平面上のベクトル 1　平面上のベクトル
平面上のベクトル 2　ベクトルの演算

9

(1)

$2\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}$　・・・①

$\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}$　・・・②

とすると,

①+②より, $3\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}$　$\therefore \vec{x}==\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

②より, $\vec{y}=\vec{x}-\vec{b}$ だから, $\vec{y}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\vec{b}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

よって, $\vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$, $\vec{y}=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

(2)

$2\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a}+\vec{b}$　・・・①

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$　・・・②

とすると,

①+3×②より, $5\vec{x}=4\vec{a}-2\vec{b}$　$\therefore \vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$

②より, $\vec{y}=-\vec{x}+\vec{a}-\vec{b}$ だから, $\vec{y}=-\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

よって, $\vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}-\frac{2}{5}\vec{b}$, $\vec{y}=\frac{1}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$

10

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=3\vec{b}-2\vec{a}\\&=\frac{1}{2}\left(6\vec{b}-4\vec{a}\right)\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

また, 条件より $\overrightarrow{OP}\neq\vec{0}$

よって, $\overrightarrow{OP}//\overrightarrow{AB}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= 3\vec{a} - \left(3\vec{a} - 2\vec{b}\right) \\ &= 2\vec{b} \\ &= 2\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

また，条件より，$\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$

よって，$\overrightarrow{PQ} \,/\!/\, \overrightarrow{OB}$

11

平行四辺形の性質より，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

よって，

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{u} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

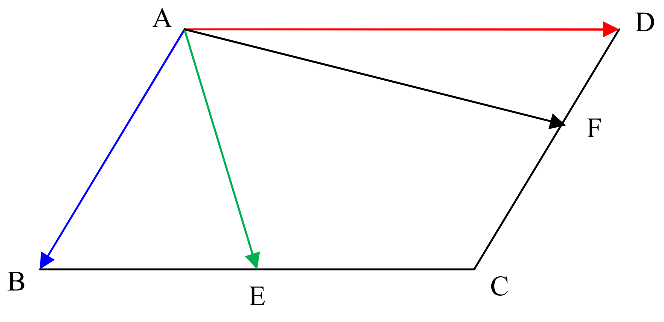
$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{v} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b} \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

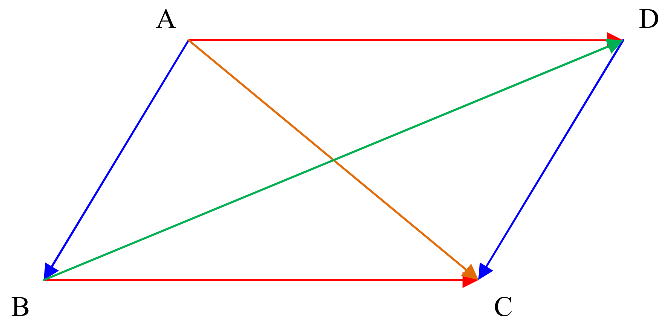
②－2×①より，$\vec{v} - 2\vec{u} = -\frac{8}{5}\vec{a}$　　$\therefore \vec{a} = \frac{5}{4}\vec{u} - \frac{5}{8}\vec{v}$

②より，$\vec{b} = 2\vec{u} - 2\vec{a}$ だから，$\vec{b} = 2\vec{u} - 2\left(\frac{5}{4}\vec{u} - \frac{5}{8}\vec{v}\right) = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{4}\vec{v}$

よって，$\vec{a} = \frac{5}{4}\vec{u} - \frac{5}{8}\vec{v}$，$\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{5}{4}\vec{v}$



12



四角形 ABCD が平行四辺形である $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$ の証明

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

ここで，平行四辺形の性質より，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

よって，$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$

四角形 ABCD が平行四辺形である $\Leftarrow$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$ の証明

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\left(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)\\&=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

これと $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$ より，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}$ $\therefore \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$

ゆえに，四角形 ABCD は平行四辺形である。

以上より，

四角形 ABCD が平行四辺形である $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}$

が成り立つ。