平面上のベクトル 3　ベクトルの成分

ことわり

座標とベクトルを区別する目的で，座標は$(x,\ y)$，ベクトルは$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表示している。

19

$\vec{x}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$とすると，

条件より，

$2\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore\ 2p+r=5$　・・・①　$2q+s=0$　・・・②

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　$\therefore\ p+2r=-2$　・・・③　$q+2s=3$　・・・④

①と③の連立方程式を解くことにより，$p=4,\ r=-3$

②と④の連立方程式を解くことにより，$q=-1,\ s=2$

よって，$\vec{x}=\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\vec{y}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

20

3 つの頂点が A,B,C の平行四辺形には対角線が AB，AC，BC の 3 種類があり，

それぞれの平行四辺形について頂点 D が満たすべき必要十分条件は

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$である。

$D(p,q)$とすると，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$の場合

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$ より，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$，すなわち$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

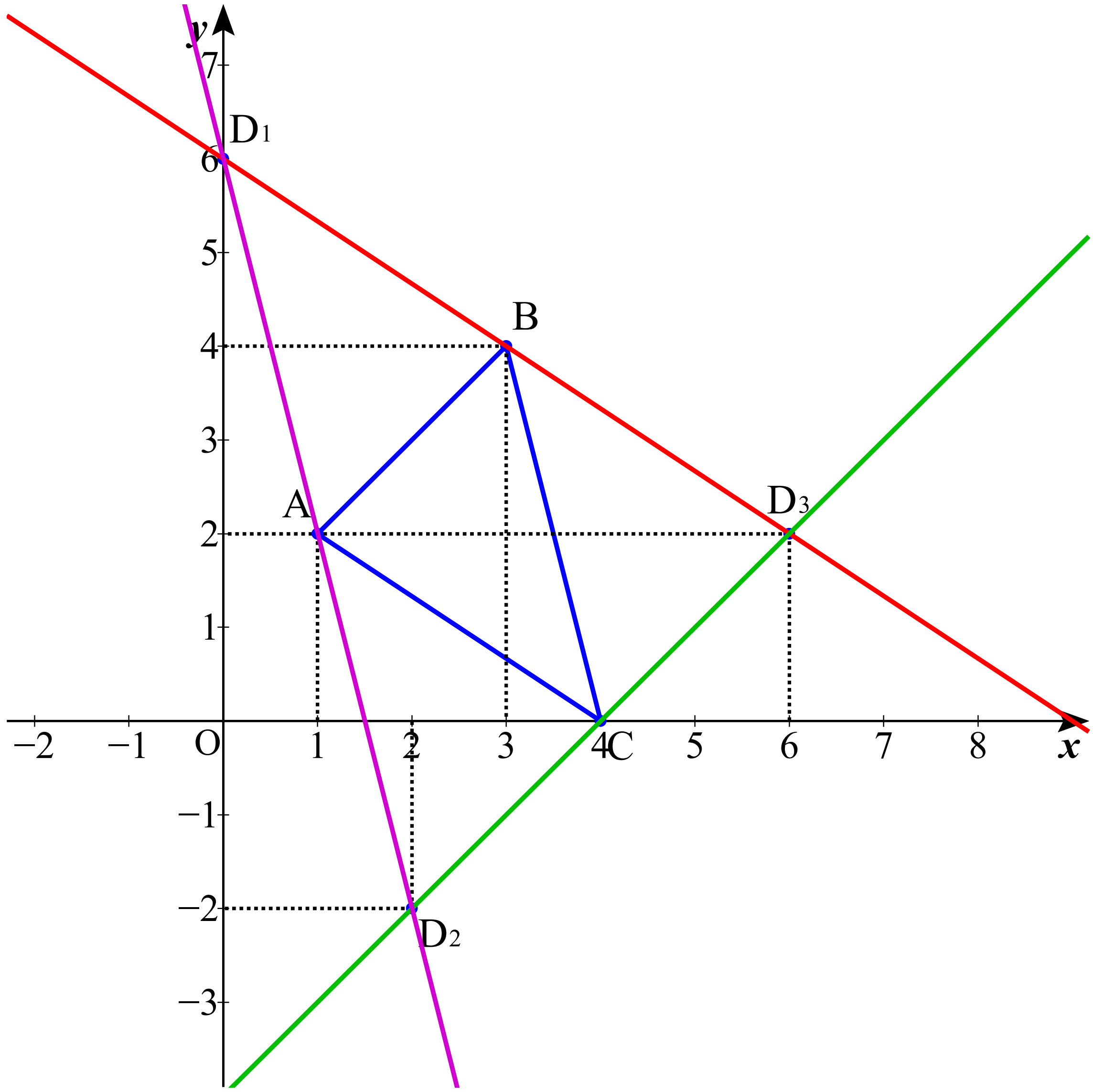
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$の場合

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$ より，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，すなわち$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$の場合

$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$ より，$\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，すなわち$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

以上より，D の座標は$(0,\ 6),\ (2,\ -2),\ (6,\ 2)$

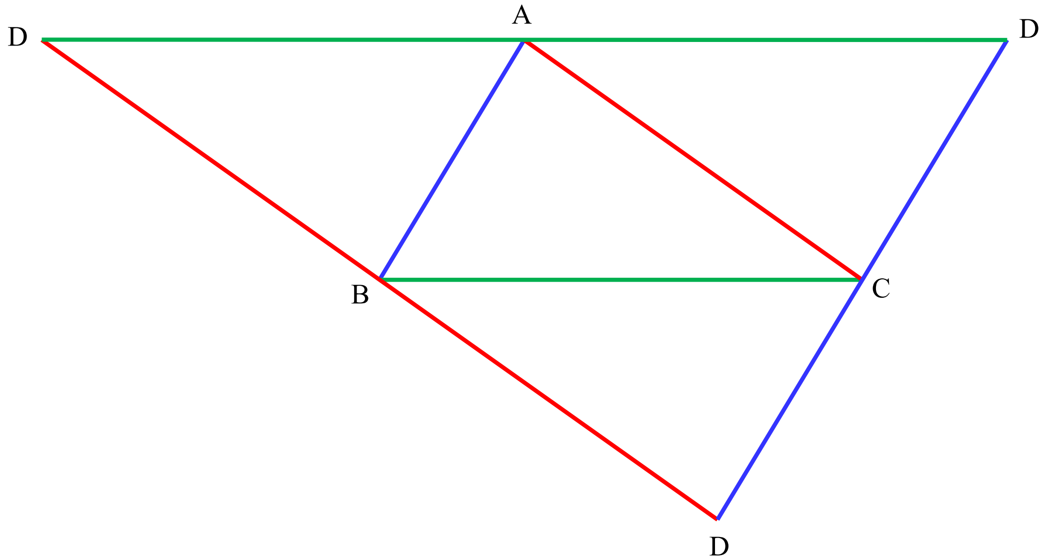

y
x
O
D1
D2
D3
A
B
C
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8

補足

3 定点を頂点とする平行四辺形の第 4 の頂点の取り方

3 定点 A,B,C を頂点とする平行四辺形の第 4 の頂点を D とすると,

点 A を通り辺 BC と平行な直線，点 B を通り辺 AC と平行な直線，点 C を通り辺 AB と平行な直線がつくる三角形の頂点が平行四辺形第 4 の頂点 D である。



21

$\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)//\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$であるための必要十分条件は,

$$\vec{a}+3\vec{b}=\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+6 \\ -10 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-x \\ -2 \end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

より,

$\vec{a}+3\vec{b}=k\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$，すなわち$\begin{pmatrix} x+6 \\ -10 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 2-x \\ -2 \end{pmatrix}$を満たす実数$k$が存在することである。

$-10=-2k$ より， $k=5$

このとき $x+6=5(2-x)$ $\quad\therefore x=\dfrac{2}{3}$

22

$\vec{x}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とする。

$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が平行であるための必要十分条件は，$\vec{a}\neq\vec{0}$ より，

$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{x}-\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在することである。

$\vec{x}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるためには，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ・・・①

$\vec{x}-\vec{b}=k\vec{a}$ であるためには，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad\therefore\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k+3 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$（$k$ は実数） ・・・②

ゆえに，①，②より，$\vec{x}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が平行であるための必要十分条件は，

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2k+3 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$ を満たす 0 でない実数 k が存在することである。

$\vec{x}+\vec{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+3 \\ q+1 \end{pmatrix}$ および②より，$\vec{x}+\vec{b}=\begin{pmatrix} 2k+6 \\ 2k+2 \end{pmatrix}$

これと，$\left|\vec{x}+\vec{b}\right|=4$ であることと $\left|\vec{x}+\vec{b}\right|^2=16$ であることは必要十分の関係でだから，

$(2k+6)^2+(2k+2)^2=16 \quad \therefore 8(k+1)(k+3)=0 \quad \therefore k=-1,\ -3$

これは $k\neq0$ を満たすから，②に $k=-1,\ -3$ を代入することにより，$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

よって，$\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$

23

(1)

$\left|\vec{c}\right|=\sqrt{15}$ であることと $\left|\vec{c}\right|^2=15$ であることは必要十分の関係だから，

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=15$ を満たす実数 t を求めればよい。

$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=15$ を満たす実数 t は，

$\vec{a}+t\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+t \\ 1+2t \end{pmatrix}$ より，$\left|\vec{a}+t\vec{b}\right|^2=(3+t)^2+(1+2t)^2=5t^2+10t+10$ だから，

$5t^2+10t+10=15$，すなわち $5(t^2+2t-1)=0$ の解である。

よって，$t^2+2t-1=0$ を解の公式で解くことにより，$t=-1\pm\sqrt{2}$

(2)

$|\vec{c}|^2$ が最小となるとき，必要十分の関係から，$|\vec{c}|$ も最小となる。

そこで，まず $|\vec{c}|^2$ の最小値とそのときの t の値を求めることにする。

(1)より，$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}+t\vec{b}|^2 = 5t^2+10t+10 = 5(t+1)^2+5$

よって，$|\vec{c}|^2$ は $t=-1$ のとき最小値 5 をとる。

ゆえに，$|\vec{c}|$ は $t=-1$ のとき最小値 $\sqrt{5}$ をとる。