平面上のベクトル 5　位置ベクトル

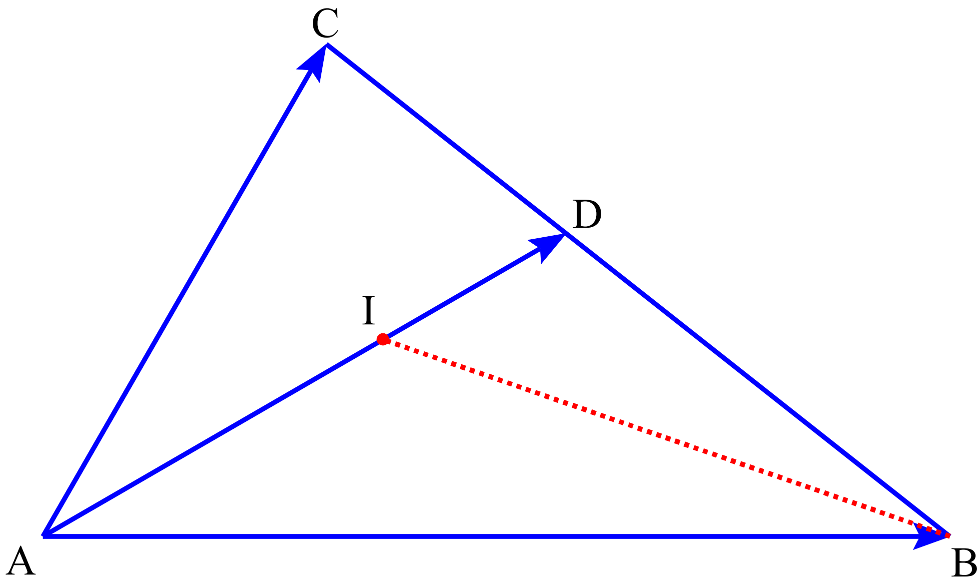
位置ベクトル

任意の点 P の位置を定点 O を基準点とするベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ で表すとき，
このベクトルを「O を基準点とする P の位置ベクトル」という。

座標系の原点を基準点に定めれば，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分と P の座標が一致するので便利である。

50

解法 1：内角の二等分線の性質を利用



∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，三角形の内角の二等分線の性質より，
BD：DC＝AB：AC＝8：5　・・・①

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5}{8+5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{8}{8+5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{5}{13}\vec{b}+\frac{8}{13}\vec{c}$　・・・②

余弦定理より，$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos60^\circ=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}=49$

$\therefore \mathrm{BC}=7$　・・・③

①，③より，$\mathrm{BD}=\frac{8}{8+5}\cdot7=\frac{56}{13}$　・・・④

△ABD の∠B の二等分線と AD の交点が I だから，
三角形の内角の二等分線の性質と④より，

AI：ID＝BA：BD＝8：$\frac{56}{13}$＝13：7　$\therefore \mathrm{AI}=\frac{13}{13+7}\mathrm{AD}=\frac{13}{20}\mathrm{AD}$　・・・⑤

よって，②，⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{13}{20}\left(\frac{5}{13}\vec{b}+\frac{8}{13}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

解法 2：二等分線を単位ベクトルで表して解く

辺 AB 上に AE＝1 を満たす点 E を，辺 AC 上に AF＝1 を満たす点 F をとると，

AE＝AF だから，三角形の内角の二等分線の性質より，

∠A の二等分線は EF の中点を通る。

これと $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|}=\dfrac{\vec{b}}{8}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|}=\dfrac{\vec{c}}{5}$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\dfrac{\vec{b}}{8}+\dfrac{\vec{c}}{5}\right)=\dfrac{k}{8}\vec{b}+\dfrac{k}{5}\vec{c}$　・・・①　と表せる。

余弦定理より，

$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos 60^\circ}=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2}}=7$ だから，

$\overrightarrow{\mathrm{BI}}$ についても，同様に，実数 l を用いて，

$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=m\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|}\right)=m\left(-\dfrac{\vec{b}}{8}+\dfrac{\vec{c}-\vec{b}}{7}\right)=m\left(-\dfrac{15}{56}\vec{b}+\dfrac{\vec{c}}{7}\right)$ と表せる。

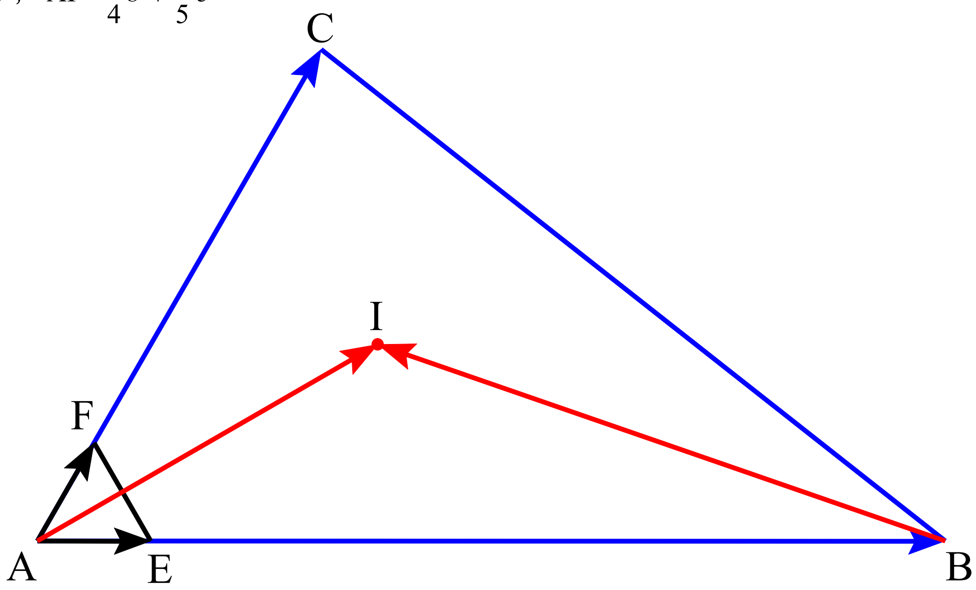
よって，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BI}}=\vec{b}+m\left(-\dfrac{15}{56}\vec{b}+\dfrac{\vec{c}}{7}\right)=\left(1-\dfrac{15}{56}m\right)\vec{b}+\dfrac{m}{7}\vec{c}$　・・・②

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は互いに独立なベクトルだから，

①，②より，$\dfrac{k}{8}=1-\dfrac{15}{56}m$，$\dfrac{k}{5}=\dfrac{m}{7}$

これを解くことにより，$k=2$

これと①より，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$



解法 3：三角形の面積比を利用して解く

余弦定理より， $\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos60^\circ}=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cdot\frac{1}{2}}=7$

よって，内接円の半径を r とすると，△IAB，△IBC，△ICA の面積比は

△IAB：△IBC：△ICA＝$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot r$ ： $\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot r$ ： $\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot r$

＝AB：BC：CA

＝8：7：5　・・・①

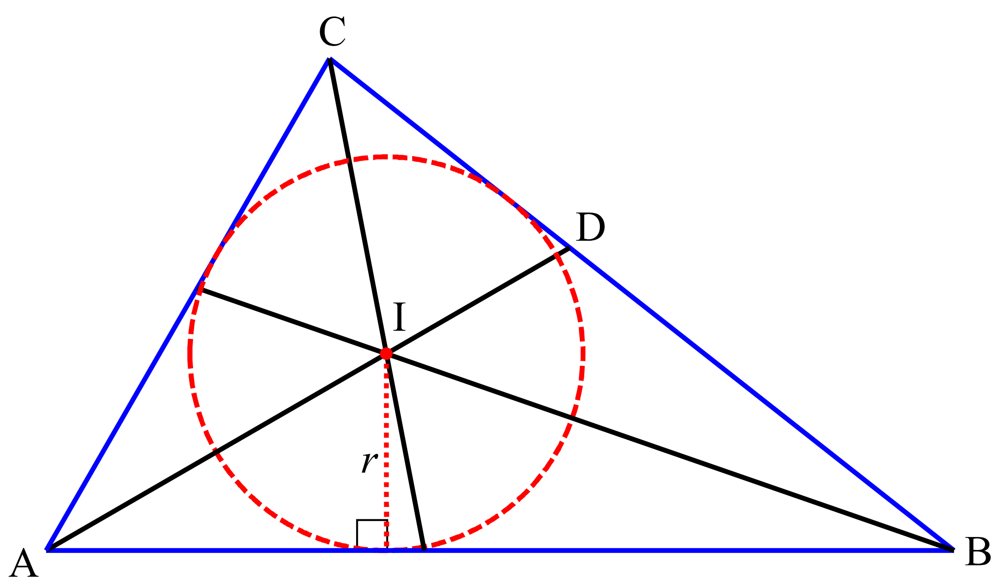
直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，
辺 BC を共通底辺としたときの△ABC と△IBC の面積比は，
△ABC：△IBC＝AD：ID　・・・②
①より，△ABC：△IBC＝$(8+7+5)$：7＝20：7　・・・③
②，③より，AD：ID＝ 20：7
よって，AD：AD＝20：$(20-7)$＝20：13

これより， $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{13}{20}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$

ここで，
三角形の内角の二等分線の性質より，BD：DC＝AB：AC＝8：5 だから，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{5}{8+5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{8}{8+5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{5}{13}\vec{b}+\frac{8}{13}\vec{c}$

ゆえに， $\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{13}{20}\left(\frac{5}{13}\vec{b}+\frac{8}{13}\vec{c}\right)=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$



解法 4：座標を利用して解く

$A(0,\ 0)$，$B(8,\ 0)$とし，C を第 1 象限にとると，$(5\cos 60°,\ 5\sin 60°)=\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

直線 AI の方程式を求める

∠A の 2 等分線，すなわち直線 AI は原点を通り，傾きが $\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$ だから，

その方程式は $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$　・・・①

△ABC の面積から内心の座標を求める

辺 BC を底辺とすると，高さは点 C の y 座標と等しいから，

△ABC の面積＝$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$　・・・②

また，余弦定理より，

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos 60°}=\sqrt{8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot \frac{1}{2}}=7$ だから，

△ABC の内接円の半径を r とすると，

△ABC の面積＝$\frac{1}{2}AB\cdot r+\frac{1}{2}BC\cdot r+\frac{1}{2}CA\cdot r$

$=\frac{1}{2}r(AB+BC+CA)$

$=\frac{1}{2}r(8+7+5)$

$=10r$　・・・③

②，③より，$10r=10\sqrt{3}$　$\therefore r=\sqrt{3}$

I の y 座標は内接円の半径と等しいから，I の y 座標は $\sqrt{3}$ である。

これと①より，I の座標は $I(3,\ \sqrt{3})$

ベクトルを求める。

$\vec{b}=\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}$ より，$\vec{b}$ の単位ベクトルは $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{\vec{b}}{8}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{c}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ より，$\vec{c}$ の単位ベクトルは $\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\frac{\vec{c}}{5}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ は実数 k を用いて，

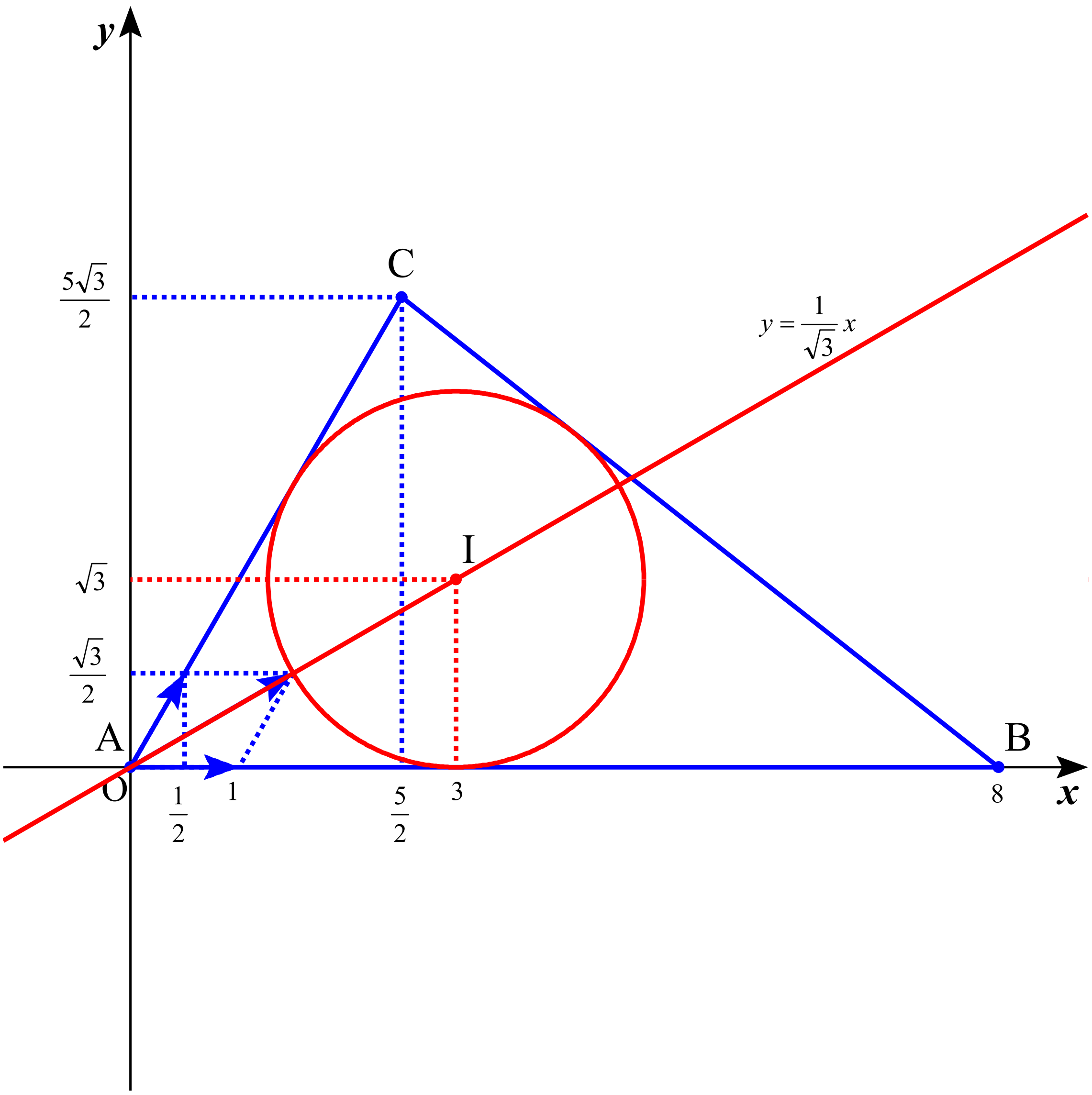
$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\frac{\vec{b}}{8}+\frac{\vec{c}}{5}\right)=k\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}k\\\frac{\sqrt{3}}{2}k\end{pmatrix}$$ と表せる。

一方，$\mathrm{I}\left(3,\ \sqrt{3}\right)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\begin{pmatrix}3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ だから，

$\frac{3}{2}k=3,\ \frac{\sqrt{3}}{2}k=\sqrt{3}$ より，$k=2$

ゆえに，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=2\left(\frac{\vec{b}}{8}+\frac{\vec{c}}{5}\right)=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$$



51

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}=\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 の中点をそれぞれ L,M,N とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}}{2}=\frac{\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OB_2}}}{2}=\frac{\dfrac{\vec{c}+\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OC_1}}+\overrightarrow{\mathrm{OC_2}}}{2}=\frac{\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\dfrac{\vec{c}}{2}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

よって，点 O に対する点 L,M,N の位置ベクトルが一致する。

ゆえに，点 L,M,N，すなわち A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 の中点は一致する。

52

A を基準点とする B,C,G,P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{g}$, $\vec{p}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}+\left(\vec{p}-\vec{b}\right)-2\left(\vec{p}-\vec{c}\right)=-\vec{b}+2\vec{c}$$

$$3\overrightarrow{\mathrm{GC}}=3\left(\vec{c}-\vec{g}\right)=3\left(\vec{c}-\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right)=-\vec{b}+2\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}-2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{GC}}$

53

A を基準点とする B,C,P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする。

(1)

$$-\vec{p}+\left(\vec{b}-\vec{p}\right)+\left(\vec{c}-\vec{p}\right)=\vec{b} \qquad \therefore \vec{p}=\frac{1}{3}\vec{c}$$

したがって，点 P は辺 AC を 1 : 2 に内分する点

(2)

$$\vec{p}+\left(\vec{p}-\vec{b}\right)+\left(\vec{p}-\vec{c}\right)=\vec{0} \qquad \therefore \vec{p}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

したがって，点 P は△ABC の重心

(3)

$$-\vec{p}+\left(\vec{c}-\vec{p}\right)=\vec{c} \qquad \therefore \vec{p}=\vec{0}$$

したがって，点 P は点 A と一致

54

A を基準点とする B,C,P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ とする。

(1)

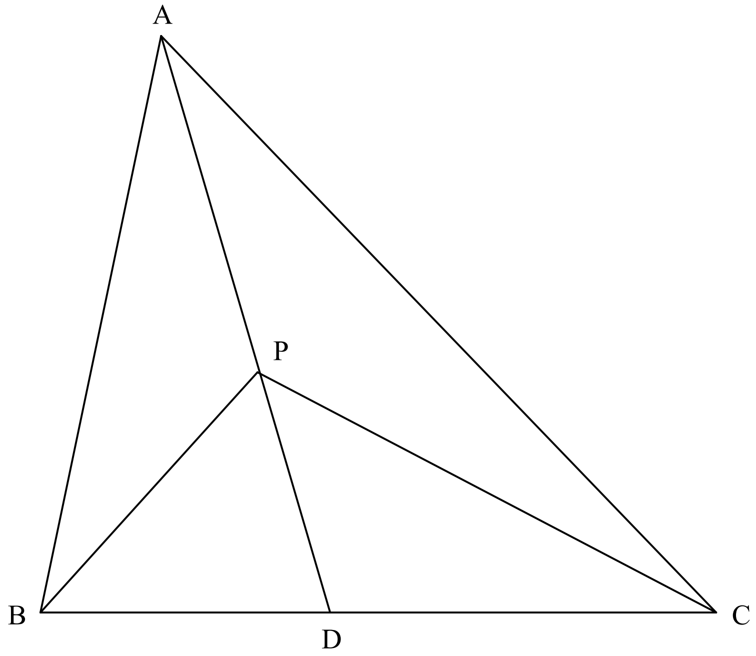
$5\vec{p}+4(\vec{p}-\vec{b})+3(\vec{p}-\vec{c})=\vec{0}$ より，$12\vec{p}=4\vec{b}+3\vec{c}$

よって，

$$\vec{p}=\frac{4}{12}\vec{b}+\frac{3}{12}\vec{c}$$
$$=\frac{7}{12}\left(\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{c}\right)$$

ゆえに，辺 BC を 3 : 4 に内分する点を D とすると，点 P は AD を 7 : 5 に内分する点

(2)



△ABC の面積を 1 とすると，

AB：PD＝12 : 5 より，

△PBC の面積＝△ABC の面積×$\frac{5}{12}$＝$\frac{5}{12}$　・・・①

よって，△PAB の面積＋△PCA の面積＝△ABC の面積－△PBC の面積＝$1-\frac{5}{12}$＝$\frac{7}{12}$

これと，△PAB の面積：△PCA の面積＝BD：CD＝3：4 より，

△PAB の面積＝$\frac{7}{12}\times\frac{3}{3+4}=\frac{3}{12}$　・・・②　　△PCA の面積＝$\frac{7}{12}-\frac{3}{12}$＝$\frac{4}{12}$　・・・③

①，②，③より，△PBC：△PCA：△PAB＝5 : 4 : 3

他に,

△PBD の面積を 1 とすると,

BD：DC＝3：4 より，△PCD の面積＝△PBD の面積×$\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

△PBC の面積＝△PBD の面積＋△PCD の面積＝$1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$

AP：PD＝7：5 より,

△PCA の面積＝△PCD の面積×$\frac{7}{5}=\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}=\frac{28}{15}$

△PAB の面積＝△PBD の面積×$\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$

よって，△PBC：△PCA：△PAB＝$\frac{7}{3}:\frac{28}{15}:\frac{7}{5}$＝35：28：21＝5：4：3

など