

整数の性質 4 ユークリッドの互除法

整数の性質 5 1 次不定方程式

1. 割り算と最大公約数

2 つの自然数 a, b について, a を b で割ったときの商を q , 余りを r とすると
 a と b の最大公約数は, b と r の最大公約数に等しい。

証明

条件より, $a = bq + r \quad \cdots \textcircled{1}$

a と b の最大公約数を g_1 とすると, $a = a'g_1, b = b'g_1$ (a' と b' は互いに素) $\cdots \textcircled{2}$

b と r の最大公約数を g_2 とすると, $b = b''g_2, r = r'g_2$ (b'' と r' は互いに素) $\cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると, $a'g_1 = b'g_1q + r$ より, $r = g_1(a' + b'q)$

よって, r は g_1 を約数にもつ。

したがって, g_1 は b と r の公約数である。

これと, b と r の最大公約数が g_2 であることから, $g_2 \geq g_1 \quad \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると, $a = b''g_2q + r'g_2$ より, $a = g_2(b''q + r')$

よって, a は g_2 を約数にもつ。

したがって, g_2 は a と b の公約数である。

これと, a と b の最大公約数が g_1 であることから, $g_1 \geq g_2 \quad \cdots \textcircled{5}$

よって, $\textcircled{4}$ かつ $\textcircled{5}$ より, $g_1 = g_2$

ゆえに, a と b の最大公約数は, b と r の最大公約数に等しい。

2. ユークリッドの互除法

$a = bq_1 + r_1$ ($r_1 \neq 0$) ならば a と b の最大公約数は b と r_1 の最大公約数に等しい。

$b = r_1q_2 + r_2$ ($r_2 \neq 0$) ならば b と r_1 の最大公約数は r_1 と r_2 の最大公約数に等しい。

$r_1 = r_2q_3 + 0$ ならば r_2 は r_1 の約数である。すなわち r_1 と r_2 の最大公約数は r_2 である。

以上より, a と b の最大公約数は r_2 である。

3. 互いに素である整数の性質

2 つの整数 a, b が互いに素であるならば,

任意の整数 c について, $ax + by = c$ を満たす整数 x, y が存在する。

証明 1

$1 \leq l \leq k \leq b-1$ とし,

ak を b で割った商 q_k , 余りを r_k とすると, $ak = bq_k + r_k$ ($0 \leq r_k \leq b-1$) $\cdots \textcircled{1}$

al を b で割った商 q_l , 余りを r_l とすると, $al = bq_l + r_l$ ($0 \leq r_l \leq b-1$) $\cdots \textcircled{2}$

$r_k = r_l$ の場合

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より, $a(k-l) = b(q_k - q_l)$

この等式について, a と b が互いに素だから, $q_k - q_l$ は a の倍数, $k-l$ は b の倍数

したがって, $q_k - q_l = am$ (m は整数) と表すと, $k-l = bm$ となる。

さらに, $1 \leq l \leq k \leq b-1$ より, $0 \leq k-l \leq b-2 < b$ だから, $0 \leq bm < b$

よって、整数 m は 0

これより、 $k-l=0$ すなわち $k=l \quad \therefore ak=al$

ゆえに、 $r_k=r_l$ ならば $ak=al$

$r_k=r_l$ ならば $ak=al$ の対偶

$r_k=r_l$ ならば $ak=al$ は真だから、その対偶すなわち $ak \neq al$ ならば $r_k \neq r_l$ も真である。

$ak \neq al$ ならば $r_k \neq r_l$ が意味すること。

$a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ の b 個の数はすべて異なるから、 $ak \neq al$ ならば $r_k \neq r_l$ より、

それぞれを b で割ったときの余りの値はすべて異なる。

これと、余りの種類は $0, 1, 2, \dots, b-1$ の b 種類であることから、

$a, 2a, 3a, \dots, (b-1)a$ のうちのどれか 1 つは b で割った余りが 1 となる。

すなわち $ak=bq+1$ となる k が存在する。

$ax+by=c$ へ

$ak=bq+1$ より、 $ak+b(-q)=1$

この両辺に任意の整数 c を掛けると、 $a \cdot ck + b \cdot (-cq) = c$

$ck=x, -cq=y$ とおくと、 $ax+by=c$

以上より、

2 つの整数 a, b が互いに素であるならば、

任意の整数 c について、 $ax+by=c$ を満たす整数 x, y が存在する。

証明 2

$ax+by$ の正の数の最小値を ax_0+by_0 、 $ax+by$ を ax_0+by_0 で割った商を q 、余りを r とする。

$ax+by=(ax_0+by_0)q+r \quad (0 \leq r < ax_0+by_0)$

両辺を整理すると、

$a(x-qx_0)+b(y-qy_0)=r \quad (0 \leq r < ax_0+by_0)$

ここで、 $x-qx_0, y-qy_0$ は整数だから、 $r \neq 0$ とすると、 $0 < r < ax_0+by_0$ より、

$ax+by$ の正の数の最小値は r ということになる。

これは、正の数の最小値が ax_0+by_0 であるとしたことと矛盾する。

よって、 $r=0$

これより、 $ax+by=(ax_0+by_0)q$ すなわち $ax+by$ は ax_0+by_0 を約数にもつ。

したがって、

$x=1, y=0$ のとき、 $ax+by=a$ より、 a は ax_0+by_0 を約数にもつ。

$x=0, y=1$ のとき、 $ax+by=b$ より、 b は ax_0+by_0 を約数にもつ。

よって、 ax_0+by_0 は a と b の正の公約数である。

これと、 a と b が互いに素であることから、 $ax_0+by_0=1$

以上より、

2 つの整数 a, b が互いに素であるならば $ax_0+by_0=1$ となる整数 x_0, y_0 が存在し、

任意の整数 c について、 $ax+by=c$ を満たす整数 x, y ($cx_0=x, cy_0=y$) が存在する。

4. 1 次不定方程式と整数解

a と b が互いに素ならば, $ax_0 + by_0 = 1$ となるような整数 x_0, y_0 が存在する。

よって, $acx_0 + bcy_0 = c$

これと $ax + by = c$ の両辺の差をとると,

$$a(x - cx_0) + b(y - cy_0) = 0 \text{ より, } a(x - cx_0) = -b(y - cy_0)$$

a と b は互いに素だから, $x - cx_0 = bk, y - cy_0 = -ak$ (k は整数)

ゆえに, $x = bk + cx_0, y = -ak + cy_0$

259

(1)

$$11n + 28 = (4n + 7) \cdot 2 + 3n + 14, \quad 4n + 7 = (3n + 14) \cdot 1 + n - 7, \quad 3n + 14 = (n - 7) \cdot 3 + 35 \text{ より,}$$

$11n + 28$ と $4n + 7$ の最大公約数は, $n - 7$ と 35 の最大公約数に等しい。

$35 = 7 \cdot 5$ であるから, $n - 7$ は 5 の倍数であるが, 7 の倍数でない。

これと, $-6 \leq n - 7 \leq 43$ より, $n - 7 = -5, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40$

よって, $n = 2, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 47$

(2)

$$6n + 4 = (5n + 1) \cdot 1 + n + 3, \quad 5n + 1 = (n + 3) \cdot 5 - 14 \text{ より,}$$

$6n + 4$ と $5n + 1$ の最大公約数は, $n + 3$ と -14 の最大公約数に等しい。

$-14 = 7 \cdot (-2)$ であるから, $n + 3$ は 7 の倍数であるが, 2 の倍数すなわち偶数でない。

これと, $4 \leq n + 3 \leq 103$ より, $n + 3 = 7, 21, 35, 49, 63, 77, 91$

よって, $n = 4, 18, 32, 46, 60, 74, 88$

260

(1)

解法 1

$$3m + 2 = (3m + 1) \cdot 1 + 1 \text{ より,}$$

$3m + 2$ と $3m + 1$ の最大公約数は $3m + 1$ と 1 の最大公約数に等しい。

$3m + 1 = 1 \cdot (3m + 1) + 0$ より, 1 は $3m + 1$ と 1 の最大公約数である。

よって, $3m + 2$ と $3m + 1$ の最大公約数は 1 , すなわち $3m + 2$ と $3m + 1$ は互いに素である。

解法 2

$3m + 2$ と $3m + 1$ の任意の正の公約数を d とすると,

適当な整数 a, b を用いて, $3m + 2 = ad$, $3m + 1 = bd$ と表せる。

したがって, $3m + 2 - (3m + 1) = (a - b)d$, $3m + 2 - (3m + 1) = 1$ より, $(a - b)d = 1$

$a - b$ は整数だから, $d = 1$

よって, $3m + 2$ と $3m + 1$ は互いに素である。

(2)

解法 1

$$n^2 + n + 1 = (n+1) \cdot n + 1, \quad n+1 = 1 \cdot (n+1) + 0 \text{ より,}$$

$n^2 + n + 1$ と $n+1$ の最大公約数は 1 だから, $n^2 + n + 1$ と $n+1$ は互いに素である。

解法 2

$n^2 + n + 1$ と $n+1$ の任意の正の公約数を d とすると,

適当な整数 a, b を用いて, $n^2 + n + 1 = ad$, $n+1 = bd$ と表せる。

したがって, $n^2 + n + 1 - n(n+1) = (a - nb)d$, $n^2 + n + 1 - n(n+1) = 1$ より, $(a - nb) \cdot d = 1$

$a - nb$ は整数だから, $d = 1$

よって, $n^2 + n + 1$ と $n+1$ は互いに素である。

261

$$n^2 + n + 6 = (n+5)(n-4) + 26 \text{ より,}$$

$n^2 + n + 6$ と $n+5$ の最大公約数は, $n+5$ と 26 の最大公約数に等しい。

これと $26 = 2 \cdot 13$ より,

$n+5$ が 2 の倍数でも 13 の倍数でもないならば, 最大公約数は 1

$n+5$ が 2 の倍数であるが 13 の倍数でないならば, 最大公約数は 2

$n+5$ が 13 の倍数であるが 2 の倍数でないならば, 最大公約数は 13

$n+5$ が 26 の倍数ならば, 最大公約数は 26

よって, 最大公約数として考えられる数は 1, 2, 13, 26

262

(1)

解法 1 直感に頼る解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 5x + 2$, $n = 14y + 5$ と表せるから,

$$5x + 2 = 14y + 5 \text{ より, } 5x - 14y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 5 \cdot 3 - 14 \cdot 1 = 1 \text{ より, } 3(5 \cdot 3 - 14) = 3 \cdot 1 \quad \text{すなわち } 5 \cdot 9 - 14 \cdot 3 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

補足

5 と 14 は互いに素だから, $5a - 14b = 1$ を満たす整数 a, b が存在する。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x-9) - 14(y-3) = 0$$

$$\text{すなわち } 5(x-9) = 14(y-3)$$

5 と 14 は互いに素だから, $x-9 = 14k$, $y-3 = 5k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x = 14k + 9$$

$$\text{これを } n = 5x + 2 \text{ に代入すると, } n = 5(14k + 9) + 2 = 70k + 47$$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 70k + 47 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $1 \leq k \leq 13$ だから,

求める最大数は $70 \cdot 13 + 47 = 957$, 最小数は $70 \cdot 1 + 47 = 117$

補足: この方法の欠点

互いに素な 2 数 p, q の値が大きい場合, $pa + qb = 1$ を満たす整数 a, b を直感で求めるのが困難

解法 2 整数であることを利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 5x + 2, n = 14y + 5$ と表せるから,

$$5x + 2 = 14y + 5 \text{ より,}$$

$$5x - 14y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } x = \frac{14y + 3}{5} = 3y + \frac{-y + 3}{5} \text{ より, } y = 3 \text{ のとき } x = 9$$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{に代入すると, } 5 \cdot 9 - 14 \cdot 3 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x - 9) - 14(y - 3) = 0$$

$$\text{すなわち } 5(x - 9) = 14(y - 3)$$

$$5 \text{ と } 14 \text{ は互いに素だから, } x - 9 = 14k, y - 3 = 5k \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{よって, } x = 14k + 9$$

$$\text{これを } n = 5x + 2 \text{ に代入すると, } n = 5(14k + 9) + 2 = 70k + 47$$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 70k + 47 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $1 \leq k \leq 13$ だから,

$$\text{求める最大数は } 70 \cdot 13 + 47 = 957, \text{ 最小数は } 70 \cdot 1 + 47 = 117$$

補足

この方法は万能

解法 3 互除法を利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 5x + 2, n = 14y + 5$ と表せる。

$$\text{よって, } 5x + 2 = 14y + 5 \text{ より, } 5x - 14y = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 14 = 5 \cdot 3 - 1 \text{ より, } 5 \cdot 3 - 14 = 1 \text{ より, } 3(5 \cdot 3 - 14) = 3 \cdot 1$$

$$\text{すなわち } 5 \cdot 9 - 14 \cdot 3 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

補足

14 と 5 は互いに素 (最大公約数が 1) だから, ユークリッドの互除法を繰り返せば, 必ず余り 1 が現れる。

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x - 9) - 14(y - 3) = 0$$

$$\text{すなわち } 5(x - 9) = 14(y - 3)$$

$$5 \text{ と } 14 \text{ は互いに素だから, } x - 9 = 14k, y - 3 = 5k \quad (k \text{ は整数})$$

$$\text{よって, } x = 14k + 9$$

$$\text{これを } n = 5x + 2 \text{ に代入すると, } n = 5(14k + 9) + 2 = 70k + 47$$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 70k + 47 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $1 \leq k \leq 13$ だから,

$$\text{求める最大数は } 70 \cdot 13 + 47 = 957, \text{ 最小数は } 70 \cdot 1 + 47 = 117$$

補足: この方法の欠点

この方法の欠点は手続きが煩雑になる場合があることと

互いに素な 2 数 p, q の値が大きいとき, $pa + qb = 1$ を満たす整数 a, b の値が大きくなりすぎ後の計算が大変になる場合がある。

(2)

解法 1 直感に頼る解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 3x + 1, n = 7y + 3$ と表せる。

よって, $3x + 1 = 7y + 3$ より, $3x - 7y = 2 \quad \dots \textcircled{1}$

また, $3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 2 \quad \dots \textcircled{2}$

①-②より, $3(x - 3) - 7(y - 2) = 0$ すなわち $3(x - 3) = 7(y - 2)$

3 と 7 は互いに素だから, $x - 3 = 7k, y - 2 = 3k$ (k は整数)

よって, $x = 7k + 3$

これを $n = 3x + 1$ に代入すると, $n = 3(7k + 3) + 1 = 21k + 10$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 21k + 10 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $5 \leq k \leq 47$ だから,

求める最大数は $21 \cdot 47 + 10 = 997$, 最小数は $21 \cdot 5 + 10 = 115$

解法 2 整数であることを利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 3x + 1, n = 7y + 3$ と表せるから,

$3x + 1 = 7y + 3$ より,

$3x - 7y = 2 \quad \dots \textcircled{1}$

また, $x = \frac{7y + 2}{3} = 2y + \frac{y + 2}{3}$ より, $y = 1$ のとき $x = 3$

これを①に代入すると, $3 \cdot 3 - 7 \cdot 1 = 2 \quad \dots \textcircled{2}$

①-②より, $3(x - 3) - 7(y - 2) = 0$ すなわち $3(x - 3) = 7(y - 2)$

3 と 7 は互いに素だから, $x - 3 = 7k, y - 2 = 3k$ (k は整数)

よって, $x = 7k + 3$

これを $n = 3x + 1$ に代入すると, $n = 3(7k + 3) + 1 = 21k + 10$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 21k + 10 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $5 \leq k \leq 47$ だから,

求める最大数は $21 \cdot 47 + 10 = 997$, 最小数は $21 \cdot 5 + 10 = 115$

解法 3 互除法を利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 3x + 1, n = 7y + 3$ と表せる。

よって, $3x + 1 = 7y + 3$ より, $3x - 7y = 2 \quad \dots \textcircled{1}$

また, $7 = 3 \cdot 2 + 1$ より, $3 \cdot (-2) - 7 \cdot (-1) = 1$ よって, $2 \cdot \{3 \cdot (-2) - 7 \cdot (-1)\} = 2 \cdot 1$

すなわち $3 \cdot (-4) - 7 \cdot (-2) = 2 \quad \dots \textcircled{2}$

補足

7 と 3 は互いに素 (最大公約数が 1) だから, ユークリッドの互除法を繰り返せば, 必ず余り 1 が現れる。

①-②より, $3(x + 4) - 7(y + 2) = 0$

すなわち $3(x + 4) = 7(y + 2)$

3 と 7 は互いに素だから, $x + 4 = 7k, y + 2 = 3k$ (k は整数)

よって, $x = 7k - 4$

これを $n = 3x + 1$ に代入すると, $n = 3(7k - 4) + 1 = 21k - 11$

n が 3 桁の自然数のとき, $100 \leq 21k - 11 \leq 999$ より, 整数 k の範囲は $6 \leq k \leq 48$ だから,

求める最大数は $21 \cdot 48 - 11 = 997$, 最小数は $21 \cdot 6 - 11 = 115$

(3)

解法 1 直感に頼る解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 8x + 4, n = 13y + 9$ と表せる。

よって, $8x + 4 = 13y + 9$ より, $8x - 13y = 5$ …… ①

また, $8 \cdot (-1) - 13 \cdot (-1) = 5$ …… ②

① - ② より, $8(x + 1) - 13(y + 1) = 0$ すなわち $8(x + 1) = 13(y + 1)$

8 と 13 は互いに素だから, $x + 1 = 13k, y + 1 = 8k$ (k は整数)

よって, $x = 13k - 1$

これを $n = 8x + 4$ に代入すると, $n = 8(13k - 1) + 4 = 104k - 4$

n が 4 桁の自然数のとき, $1000 \leq 104k - 4 \leq 9999$ より, 整数 k の範囲は $10 \leq k \leq 96$ だから,

求める最大数は $104 \cdot 96 - 4 = 9980$, 最小数は $104 \cdot 10 - 4 = 1036$

解法 2 整数であることを利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 8x + 4, n = 13y + 9$ と表せるから,

$8x + 4 = 13y + 9$ より,

$8x - 13y = 5$ …… ①

また, $x = \frac{13y + 5}{8} = \frac{(16y + 8) - 3y - 3}{8} = 2y + 1 - \frac{3(y + 1)}{8}$ より, $y = -1$ のとき $x = -1$

これを①に代入すると, $8 \cdot (-1) - 13 \cdot (-1) = 5$ …… ②

① - ② より, $8(x + 1) - 13(y + 1) = 0$ すなわち $8(x + 1) = 13(y + 1)$

8 と 13 は互いに素だから, $x + 1 = 13k, y + 1 = 8k$ (k は整数)

よって, $x = 13k - 1$

これを $n = 8x + 4$ に代入すると, $n = 8(13k - 1) + 4 = 104k - 4$

n が 4 桁の自然数のとき, $1000 \leq 104k - 4 \leq 9999$ より, 整数 k の範囲は $10 \leq k \leq 96$ だから,

求める最大数は $104 \cdot 96 - 4 = 9980$, 最小数は $104 \cdot 10 - 4 = 1036$

解法 3 互除法を利用する解法

求める自然数を n とすると, n は整数 x, y を用いて $n = 8x + 4, n = 13y + 9$ と表せる。

よって, $8x + 4 = 13y + 9$ より, $8x - 13y = 5$ …… ①

また, ユークリッドの互除法を繰り返すと,

$13 = 8 \cdot 1 + 5$ …… ②

$8 = 5 \cdot 1 + 3$ …… ③

$5 = 3 \cdot 1 + 2$ …… ④

$3 = 2 \cdot 1 + 1$ …… ⑤

したがって, ⑤より, $1 = 3 - 2 \cdot 1$ …… ⑥

④より, $2=5-3$ だから, これを⑥に代入すると, $1=3-(5-3)\cdot 1$ より,

$$1=3\cdot 2+5\cdot (-1) \quad \cdots \textcircled{7}$$

③より, $3=8-5$ だから, これを⑦に代入すると, $1=(8-5)\cdot 2+5\cdot (-1)$ より,

$$1=8\cdot 2+5\cdot (-3) \quad \cdots \textcircled{8}$$

②より, $5=13-8$ だから, これを⑧に代入すると, $1=8\cdot 2+(13-8)\cdot (-3)$ より,

$$1=8\cdot 5+13\cdot (-3) \quad \text{すなわち } 8\cdot 5-13\cdot 3=1$$

$$\text{したがって, } 8\cdot 25-13\cdot 15=5 \quad \cdots \textcircled{9}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{9} \text{ より, } 8(x-25)-13(y-15)=0$$

$$\text{すなわち } 8(x-25)=13(y-15)$$

これと, 8 と 13 は互いに素であることから, $x-25=13k, y-15=8k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x=13k+25=13(k+2)-1=13l-1 \quad (l \text{ は整数})$$

$$\text{これを } n=8x+4 \text{ に代入すると, } n=8(13l-1)+4=104l-4$$

n が 4 桁の自然数のとき, $1000 \leq 104l-4 \leq 9999$ より, 整数 l の範囲は $10 \leq l \leq 96$ だから,
求める最大数は $104\cdot 96-4=9980$, 最小数は $104\cdot 10-4=1036$

263

(1)

$$7x+2y=41 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$7\cdot 3+2\cdot 10=41 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{ より, } 7(x-3)+2(y-10)=0 \quad \therefore 7(x-3)=-2(y-10)$$

7 と -2 は互いに素だから, $x-3=-2k, y-10=7k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x=-2k+3, y=7k+10$$

ここで, x, y は自然数だから, $-2k+3 \geq 1, 7k+10 \geq 1$ より, $-\frac{9}{7} \leq k \leq 1$

よって, 整数 $k=-1, 0, 1$

ゆえに, $(x, y)=(5, 3), (3, 10), (1, 17)$

(2)

$$3x+4y=36 \text{ より, } 3x=4(-y+9)$$

3 と 4 は互いに素だから, $x=4k, -y+9=3k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x=4k, y=-3k+9$$

ここで, x, y は自然数だから, $4k \geq 1, -3k+9 \geq 1$ より, $\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{8}{3}$

よって, 整数 $k=1, 2$

ゆえに, $(x, y)=(4, 6), (8, 3)$

(3)

$$4x + 5y = 100 \text{ より, } 4x = 5(-y + 20)$$

4 と 5 は互いに素だから, $x = 5k, -y + 20 = 4k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x = 5k, y = -4k + 20$$

ここで, x, y は自然数だから, $5k \geq 1, -4k + 20 \geq 1$ より, $\frac{1}{5} \leq k \leq \frac{19}{4}$

よって, 整数 $k = 1, 2, 3, 4$

ゆえに, $(x, y) = (5, 16), (10, 12), (15, 8), (20, 4)$

264

$$z = 15 - (4x + 2y) \quad \cdots \textcircled{1}$$

z は自然数だから, $15 - (4x + 2y) \geq 1$ より, $4x + 2y \leq 14$ すなわち $2x + y \leq 7$

$$\text{よって, } 1 \leq y \leq 7 - 2x \quad \cdots \textcircled{2}$$

また, $7 - 2x \geq 1$ より, $x = 1, 2, 3$

したがって,

$x = 1$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より, } y = 1, 2, 3, 4, 5$$

これと①から, $(x, y, z) = (1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1)$

$x = 2$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より, } y = 1, 2, 3$$

これと①から, $(x, y, z) = (2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1)$

$x = 3$ のとき

$$\textcircled{2} \text{ より, } y = 1$$

これと①から, $(x, y, z) = (3, 1, 1)$

以上より,

$(x, y, z) = (1, 1, 9), (1, 2, 7), (1, 3, 5), (1, 4, 3), (1, 5, 1), (2, 1, 5), (2, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 1)$

265

(1)

50 円切手を x 枚, 80 円切手を y 枚買ったとき, 所持金をちょうど使い切ったとすると,

$$50x + 80y = 660 \text{ より, } 5x + 8y = 66 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } x = \frac{-8y + 66}{5} = \frac{5(-2y + 13) + 2y + 1}{5} = -2y + 13 + \frac{2y + 1}{5}$$

したがって, $y = 2$ のとき $x = 10$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{に代入すると, } 5 \cdot 10 + 8 \cdot 2 = 66 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x - 10) + 8(y - 2) = 0 \quad \text{すなわち } 5(x - 10) = -8(y - 2)$$

5 と -8 は互いに素だから, $x - 10 = 8k, y - 2 = -5k$ (k は整数)

$$\text{よって, } x = 8k + 10, y = -5k + 2$$

x, y は負でない整数だから, $8k+10 \geq 0, -5k+2 \geq 0$ より, $-\frac{5}{4} \leq k \leq \frac{2}{5}$

よって, 整数 $k = -1, 0$

ゆえに, $(x, y) = (2, 7), (10, 2)$

すなわち (50 円切手の枚数, 80 円切手の枚数) $= (2, 7), (10, 2)$

(2)

りんごを x 個, みかんを y 個買ったとき, 合計金額が 1450 円になったとすると,

$$130x + 40y = 1450 \text{ より, } 13x + 4y = 145 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } y = \frac{-13x + 145}{4} = \frac{4(-3x + 36) - x + 1}{4} = -3x + 36 + \frac{-x + 1}{4}$$

よって, $x=1$ のとき $y=33$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $13 \cdot 1 + 4 \cdot 33 = 145 \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 13(x-1) + 4(y-33) = 0 \quad \text{すなわち } 13(x-1) = -4(y-33)$$

13 と -4 は互いに素だから, $x-1=4k, y-33=-13k$ (k は整数)

よって, $x=4k+1, y=-13k+33$

x, y は負でない整数だから, $4k+1 \geq 0, -13k+33 \geq 0$ より, $-\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{33}{13}$

よって, 整数 $k = 0, 1, 2$

ゆえに, $(x, y) = (1, 33), (5, 20), (9, 7)$

すなわち (りんごの個数, みかんの個数) $= (1, 33), (5, 20), (9, 7)$

(3)

生徒 1 人あたり鉛筆を x 本, ノートを y 冊買うと, 合計金額が 1640 円になったとすると,

$$4x \cdot 50 + 4y \cdot 70 = 1640 \text{ より, } 5x + 7y = 41 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } x = \frac{-7y + 41}{5} = \frac{-5(y-8) - 2y + 1}{5} = -y + 8 + \frac{-2y + 1}{5}$$

よって, $y=3$ のとき $x=4$

これを $\textcircled{1}$ に代入すると, $5 \cdot 4 + 7 \cdot 3 = 41 \quad \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x-4) + 7(y-3) = 0 \quad \text{すなわち } 5(x-4) = -7(y-3)$$

5 と -7 は互いに素だから, $x-4=7k, y-3=-5k$ (k は整数)

よって, $x=7k+4, y=-5k+3$

x, y は負でない整数だから, $7k+4 \geq 0, -5k+3 \geq 0$ より, $-\frac{4}{7} \leq k \leq \frac{3}{5}$

よって, 整数 $k = 0$

したがって, $(x, y) = (4, 3)$ すなわち生徒 1 人あたり鉛筆 4 本, ノート 3 冊

ゆえに, 買った鉛筆の本数とノートの冊数はそれぞれ, 16 本, 12 冊

266

(1)

$$xy - 5x - y = 0, \quad xy - 5x - y = (x-1)(y-5) - 5 \text{ より, } (x-1)(y-5) = 5$$

x, y は整数であるから, $x-1$ と $y-5$ も整数である。

$$\text{よって, } (x-1, y-5) = (-5, -1), (-1, -5), (1, 5), (5, 1)$$

$$\text{すなわち } (x, y) = (-4, 4), (0, 0), (2, 10), (6, 6)$$

(2)

$$xy - 2x + 5y - 4 = 0, \quad xy - 2x + 5y - 4 = (x+5)(y-2) + 6 \text{ より,}$$

$$(x+5)(y-2) + 6 = 0 \quad \text{すなわち } (x+5)(y-2) = -6$$

x, y は整数であるから, $x+5, y-2$ も整数である。

$$\text{よって, } (x+5, y-2) = (-6, 1), (-3, 2), (-2, 3), (-1, 6), (1, -6), (2, -3), (3, -2), (6, -1)$$

$$\text{すなわち } (x, y) = (-11, 3), (-8, 4), (-7, 5), (-6, 8), (-4, -4), (-3, -1), (-2, 0), (1, 1)$$

(3)

$$xy + 3x - 4y = 18, \quad xy + 3x - 4y = (x-4)(y+3) + 12 \text{ より,}$$

$$(x-4)(y+3) + 12 = 18 \quad \text{すなわち } (x-4)(y+3) = 6$$

x, y は整数であるから, $x-4, y+3$ も整数である。

$$\text{よって, } (x-4, y+3) = (-6, -1), (-3, -2), (-2, -3), (-1, -6), (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$$

$$\text{すなわち } (x, y) = (-2, -4), (1, -5), (2, -6), (3, -9), (5, 3), (6, 0), (7, -1), (10, -2)$$

(4)

$$xy + 8x + 4y = -40, \quad xy + 8x + 4y = (x+4)(y+8) - 32 \text{ より,}$$

$$(x+4)(y+8) - 32 = -40 \quad \text{すなわち } (x+4)(y+8) = -8$$

x, y は整数であるから, $x+4, y+8$ も整数である。

$$\text{よって, } (x+4, y+8) = (-8, 1), (-4, 2), (-2, 4), (-1, 8), (1, -8), (2, -4), (4, -2), (8, -1)$$

すなわち

$$(x, y) = (-12, -7), (-8, -6), (-6, -4), (-5, 0), (-3, -16), (-2, -12), (0, -10), (4, -9)$$

267

(1)

$$(x+y)(x-y) = 35$$

x, y は自然数であるから, $x+y \geq 2, \quad x+y > x-y$

$$\text{よって, } (x+y, x-y) = (35, 1), (7, 5)$$

$$\text{これを解くと, } (x, y) = (18, 17), (6, 1)$$

これらの解は x, y は自然数であるという条件を満たしている。

$$\text{ゆえに, } (x, y) = (18, 17), (6, 1)$$

(2)

$$(x+y)(x-y)=-9$$

x, y は自然数であるから, $x+y \geq 2$, $x+y > x-y$

また, x と y の偶奇が一致するとき $x+y, x-y$ とも偶数,

$$\text{よって, } (x+y, x-y) = (9, -1), (3, -3)$$

$$\text{これを解くと, } (x, y) = (4, 5), (0, 3)$$

$(x, y) = (0, 3)$ は x, y は自然数であるという条件を満たさないから不適。

$$\text{ゆえに, } (x, y) = (4, 5)$$

(3)

$$(x+2y)(x-2y)=21$$

x, y は自然数であるから, $x+2y \geq 3$, $x+2y > x-2y$

$$\text{よって, } (x+2y, x-2y) = (21, 1), (7, 3)$$

$$\text{これを解くと, } (x, y) = (11, 5), (5, 1)$$

これらの解は x, y は自然数であるという条件を満たしている。

$$\text{ゆえに, } (x, y) = (11, 5), (5, 1)$$

268

(1)

$$1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 0, \quad 1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = \frac{xy - y - 2x}{xy} \text{ より, } xy - y - 2x = 0$$

$$\text{よって, } (x-1)(y-2) - 2 = 0 \quad \text{すなわち } (x-1)(y-2) = 2$$

x, y は自然数だから, $x-1 \geq 0, y-2 \geq 0$

$$\text{ゆえに, } (x-1, y-2) = (1, 2), (2, 1) \quad \text{すなわち } (x, y) = (2, 4), (3, 3)$$

(2)

$$1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = 0, \quad 1 - \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = \frac{xy - 4y + x}{xy} \text{ より, } xy - 4y + x = 0$$

$$\text{よって, } (x-4)(y+1) + 4 = 0 \quad \text{すなわち } (x-4)(y+1) = -4$$

x, y は自然数だから, $x-4 \geq -3, y+1 \geq 2$

$$\text{ゆえに, } (x-4, y+1) = (-2, 2), (-1, 4) \quad \text{すなわち } (x, y) = (2, 1), (3, 3)$$

(3)

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0, \quad \frac{1}{5} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{xy - 5y - 5x}{5xy} \text{ より, } xy - 5y - 5x = 0$$

$$\text{よって, } (x-5)(y-5) - 25 = 0 \quad \text{すなわち } (x-5)(y-5) = 25$$

x, y は自然数だから, $x-5 \geq -4, y-5 \geq -4$

$$\text{ゆえに, } (x-5, y-5) = (1, 25), (5, 5), (25, 1)$$

$$\text{すなわち } (x, y) = (6, 30), (10, 10), (30, 6)$$

269

(1)

x, y, z は自然数で, $x \leq y \leq z$ だから, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}$

よって, $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

ゆえに, $1 \geq \frac{x}{3}$ すなわち $x=1, 2, 3$

$x=1$ のとき

$$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ より, } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

ところが, y, z は自然数だから, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 0$

よって, 解なし。

$x=2$ のとき

解法 1: 1 次不定方程式を解く

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ より, } \frac{1}{2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \text{ すなわち } \frac{yz - 2z - 2y}{2yz} = 0$$

よって, $yz - 2z - 2y = 0$ より, $(y-2)(z-2) = 4$

また, y, z は $y \leq z$ の自然数だから, $z-2 \geq y-2 \geq -1$

ゆえに, $(y-2, z-2) = (1, 4), (2, 2)$ すなわち $(y, z) = (3, 6), (4, 4)$

解法 2: y の候補を絞り込んでから解く

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ より, } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$$\text{これと } \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \text{ より, } \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

よって, $2 \geq \frac{y}{2}$ y は $x \leq y$ を満たす自然数だから, $y=1, 2, 3, 4$

$y=1$ のとき

$$1 + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{z} = -\frac{1}{2}$$

z は自然数だから, 不適

$y=2$ のとき

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{z} = 0$$

よって, 不適

$y=3$ のとき

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad \therefore z = 6$$

これは $y \leq z$ を満たす。

$y=4$ のとき

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \quad \therefore z = 4$$

これは $y \leq z$ を満たす。

$x=3$ のとき

解法 1 : 1 次不定方程式を解く

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ より, } \frac{2}{3} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{2yz - 3z - 3y}{3yz} = \frac{4yz - 6z - 6y}{6yz} = 0$$

よって, $4yz - 6z - 6y = 0$ より, $(2y - 3)(2z - 3) = 9$

また, y, z は $x \leq y \leq z$ の自然数だから, $2z - 3 \geq 2y - 3 \geq 3$

ゆえに, $(2y - 3, 2z - 3) = (3, 3)$ すなわち $(y, z) = (3, 3)$

これと

解法 2 : y の候補を絞り込んでから解く

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ より, } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

$$\text{これと } \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \text{ より, } \frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

よって, $\frac{3}{2} \geq \frac{y}{2}$ y は $x \leq y$ を満たす自然数だから, $y = 3$

$$\text{このとき, } \frac{1}{3} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \quad \therefore z = 3$$

これは $y \leq z$ を満たす。

以上より,

$$(x, y, z) = (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$$

(2)

$$x < y < z \text{ より, } \frac{1}{x} > \frac{1}{y} > \frac{1}{z}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$$

$$\text{ゆえに, } 2 > \frac{x}{3} \quad \text{すなわち } x < 6$$

これと $x \geq 4$ より, 自然数 $x = 4, 5$

$x = 4$ のとき

解法 1: 1 次不定方程式を解く

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{4} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{すなわち } \frac{yz - 4z - 4y}{4yz} = 0$$

$$\text{よって, } yz - 4z - 4y = 0 \text{ より, } (y - 4)(z - 4) = 16$$

また, y, z は $4 < y < z$ を満たす自然数だから, $z - 4 > y - 4 \geq 1$

$$\text{ゆえに, } (y - 4, z - 4) = (1, 16), (2, 8) \quad \text{すなわち } (y, z) = (5, 20), (6, 12)$$

解法 2: y の候補を絞り込んでから解く

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4}$$

$$\text{これと } \frac{1}{y} > \frac{1}{z} \text{ より, } \frac{1}{4} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

$$\text{よって, } 4 > \frac{y}{2} \quad \text{すなわち } y < 8$$

これと $x = 4 < y$ より, 自然数 $y = 5, 6, 7$

$y = 5$ のとき

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{1}{20} \quad \therefore z = 20$$

$y = 6$ のとき

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad \therefore z = 12$$

$y = 7$ のとき

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{z} = \frac{1}{4} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{3}{28} \quad \therefore z = \frac{28}{3}$$

z は自然数だから, 不適

$x=5$ のとき

解法 1 : 1 次不定方程式を解く

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{3}{10} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3yz - 10z - 10y}{10yz} = \frac{9yz - 30z - 30y}{30yz} = 0$$

$$\text{よって, } 9yz - 30z - 30y = 0 \text{ より, } (3y - 10)(3z - 10) = 100$$

ところが, y, z は $5 < y < z$ を満たす自然数だから, $3z - 10 > 3y - 10 \geq 8$

$3y - 10 \geq 8$ より, $3y - 10$ は 10 以上の 100 の約数である。

すると, $3z - 10 > 3y - 10$ かつ $(3y - 10)(3z - 10) = 100$ が成り立たない。

よって, $(3y - 10)(3z - 10) = 100$ を満たす y, z は存在しない。

解法 2 : y の候補を絞り込んでから解く

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \text{ より, } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10}$$

$$\text{これと } \frac{1}{y} > \frac{1}{z} \text{ より, } \frac{3}{10} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = \frac{2}{y}$$

$$\text{よって, } \frac{10}{3} > \frac{y}{2} \quad \text{すなわち} \quad y < \frac{20}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

これと $x=5 < y$ より, 自然数 $y=6$

$$\text{このとき, } \frac{1}{6} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10} \text{ より, } \frac{1}{z} = \frac{2}{15} \quad \therefore z = \frac{15}{2}$$

z は自然数だから, 不適

以上より,

$$(x, y, z) = (4, 5, 20), (4, 6, 12)$$

270

(1)

 $a \leq b \leq c$ より, $a + b + c \leq c + c + c = 3c$ これと, $abc = a + b + c$ より, $abc \leq 3c$ 両辺を c で割ると, $c \geq 1$ より, $ab \leq 3$

(2)

 a, b は自然数だから, $ab = 1, 2, 3$ これと $1 \leq a \leq b$ より, $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ $(a, b) = (1, 1)$ のとき $(a, b) = (1, 1)$ を $abc = a + b + c$ に代入すると, $c = 2 + c$ よって, 不適 $(a, b) = (1, 2)$ のとき $(a, b) = (1, 2)$ を $abc = a + b + c$ に代入すると, $2c = 3 + c$ より, $c = 3$ よって, $a \leq b \leq c$ を満たす。 $(a, b) = (1, 3)$ のとき $(a, b) = (1, 3)$ を $abc = a + b + c$ に代入すると, $3c = 4 + c$ より, $c = 2$ これは $b \leq c$ を満たさない。よって, 不適以上より, $(a, b, c) = (1, 2, 3)$

271

 $2 \leq p < q < r$ より, $\frac{1}{p} > \frac{1}{q} > \frac{1}{r}$ よって, $1 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$ より, $1 > \frac{p}{3}$ すなわち $p < 3$ これと $2 \leq p$ より, $2 \leq p < 3$ すなわち $p = 2$

解法 1: 1 次不定不等式を解く

これを $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ に代入すると, $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ よって, $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} - \frac{1}{r} < 0$ すなわち $\frac{qr - 2r - 2q}{2qr} < 0$ 条件より, $qr > 0$ だから, $qr - 2r - 2q < 0$ すなわち $(q - 2)(r - 2) < 4$ また, $3 \leq q < r$ ($\because p < q < r, p = 2$) より, $r - 2 > q - 2 \geq 1$ よって, $2 \leq (q - 2)(r - 2) < 4$ より, $(q - 2)(r - 2) = 2, 3$ ゆえに, $(q - 2, r - 2) = (1, 2), (1, 3)$ すなわち $(p, q) = (3, 4), (3, 5)$

以上より,

 $(p, q, r) = (2, 3, 4), (2, 3, 5)$

解法 2 : q の候補を絞り込んでから解く

これを $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ に代入すると, $\frac{1}{2} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ より, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$

これと $\frac{1}{q} > \frac{1}{r}$ より, $\frac{1}{2} < \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q} = \frac{2}{q}$

よって, $\frac{q}{2} < 2$ すなわち $q < 4$

これと $p < q$, $p = 2$ より, $2 < q < 4 \quad \therefore q = 3$

したがって, $\frac{1}{3} + \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$ より, $\frac{1}{r} > \frac{1}{6} \quad \therefore r < 6$

これと $q < r$, $q = 3$ より, $3 < r < 6$

よって, $r = 4, 5$

ゆえに, $(p, q, r) = (2, 3, 4), (2, 3, 5)$

例題 40

別解

(1)

$5x \equiv 2 \pmod{7}$ より, $5x - 2 \equiv 0 \pmod{7}$

よって, $5x - 2 = 7k$ (k は整数) すなわち $5x - 7k = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$

また, $5 \cdot (-1) - 7 \cdot (-1) = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より, $5(x+1) - 7(k+1) = 0 \quad \therefore 5(x+1) = 7(k+1)$

5 と 7 は互いに素だから, $x+1 = 7l$ (l は整数)

よって, $x = 7l - 1 = 7(l-1) + 6$

ゆえに, $x \equiv 6 \pmod{7}$

(2)

$3x \equiv 9 \pmod{12}$ より, $3x - 9 \equiv 0 \pmod{12}$

よって, $3x - 9 = 12k$ (k は整数) すなわち $x = 4k + 3$

k は整数だから, $3l, 3l+1, 3l+2$ (l は整数) のいずれかの形で表される。

したがって,

$k = 3l$ のとき

$x = 12l + 3$ より, $x \equiv 3 \pmod{12}$

$k = 3l+1$ のとき

$x = 4(3l+1) + 3 = 12l + 7$ より, $x \equiv 7 \pmod{12}$

$k = 3l+2$ のとき

$x = 4(3l+2) + 3 = 12l + 11$ より, $x \equiv 11 \pmod{12}$

以上より,

$x \equiv 3, 7, 11 \pmod{12}$

272

(1)

解法 1

$$7x - 3 \equiv 0 \pmod{5} \text{ より, } 7x - 3 = 5k \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{すなわち } 7x - 5k = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 7 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 7(x - 4) - 5(k - 5) = 0 \quad \text{すなわち } 7(x - 4) = 5(k - 5)$$

$$7 \text{ と } 5 \text{ は互いに素だから } x - 4 = 5l \quad (l \text{ は整数})$$

$$\text{よって, } x = 5l + 4 \quad \therefore x \equiv 4 \pmod{5}$$

解法 2

$$7x \equiv 3 \pmod{5} \text{ より, } 3 \cdot 7x \equiv 3 \cdot 3 \pmod{5}$$

$$\text{これと, } 3 \cdot 7x \equiv 21 \cdot x \equiv 1 \cdot x \equiv x \pmod{5}, \quad 3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{5} \text{ より, } x \equiv 4 \pmod{5}$$

(2)

解法 1

$$5x - 15 \equiv 0 \pmod{13} \text{ より, } 5x - 15 = 13k \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{すなわち } 5x - 13k = 15 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 5 \cdot 3 - 13 \cdot 0 = 15 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 5(x - 3) - 13k = 0 \quad \text{すなわち } 5(x - 3) = 13k$$

$$5 \text{ と } 13 \text{ は互いに素だから } x - 3 = 13l \quad (l \text{ は整数})$$

$$\text{よって, } x = 13l + 3 \quad \therefore x \equiv 3 \pmod{13}$$

解法 2

$$5x \equiv 15 \pmod{13} \text{ より, } 8 \cdot 5x \equiv 8 \cdot 15 \pmod{13}$$

$$\text{これと, } 8 \cdot 5x \equiv 40 \cdot x \equiv 1 \cdot x \equiv x \pmod{13}, \quad 8 \cdot 15 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 3 \pmod{13} \text{ より, } x \equiv 3 \pmod{13}$$

(3)

$$4x \equiv 8 \pmod{12} \text{ より, } 4x - 8 \equiv 0 \pmod{12}$$

$$\text{よって, } 4x - 8 = 12k \quad (k \text{ は整数}) \quad \text{すなわち } x = 3k + 2$$

k は整数だから, $4l, 4l + 1, 4l + 2, 4l + 3$ (l は整数) のいずれかの形で表される。

したがって,

$k = 4l$ のとき

$$x = 12l + 2 \text{ より, } x \equiv 2 \pmod{12}$$

$k = 4l + 1$ のとき

$$x = 3(4l + 1) + 2 = 12l + 5 \text{ より, } x \equiv 5 \pmod{12}$$

$k = 4l + 2$ のとき

$$x = 3(4l + 2) + 2 = 12l + 8 \text{ より, } x \equiv 8 \pmod{12}$$

$k = 4l + 3$ のとき

$$x = 3(4l + 3) + 2 = 12l + 11 \text{ より, } x \equiv 11 \pmod{12}$$

以上より,

$$x \equiv 2, 5, 8, 11 \pmod{12}$$

273

(1)

$$3x + 7y \equiv 41 \pmod{3}$$

これと $3x + 7y \equiv 0 \cdot x + 1 \cdot y \equiv y \pmod{3}$, $41 \equiv 2 \pmod{3}$ より, $y \equiv 2 \pmod{3}$

(2)

$y \equiv 2 \pmod{3}$ より, $y = 3k + 2$ (k は整数)

これを $3x + 7y = 41$ に代入すると, $3x + 7(3k + 2) = 41$

よって, $x = -7k + 9$

以上より, $3x + 7y = 41$ の整数解は $x = -7k + 9$, $y = 3k + 2$ (k は整数)

274

(1)

$$17x + 43y \equiv 341 \pmod{17}$$

これと $17x + 43y \equiv 0 \cdot x + 9 \cdot y \equiv 9y$, $341 \equiv 1 \pmod{17}$ より, $9y \equiv 1 \pmod{17}$

よって, $2 \cdot 9y \equiv 2 \cdot 1 \pmod{17}$

これと $2 \cdot 9y \equiv 18 \cdot y \equiv 1 \cdot y \equiv y \pmod{17}$, $2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{17}$ より, $y \equiv 2 \pmod{17}$

したがって, $y = 17k + 2$ (k は整数)

これと $17x + 43y = 341$ より, $17x + 43(17k + 2) = 341 \quad \therefore x = -43k + 15$

以上より, $x = -43k + 15$, $y = 17k + 2$ (k は整数)

合同式を使わない解法

$17x + 43y = 341 \quad \cdots \textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-43y + 341}{17} \\ &= \frac{17(-3y + 20) + 8y + 1}{17} \\ &= -3y + 20 + \frac{8y + 1}{17} \end{aligned}$$

よって, $y = 2$ のとき $x = 15$

したがって, $17 \cdot 15 + 43 \cdot 2 = 341 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より, $17(x - 15) + 43(y - 2) = 0$ すなわち $17(x - 15) = -43(y - 2)$

17 と -43 は互いに素だから, $x - 15 = 43k$, $y - 2 = -17k$ (k は整数)

ゆえに, $x = 43k + 15$, $y = -17k + 2$ (k は整数)

補足

17 と -43 は互いに素だから, $x - 15 = -43k$, $y - 2 = 17k$ (k は整数)

ゆえに, $x = -43k + 15$, $y = 17k + 2$ (k は整数)

としてもよい。

一般解の表し方はいくらでもある。

(2)

$$93x - 29y \equiv 424 \pmod{29}$$

これと $93x - 29y \equiv 6 \cdot x - 0 \cdot y \equiv 6 \cdot x \pmod{29}$, $424 \equiv 18 \pmod{29}$ より, $6 \cdot x \equiv 18 \pmod{29}$

よって, $5 \cdot 6 \cdot x \equiv 5 \cdot 18 \pmod{29}$

これと $5 \cdot 6 \cdot x \equiv 30 \cdot x \equiv 1 \cdot x \pmod{29}$, $5 \cdot 18 \equiv 90 \equiv 3 \pmod{29}$ より, $x \equiv 3 \pmod{29}$

ゆえに, $x = 29k + 3$ (k は整数)

また, これと $93x - 29y = 424$ より, $93(29k + 3) - 29y = 424 \quad \therefore y = 93k - 5$

以上より, $x = 29k + 3, y = 93k - 5$ (k は整数)

合同式を使わない解法

$93x - 29y = 424 \quad \cdots \textcircled{1}$ より,

$$\begin{aligned} y &= \frac{93x - 424}{29} \\ &= \frac{29(3x - 14) + 6x - 18x}{29} \\ &= 3x - 14 + \frac{6(x - 3)}{29} \end{aligned}$$

よって, $x = 3$ のとき $y = -5$

したがって, $93 \cdot 3 - 29 \cdot (-5) = 424 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より, $93(x - 3) - 29(y + 5) = 0$ すなわち $93(x - 3) = 29(y + 5)$

93 と 29 は互いに素だから, $x - 3 = 29k, y + 5 = 93k$ (k は整数)

ゆえに, $x = 29k + 3, y = 93k - 5$ (k は整数)