

平面上のベクトル 4 ベクトルの内積

ことわり

座標とベクトルを区別する目的で、座標は (x, y) ，ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表示している。

32

(1)

$$|3\vec{a} + 2\vec{b}| = 2\sqrt{7} \text{ より, } |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = 28 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} |3\vec{a} + 2\vec{b}|^2 &= (3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + 2\vec{b}) \\ &= 9\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 9|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 36 + 24\cos\theta + 4 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 36 + 24\cos\theta + 4 = 28 \quad \therefore \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad (0 \leq \theta \leq 180^\circ)$$

ゆえに, $\theta = 120^\circ$

(2)

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = 7 \text{ より, } |2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 49$$

これと

$$\begin{aligned} |2\vec{a} - \vec{b}|^2 &= (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) \\ &= 4\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 4|\vec{a}|^2 - 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 \\ &= 64 - 16|\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

より,

$$64 - 16|\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 = 49 \quad \therefore |\vec{b}|^2 - 16|\vec{b}|\cos\theta = -15 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - 3\vec{a}) = -43$$

および

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - 3\vec{a}) &= -3\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= -3|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 \\ &= -48 - 8|\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

より,

$$-48 - 8|\vec{b}|\cos\theta + |\vec{b}|^2 = -43 \quad \therefore |\vec{b}|^2 - 8|\vec{b}|\cos\theta = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \times 2 - \textcircled{1} \text{より}, \quad |\vec{b}|^2 = 25 \quad \therefore |\vec{b}| = 5$$

$$\text{これを}\textcircled{1}\text{あるいは}\textcircled{2}\text{に代入し}\cos\theta\text{を求めると}\cos\theta = \frac{1}{2} \quad (0 \leq \theta \leq 180^\circ) \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

33

$$\text{条件より}, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

これと

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) &= \vec{a} \cdot \vec{a} + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + (t+1)(-2) + t|\vec{b}|^2 \\ &= 4 - 2(t+1) + 4t \\ &= 2t + 2 \end{aligned}$$

より,

$$3t + 2 = 0 \quad \therefore t = -1$$

34

$\vec{x}$ と $\vec{b} - \vec{a}$ は平行だから, 実数 k を用いて $\vec{x} = k(\vec{b} - \vec{a})$ と表せる。

$$\text{よって}, \quad \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = k \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} -k \\ -3k \end{pmatrix} \quad \therefore p = -k, q = -3k \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{x} - \vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直だから, $(\vec{x} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = 0$

これと

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{b}) \cdot \vec{a} &= \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p-3 \\ q+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= 4(p-3) + 2(q+1) \\ &= 4p + 2q - 10 \end{aligned}$$

より,

$$4p + 2q - 10 = 0 \quad \therefore 2p + q = 5 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって}, \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \quad -2k - 3k = 5 \quad \therefore k = -1$$

これを①に代入し, p, q の値を求めると, $p = 1, q = 3$

35

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$2\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ より, } \begin{pmatrix} 2p - r \\ 2q - s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \therefore r = 2p \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad s = 2q - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$2|\vec{x}| = |\vec{y}| \text{ より, } 4|\vec{x}|^2 = |\vec{y}|^2 \quad \therefore 4p^2 + 4q^2 = r^2 + s^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 6 \text{ より, } pr + qs = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①, ②を③, ④に代入し, 整理すると,

$$16q - 16 = 0, \quad 2(p^2 + q^2 - 2q - 3) = 0 \quad \therefore q = 1, \quad p = \pm 2$$

これと①, ②より,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ または } \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

36

(1)

$$\cos \theta = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{OQ}}{|\vec{OP}| |\vec{OQ}|} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ) \text{ より, } \theta = 30^\circ$$

(2)

三角形 OPQ について, 余弦定理より,

$$\begin{aligned} |\vec{PQ}|^2 &= |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 - 2|\vec{OP}| |\vec{OQ}| \cos \theta \\ &= |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 - 2\vec{OP} \cdot \vec{OQ} \\ &= 4 + 3 - 6 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{PQ}| = 1$$

37

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \text{ ならば } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 \text{ より, } |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

これと $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ より, $\vec{a} \perp \vec{b}$

38

(1)

解法 1

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \vec{a} \cdot (-\vec{b} - \vec{c}) \\ &= -\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}| = 2$$

$$\text{同様にして, } |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 2$$

解法 2

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \text{ より, } \vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$$

これを $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = -2$ に代入すると,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = (-\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{a} = -2 \quad \therefore |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = -2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

$$\text{また, これより, } |\vec{c}|^2 = |-\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + (-|\vec{a}|^2) + |\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$\text{ゆえに, } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$$

(2)

$$(1) \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 4 \cos \theta$$

$$\text{これと } \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \text{ より, } 4 \cos \theta = -2 \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta \leq 180^\circ \text{ だから, } \theta = 120^\circ$$

39

(1)

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\
&= |\vec{b}|^2 \left(t^2 + \frac{2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} t \right) + |\vec{a}|^2 \\
&= |\vec{b}|^2 \left(t + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 - \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2} + |\vec{a}|^2 \\
&= |\vec{b}|^2 \left(t + \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right)^2 + \frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}
\end{aligned}$$

よって、 $|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ は、 $t = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$ のとき最小値 $\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$ をとる。

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ が最小値をとるとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小値をとるから、

$$t_0 = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}, \quad m = \frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}}{|\vec{b}|}$$

(2)

$$\begin{aligned}
(\vec{a} + t_0\vec{b}) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} + t_0|\vec{b}|^2 \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} + \left(-\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) |\vec{b}|^2 \\
&= \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで、 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \neq k\vec{b}$ (k は実数) より、 $\vec{a} + t\vec{b} \neq \vec{0}$

よって、 $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{b}$ は垂直である。

40

$$\begin{aligned}
 (x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= x+y+2(x-y) \\
 &= 3x-y
 \end{aligned}$$

これと $(x\vec{a} + y\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ より, $3x - y = 0 \quad \therefore y = 3x \quad \cdots \textcircled{1}$

$$|x\vec{a} + y\vec{b}| = 2\sqrt{5} \text{ より, } |x\vec{a} + y\vec{b}|^2 = 20$$

$$\text{これと } x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \text{ より, } (x+y)^2 + (x-y)^2 = 20 \quad \therefore x^2 + y^2 = 10 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } 10x^2 = 10 \quad \therefore x = \pm 1$$

これを $\textcircled{1}$ に代入することにより, $x=1, y=3$ または $x=-1, y=-3$

41

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \text{ とすると,}$$

$$|\vec{x}| = 5 \text{ より, } |\vec{x}|^2 = 25 \quad \therefore p^2 + q^2 = 25 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = |\vec{x}| |\vec{a}| \cos 45^\circ = 5 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 7^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25 \text{ および } \vec{x} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = -p + 7q \text{ より,}$$

$$-p + 7q = 25 \quad \therefore p = 7q - 25 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } (7q - 25)^2 + q^2 = 25 \quad \therefore 50(q - 3)(q - 4) = 0$$

これと $\textcircled{2}$ より, $p = -4, q = 3$ または $p = 3, q = 4$

$$\text{よって, } \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

42

(1)

$$|\vec{x} - \vec{y}| = 1 \text{ より, } |\vec{x} - \vec{y}|^2 = 1$$

$$\text{これと } |\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2 \text{ より, } |\vec{x}|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + |\vec{y}|^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|2\vec{y} - \vec{x}| = 2 \text{ についても同様にして, } |\vec{x}|^2 - 4\vec{x} \cdot \vec{y} + 4|\vec{y}|^2 = 4 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(\vec{x} - \vec{y}) \perp (2\vec{y} - \vec{x}) \text{ より, } (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (2\vec{y} - \vec{x}) = 0$$

$$\text{これと } (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (2\vec{y} - \vec{x}) = -|\vec{x}|^2 + 3\vec{x} \cdot \vec{y} - 2|\vec{y}|^2 \text{ より, } |\vec{x}|^2 - 3\vec{x} \cdot \vec{y} + 2|\vec{y}|^2 = 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{ より, } |\vec{x}|^2 - 2|\vec{y}|^2 = -2 \quad \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{3} \times 2 \text{ より, } |\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 = 3 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ より, } |\vec{x}|^2 = 8, |\vec{y}|^2 = 5 \quad \therefore |\vec{x}| = 2\sqrt{2}, |\vec{y}| = \sqrt{5}$$

(2)

$$\textcircled{1} \text{ より, } |\vec{x}|^2 - 2|\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cos \theta + |\vec{y}|^2 = 1 \quad \therefore \cos \theta = \frac{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 1}{2|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$$\text{これと } |\vec{x}| = 2\sqrt{2}, |\vec{y}| = \sqrt{5} \text{ より, } \cos \theta = \frac{8 + 5 - 1}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

43

(1)

$$0 \leq |\vec{a} + \vec{b}|, \quad 0 \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \text{ だから, } |\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 \text{ が成り立つことを示せばよい。}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta + |\vec{b}|^2$$

$$(|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \text{ より,}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 - (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 = 2|\vec{a}||\vec{b}|(\cos \theta - 1) \leq 0, \quad \text{すなわち } |\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$$

$$\text{よって, } |\vec{a} + \vec{b}| \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)$$

等号成立は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 0° のとき, すなわち $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じとき

(2)

(1)より, $|\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$ が成り立つ。

$$\vec{A} = 2\vec{a}, \vec{B} = 3\vec{b} \text{ とおくと, } |2\vec{a} + 3\vec{b}| \leq |2\vec{a}| + |3\vec{b}| = 2|\vec{a}| + 3|\vec{b}|$$

研究 三角形の面積

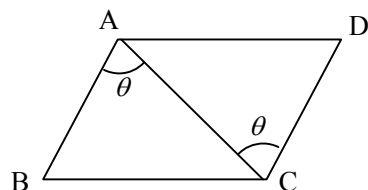
$$\triangle ABC \text{ において, } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \angle BAC = \theta$$

$$\triangle ABC \text{ の面積を } S \text{ とすると, } S = \frac{1}{2} |ps - qr|$$

要するに, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ をたすき掛けした値の絶対値を $\frac{1}{2}$ 倍すればよい。

ちなみに, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ をたすき掛けした値の絶対値は,

A, B, C を頂点とする平行四辺形の面積である。



証明

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \sin^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) - (pr + qs)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 s^2 - 2prqs + q^2 r^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(ps - qr)^2} \\ &= \frac{1}{2} |ps - qr| \end{aligned}$$

44

(1)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{より},$$

$$S = \frac{1}{2} \left| (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} - (-1 + \sqrt{3}) \cdot 1 \right| = 2$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{より},$$

$$S = \frac{1}{2} |-1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3| = 4$$

45

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

ここで,

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 4 \text{ より, } |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 16$$

これと

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 \\ &= 13 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

より,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}$$

よって,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{36 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{36 \cdot 4 - 9}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{9(16-1)}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$