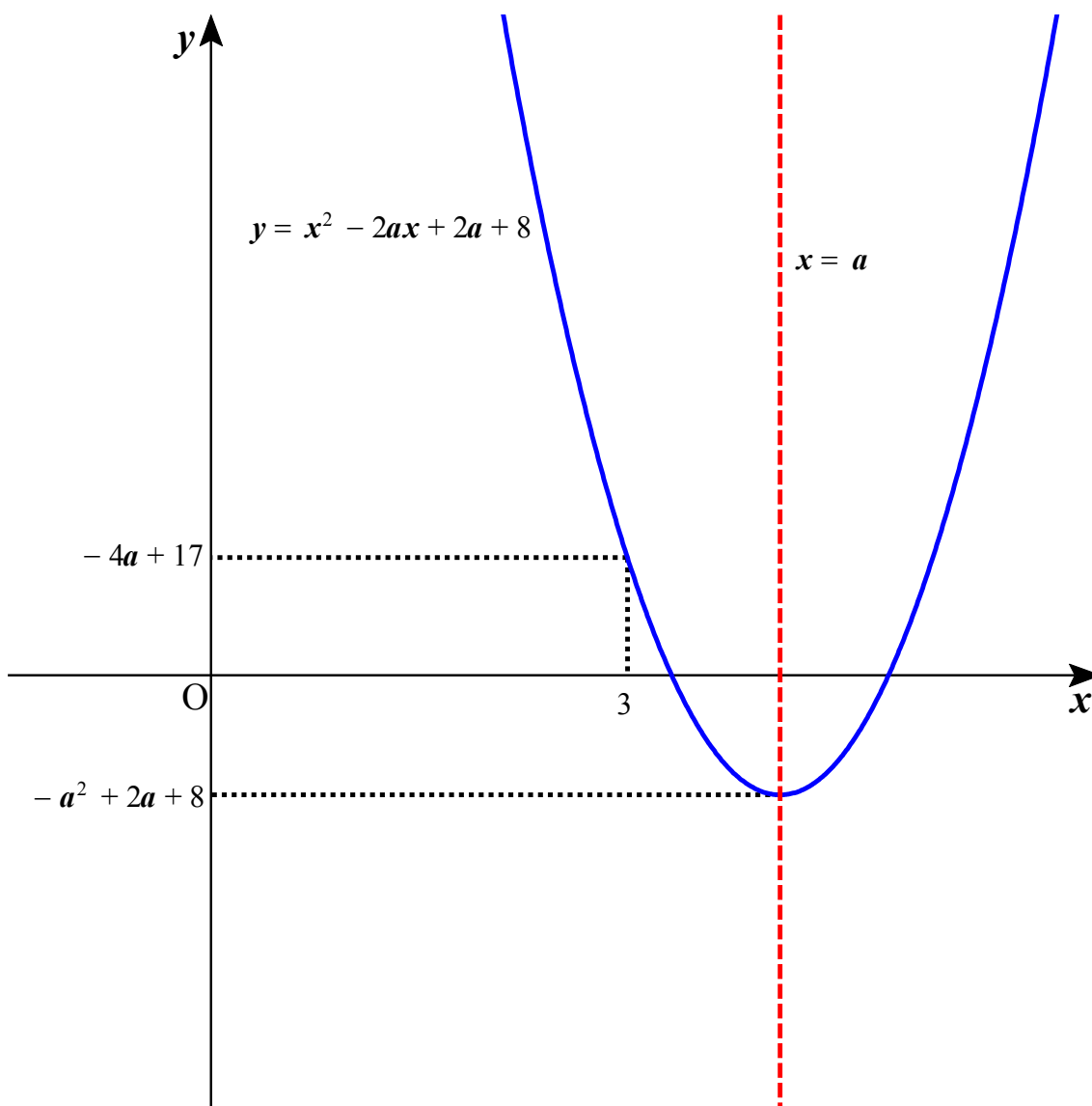
$x = 3$ のとき $y > 0$. . . ⑤

の③～⑤を同時に満たせばよい。

④については、 $D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a + 8) = 4(a + 2)(a - 4)$ より、 $a < -2, 4 < a$. . . ⑥

⑤については、 $x = 3$ のとき $y = -4a + 17 > 0$ より、 $a < \frac{17}{4}$. . . ⑦

③かつ⑥かつ⑦より、 $4 < a < \frac{17}{4}$



20

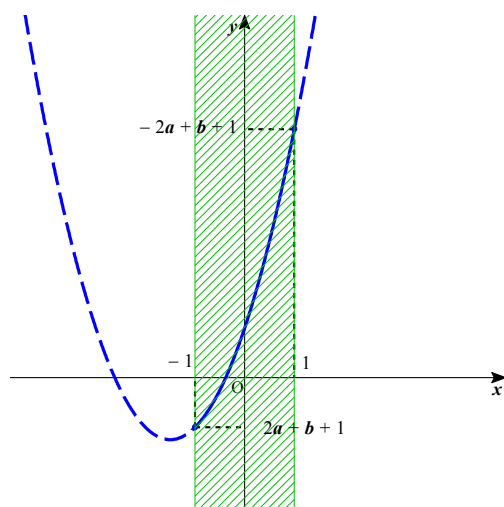
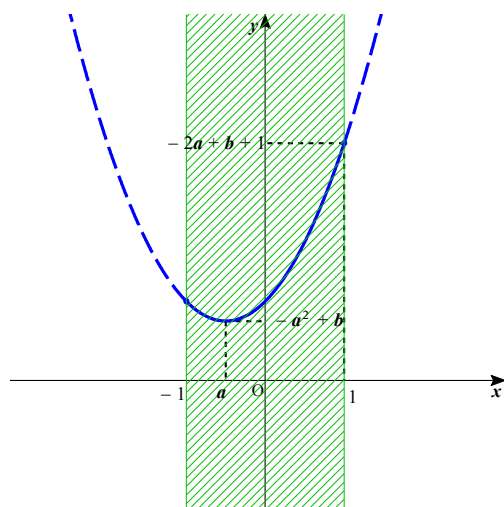
(1)

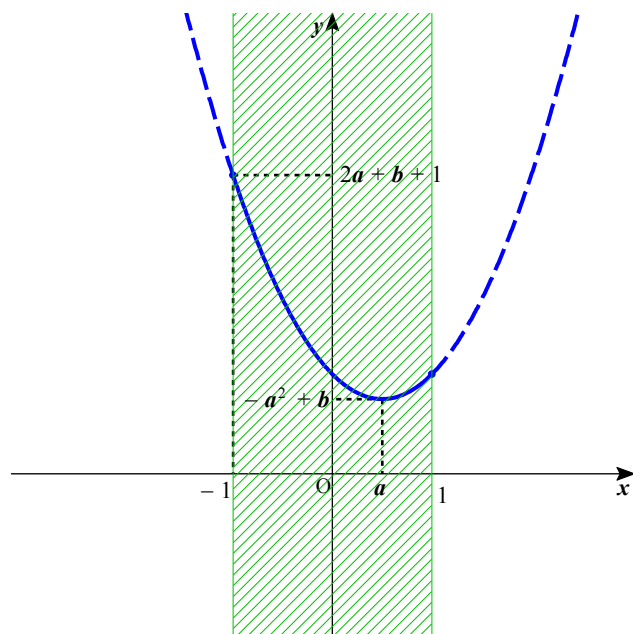
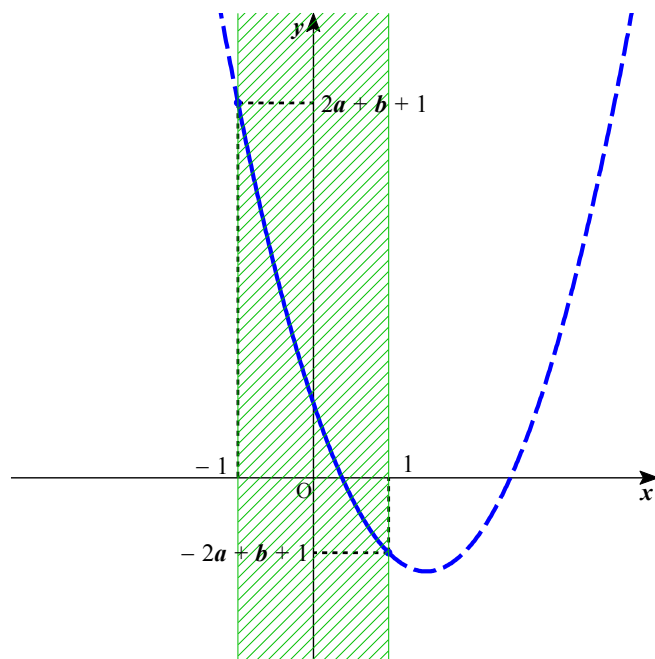
$$\begin{aligned}
 y = f(x) &= x^2 - 2ax + b \\
 &= (x-a)^2 - a^2 + b
 \end{aligned}$$

より, $(a, -a^2 + b)$

(2)

下に凸の放物線だから

(i) $a \leq -1$ $x=1$ で最大値 $-2a + b + 1$ $x=-1$ で最小値 $2a + b + 1$ (ii) $-1 < a < 0$ $x=1$ で最大値 $-2a + b + 1$ $x=a$ で最小値 $-a^2 + b$ 

(iii) $0 \leq a < 1$ $x = -1$ で最大値 $2a + b + 1$ $x = a$ で最小値 $-a^2 + b$ (iv) $1 \leq a$ $x = -1$ で最大値 $2a + b + 1$ $x = 1$ で最小値 $-2a + b + 1$ 

(3)

(i) $a \leq -1$ のとき

$$x=1 \text{ で最大値 } -2a+b+1, \quad x=-1 \text{ で最小値 } 2a+b+1 \text{ より, } \begin{cases} -2a+b+1=1 \\ 2a+b+1=-1 \end{cases}$$

$$\text{これを解くと, } a=-\frac{1}{2}, b=-1$$

これは $a \leq -1$ を満たさないから不適(ii) $-1 < a < 0$ のとき

$$x=1 \text{ で最大値 } -2a+b+1, \quad x=a \text{ で最小値 } -a^2+b \text{ より, } \begin{cases} -2a+b+1=1 \\ -a^2+b=-1 \end{cases}$$

次にこの連立方程式を解く。

$$-2a+b+1=1 \text{ より, } b=2a$$

$$\text{これを } -a^2+b=-1 \text{ に代入し, } a \text{ について整理すると, } a^2-2a-1=0$$

$$\text{よって, } a=1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}$$

$$\text{これと } a \text{ が } -1 < a < 0 \text{ を満たさなければならないことから, } a=1-\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに, } a=1-\sqrt{2}, b=2-2\sqrt{2}$$

(iii) $0 \leq a < 1$ のとき

$$x=-1 \text{ で最大値 } 2a+b+1, \quad x=a \text{ で最小値 } -a^2+b \text{ より, } \begin{cases} 2a+b+1=1 \\ -a^2+b=-1 \end{cases}$$

次にこの連立方程式を解く。

$$2a+b+1=1 \text{ より, } b=-2a$$

$$\text{これを } -a^2+b=-1 \text{ に代入し, } a \text{ について整理すると, } a^2+2a-1=0$$

$$\text{よって, } a=-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}$$

$$\text{これと } a \text{ が } 0 \leq a < 1 \text{ を満たさなければならないことから, } a=-1+\sqrt{2}$$

$$\text{ゆえに, } a=-1+\sqrt{2}, b=2-2\sqrt{2}$$

(iv) $1 \leq a$ のとき

$$x=-1 \text{ で最大値 } 2a+b+1, \quad x=1 \text{ で最小値 } -2a+b+1 \text{ より, } \begin{cases} 2a+b+1=1 \\ -2a+b+1=-1 \end{cases}$$

$$\text{これを解くと, } a=\frac{1}{2}$$

これは $1 \leq a$ を満たさないから不適(i) ~ (iv) より, $a=1-\sqrt{2}, b=2-2\sqrt{2}$ または $a=-1+\sqrt{2}, b=2-2\sqrt{2}$

21

(ii), (iii) より,

$$f(k) + g(k) = 62, f(k) + g(k) = 2k^2 + 13k + 5 \quad \therefore 2k^2 + 13k = 57 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$f(-k) + g(-k) = -16, f(k) + g(k) = 2k^2 - 13k + 5 \quad \therefore 2k^2 - 13k = -21 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 26k = 78 \quad \therefore k = 3$$

したがって, (i)において, $f(x)$ は $x=3$ で最大値 13 をとることになる。そこで, $f(x) = a(x-3)^2 + 13$ ($a < 0$) とおくと,

$$(ii) \text{ において, } f(-3) = -23 \text{ より, } 36a + 13 = -23 \quad \therefore a = -1$$

これは $a < 0$ を満たす。

$$\text{よって, } f(x) = -(x-3)^2 + 13 \text{ すなわち } f(x) = -x^2 + 6x + 4$$

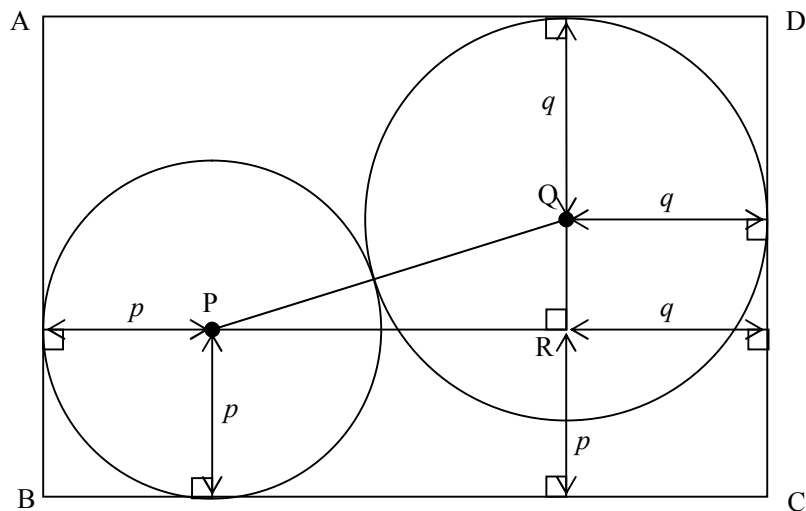
これより,

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 13x + 5 - f(x) \\ &= 2x^2 + 13x + 5 - (-x^2 + 6x + 4) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } g(x) = 3x^2 + 7x + 1$$

22

(1)



上図より, 直角三角形 QPR について,

$$\text{三平方の定理より, } PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

$$\text{これと } PQ = p + q = k, \quad PR = BC - (p + q) = 3 - k, \quad QR = AB - (p + q) = 2 - k \text{ より,}$$

$$k^2 = (3 - k)^2 + (2 - k)^2 \quad \therefore k^2 - 10k + 13 = 0$$

$$\text{ただし, } PQ > 0, PR > 0, QR > 0 \text{ すなわち } k > 0 \text{ かつ } 3 - k > 0 \text{ かつ } 2 - k > 0 \text{ より, } 0 < k < 2$$

$$\text{よって, } k^2 - 10k + 13 = 0 \text{ かつ } 0 < k < 2 \text{ より, } k = 5 - 2\sqrt{3}$$

(2)

$$p+q=5-2\sqrt{3} \text{ より, } p=5-2\sqrt{3}-q \quad \dots \textcircled{1}$$

円 P, 円 Q の直径は 0 より大きく, 長方形の短い方の辺の長さ以下だから,

$$0 < 2p \leq 2, 0 < 2q \leq 2 \text{ より, } 0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$$

$$0 < q \leq 1 \text{ から, } -1 \leq q < 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 5-2\sqrt{3}+(-1) \leq 5-2\sqrt{3}+(-q) < 5-2\sqrt{3}+0$$

$$\text{よって, } 4-2\sqrt{3} \leq p < 5-2\sqrt{3}$$

$$\text{これと } 0 < p \leq 1 \text{ より, } 4-2\sqrt{3} \leq p \leq 1$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \pi p^2 + \pi q^2 \\ &= \pi p^2 + \pi(k-p)^2 \\ &= \pi(2p^2 - 2kp + k^2) \\ &= \pi\{2(p^2 - kp) + k^2\} \\ &= \pi\left\{2\left(p - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\text{ただし, } 4-2\sqrt{3} \leq p \leq 1$$

次に $\frac{k}{2}$ すなわち $\frac{5-2\sqrt{3}}{2}$ が $4-2\sqrt{3} \leq p \leq 1$ に対しどの範囲にあるかどうか調べる。

$$\frac{5-2\sqrt{3}}{2} - (4-2\sqrt{3}) = \frac{-3+2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ここで, } 3 \text{ と } 2\sqrt{3} \text{ の大小について, } 3^2 = 9, (2\sqrt{3})^2 = 12 \text{ より, } 3 < 2\sqrt{3} \quad \therefore -3+2\sqrt{3} > 0$$

$$\text{ゆえに, } \frac{5-2\sqrt{3}}{2} - (4-2\sqrt{3}) > 0 \quad \therefore 4-2\sqrt{3} < \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\text{また, } -3+2\sqrt{3} > 0 \text{ より, } 1 - \frac{5-2\sqrt{3}}{2} = \frac{-3+2\sqrt{3}}{2} > 0 \quad \therefore \frac{5-2\sqrt{3}}{2} < 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より, } 4-2\sqrt{3} < \frac{5-2\sqrt{3}}{2} < 1$$

$$\text{よって, } S \text{ は } p = \frac{5-2\sqrt{3}}{2} \text{ で最小値 } \frac{\pi(5-2\sqrt{3})^2}{2} = \frac{37-20\sqrt{3}}{2} \pi \text{ をとる。}$$