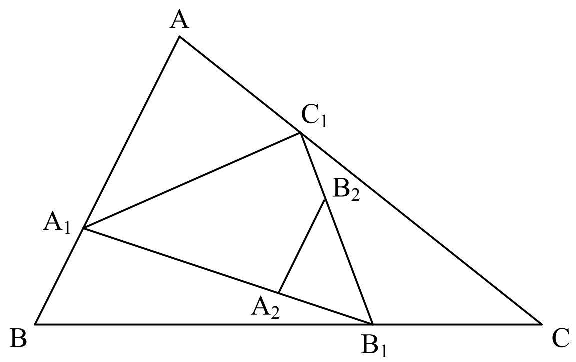
平面上のベクトル 6　ベクトルと図形

59

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_2B_2} &= \overrightarrow{AB_2} - \overrightarrow{AA_2}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC_1} - \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB_1}\right)\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC_1}\\ &= -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

これと $\overrightarrow{A_2B_2} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ より，$\overrightarrow{A_2B_2} \,//\, \overrightarrow{AB}$　$\therefore A_2B_2 // AB$



60

解法 1

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}\\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\vec{b}\\ &= \vec{b} + 2\left(\vec{c} - \vec{b}\right) - \frac{1}{3}\vec{b}\\ &= 2\vec{c} - \frac{4}{3}\vec{b}\\ &= 4\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)\\ &= 4\overrightarrow{QR}\end{aligned}$$

よって，P, Q, R は一直線上にあり，QR：QP＝1：4

解法 **2**：平面図形の問題として解く

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}$$
$$=1$$

よって，メネラウスの定理の逆より，3 点 P, Q, R は一直線上にある。

したがって，△QBP と線分 AC についてメネラウスの定理より，$\frac{QA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PR}{RQ}=1$

よって，

$$\frac{RQ}{PR}=\frac{QA}{AB}\cdot\frac{BC}{CP}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1}$$
$$=\frac{1}{3}$$

ゆえに，QR：QP＝1：4

補足

メネラウスの定理とチェバの定理をまとめて覚える方法

三角形 ABC の辺を AB，BC，CA と表し，

それぞれの辺の内分点・外分点を P，Q，R とすると，

比の取り方は下表となる。

辺	内分点・外分点	比の取り方
AB	**P**	**AP/PB**
BC	**Q**	**BQ/QC**
CA	**R**	**CR/RA**

すると，メネラウスの定理の式とチェバの定理の式は，

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1$$

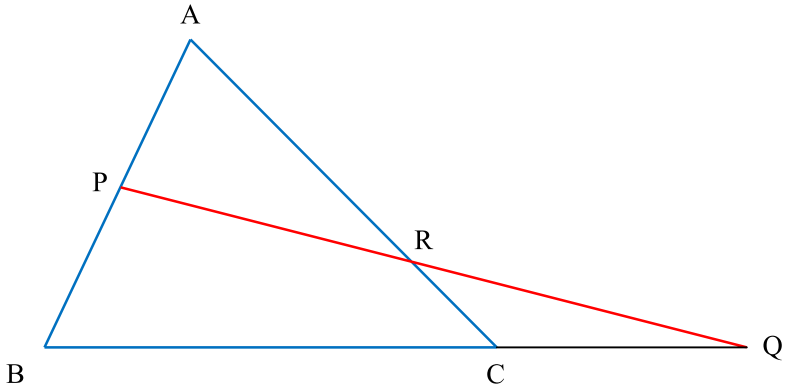
と統一できる。

後は，

外分点の数が偶数のときは，「チェバの定理より～」

外分点の数が奇数のときは，「メネラウスの定理より～」

とすればよい。



61

解法 **1**：ベクトルの問題として解く

(1)

$$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BP}$$
$$=\overrightarrow{BC}-\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$
$$=\vec{c}-\frac{2}{5}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{BP}$$
$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{BD}-\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$
$$=\frac{2}{7}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$$
$$=\frac{2}{7}\vec{c}-\frac{1}{21}\vec{a}$$
$$=\frac{2}{7}\left(\vec{c}-\frac{2}{5}\vec{a}\right)$$

よって，$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$

ゆえに，3 点 P, Q, C は同一直線上にある。

(2)

(1)より，PQ：QC＝2：5

解法 2：平面図形の問題として解く

(1)

直線 PC と対角線 BD の交点を Q'，対角線の交点を E とすると，

△ABE と線分 PC について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BQ'}}{\mathrm{Q'E}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=1$

条件より，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{3}{2}$

平行四辺形の性質より，$\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\therefore\dfrac{\mathrm{Q'E}}{\mathrm{BQ'}}&=\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}\\&=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\\&=\dfrac{3}{4}\end{aligned}$$

これより，$\mathrm{BQ'}$ の長さを $4k$ とすると $\mathrm{Q'E}=3k$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{ED}&=\mathrm{BE}\\&=\mathrm{BQ'}+\mathrm{Q'E}\\&=7k\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\mathrm{BQ'}:\mathrm{Q'D}&=\mathrm{BQ'}:\mathrm{Q'E}+\mathrm{ED}\\&=4k:10k\\&=2:5\end{aligned}$$

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QD}=2:5$ だから，Q と Q' は同一の点である。

これと P, Q', C は同一直線上にあることから，

P,Q,C は同一直線上にある。

(2)

△APC と線分 BE について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1$

$$\begin{aligned}\therefore\dfrac{\mathrm{QC}}{\mathrm{PQ}}&=\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}\\&=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{1}\\&=\dfrac{5}{2}\end{aligned}$$

ゆえに，PQ：QC＝2：5

62

解法 **1**：通常の解法

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=s:1-s\ (0<s<1)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=(1-s)\vec{b}+\dfrac{3}{4}s\vec{c}$

$\mathrm{DP}:\mathrm{PC}=1-t:t\ (0<t<1)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$=\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

よって，$(1-s)\vec{b}+\dfrac{3}{4}s\vec{c}=\dfrac{1}{3}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

これと $\vec{b}$ と $\vec{c}$ は $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルであることから，

$1-s=\dfrac{1}{3}t$ かつ $\dfrac{3}{4}s=1-t$ $\quad\therefore s=\dfrac{8}{9},\ t=\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

解法 **2**：メネラウスの定理を利用

△ABE と線分 DC について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}=1$

$\therefore \dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BP}}=\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\dfrac{\mathrm{EC}}{\mathrm{CA}}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{8}$

ゆえに，$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=8:1$ より，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$=\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{3}{4}\vec{c}$

$=\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{3}\vec{c}$

63

(1)

$\mathrm{DP}:\mathrm{PB}=1-s:s\ (0<s<1)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=\frac{2}{5}s\vec{a}+(1-s)\vec{b}$

$\mathrm{CP}:\mathrm{PM}=1-t:t\ (0<t<1)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

$=t\left\{\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})\right\}+(1-t)\cdot\frac{1}{2}\vec{b}$

$=\frac{2}{3}t\vec{a}+\frac{-t+3}{6}\vec{b}$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルだから，$\frac{2}{5}s=\frac{2}{3}t$ かつ $1-s=\frac{-t+3}{6}$

$\therefore s=\frac{5}{9},\ t=\frac{1}{3}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

(2)

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$=\frac{2}{9}k\vec{a}+\frac{4}{9}k\vec{b}$

Q は線分 AB 上の点だから，$\frac{2}{9}k+\frac{4}{9}k=1\quad\therefore k=\frac{3}{2}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

64

解法 1

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=c$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{c}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\left(\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2-\frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{3}{4}|\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{3}\cdot 3^2-0-\frac{3}{4}\cdot 2^2\\&=0\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CD}\perp\mathrm{OE}$

解法 2

$\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 2)$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+\frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}\\&=3-3\\&=0\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{CD}\perp\mathrm{OE}$

65

外心は各辺の垂直二等分線の交点だから $\mathrm{OM} \perp \mathrm{BC}$

これと $\mathrm{AN} \perp \mathrm{BC}$ より， $\mathrm{OM} // \mathrm{AN}$ $\therefore \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

ここで， $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} \\ &= \vec{a} + 2\overrightarrow{\mathrm{OM}} \\ &= \vec{a} + 2\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

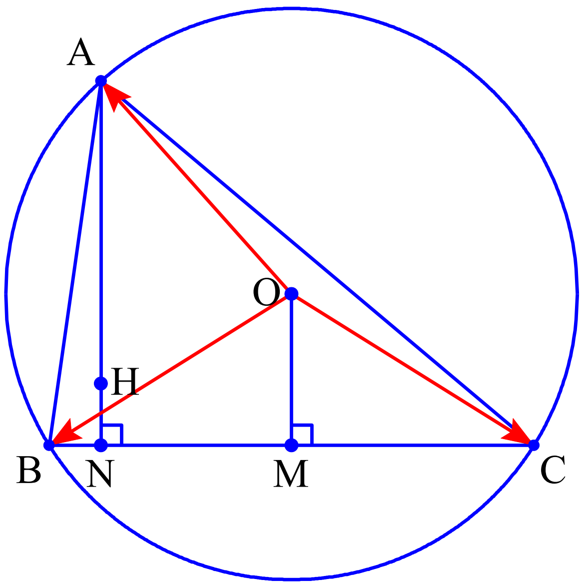
$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \left\{\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right) - \vec{c}\right\}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right) \\ &= \left(\vec{b}+\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right) \\ &= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

ゆえに， $\overrightarrow{\mathrm{CH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

これと $\overrightarrow{\mathrm{AH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，H は△ABC の垂心である。



例題 6

別解：図形と式で解く

xy 直交座標平面上に△OAB の O を原点，A の座標を $\left(2\sqrt{2},\ 0\right)$，B を第 1 象限にとる。

B の座標について

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}=\frac{2}{2\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

また，これより，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

よって，B の座標は $\left(\sqrt{3}\cos\angle\mathrm{AOB},\ \sqrt{3}\sin\angle\mathrm{AOB}\right)=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$

直線 OH の方程式

直線 OH は原点を通り直線 AB に垂直な直線である。

直線 AB の傾きは $\dfrac{0-\dfrac{\sqrt{10}}{2}}{2\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より，直線 OH の傾きは $\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

よって，直線 OH の方程式は $y=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}x$

H の座標について

直線 OH と直線 BH の交点，すなわち $y=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}x$ と $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の交点が H の座標であるから，

H の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ について

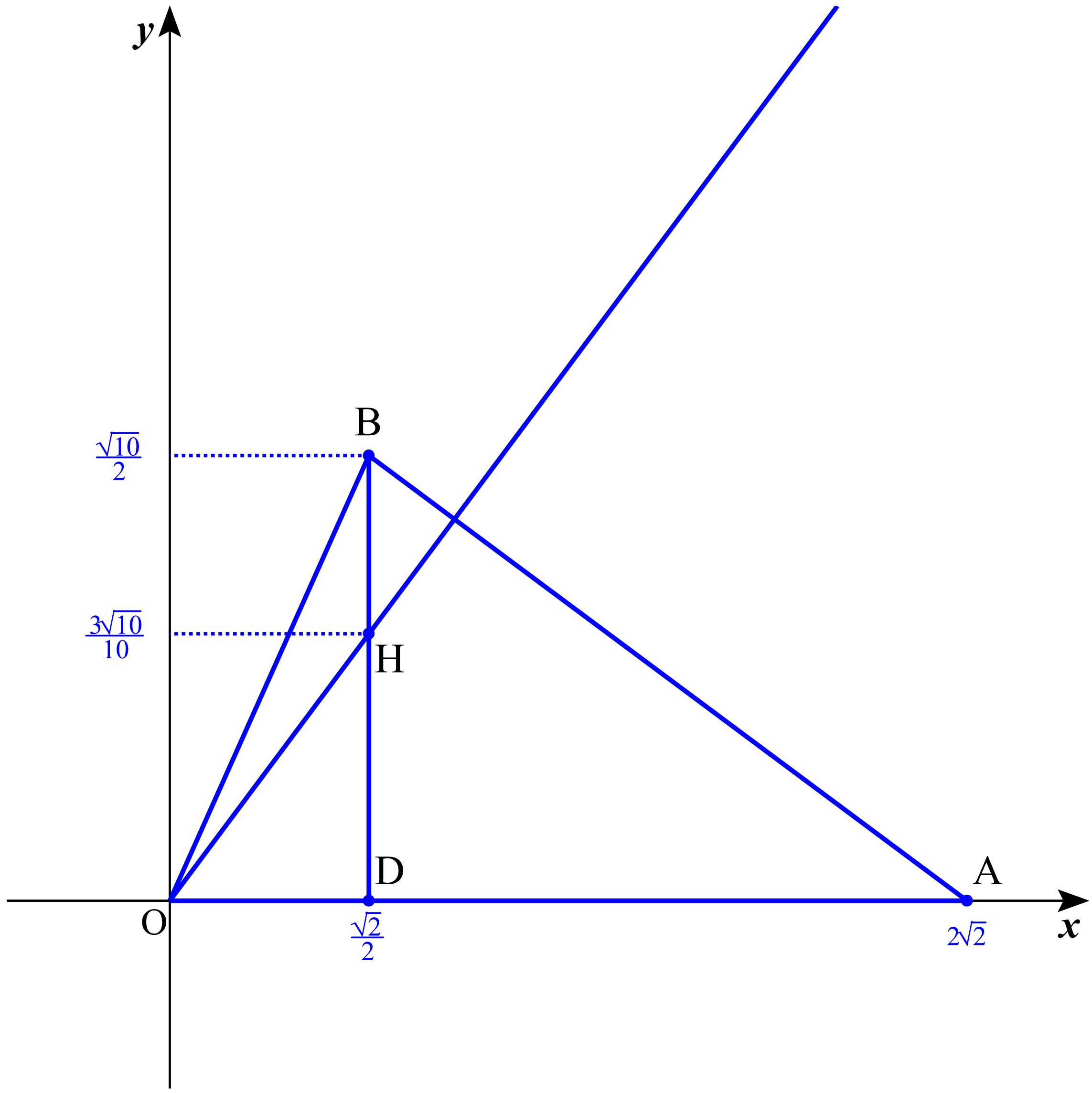
直線 BH と x 軸との交点を D とすると，H は BD を 2 : 3 に内分する点である。

また，$\mathrm{D}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{A}\left(2\sqrt{2},\ 0\right)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{10}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{b}$

コメント

例題の場合は解答の解き方の方が楽であるが，別解の方が楽な場合もあるので，
座標平面上に図形を描くことで，臨機応変に対処できるようにするのがよい。


y
B
√10/2
3√10/10
H
D
A
O
√2/2
2√2
x

66

解法 **1**：ベクトルの連立方程式を利用して解く

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とすると，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルだから，

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は定数 $s,\ t$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とただ 1 通りに表せる。

$\mathrm{AH}\perp\mathrm{OB}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left\{\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)-\vec{a}\right\}\cdot\vec{b}\\&=\left\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}\\&=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2\\&=(s-1)\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}+16t\\&=(s-1)\cdot6\cdot4\cdot\frac{1}{2}+16t\\&=4(3s+4t-3)\end{aligned}$$

よ

より，$3s+4t-3=0\quad\therefore 3s+4t=3\quad$・・・①

$\mathrm{BH}\perp\mathrm{OA}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left\{\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)-b\right\}\cdot\vec{a}\\&=\left\{s\vec{a}+(t-1)\vec{b}\right\}\cdot\vec{a}\\&=s\left|\vec{a}\right|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}\quad\text{よ}\\&=36s+12(t-1)\\&=12(3s+t-1)\end{aligned}$$

より，$3s+t-1=0\quad\therefore 3s+t=1\quad$・・・②

①，②の連立方程式を解くことにより，$s=\dfrac{1}{9},\ t=\dfrac{2}{3}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$

解法 2：図形と式で解く

xy 直交座標平面上に△OAB の O を原点，A の座標を $(6,\ 0)$ とする。

また，B を第 1 象限にとると，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\mathrm{OB}=4$ より，

B の座標は $(4\cos 60^\circ,\ 4\sin 60^\circ)=\left(2,\ 2\sqrt{3}\right)$

これらより，

直線 BH の式は $x=2$　・・・①

直線 AH は $\mathrm{A}(6,\ 0)$ を通り，直線 OB（傾き $\sqrt{3}$）と直交するから，

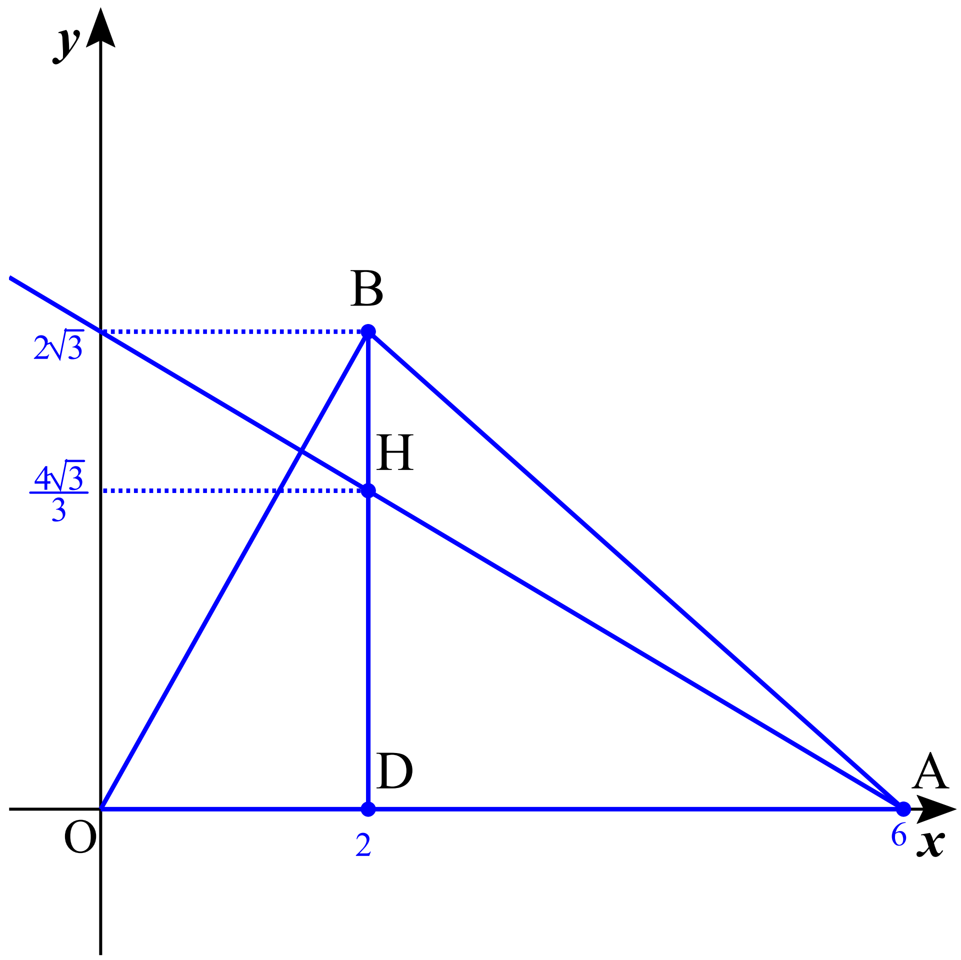
その式は $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-6)$　・・・②

H は直線 AH と直線 BH の交点だから，①かつ②より，その座標は $\left(2,\ \dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)$

よって，直線 BH と x 軸との交点を D とすると，H は BD を 1：2 に内分する点である。

また，$\mathrm{D}(2,\ 0)$，$\mathrm{A}(6,\ 0)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{9}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$


y
B
$2\sqrt{3}$
H
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$
D
A
O
2
6
x

67

解法 **1**：ベクトルの連立方程式を利用して解く

$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルだから，

$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ は定数 s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ とただ 1 通りに表せる。

外心は各辺の垂直二等分線の交点だから，AB の中点を D，AC の中点を E とすると，

OD⊥AB，OE⊥AC より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\cdot\vec{b}\\&=\left(-s\vec{b}-t\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\vec{b}\\&=\left(-s+\frac{1}{2}\right)\left|\vec{b}\right|^2-t\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=9\left(-s+\frac{1}{2}\right)-t\cdot3\cdot2\cos60^\circ\\&=-9s-3t+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\vec{c}\\&=\left(-s\vec{b}-t\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\vec{c}\\&=-s\vec{b}\cdot\vec{c}+\left(-t+\frac{1}{2}\right)\left|\vec{c}\right|^2\\&=-3s+4\left(-t+\frac{1}{2}\right)\\&=-3s-4t+2\end{aligned}$$

より，

$9s+3t=\dfrac{9}{2}$ かつ $3s+4t=2$　$\therefore s=\dfrac{4}{9},\ t=\dfrac{1}{6}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

解法 2：図形と式で解く

xy 直交座標平面上に△ABC の A を原点，B の座標を $(3,\ 0)$ とする。

また，C を第 1 象限にとると，$\angle A = 60°$，$AC = 2$ より，

C の座標は $(2\cos 60°,\ 2\sin 60°) = (1,\ \sqrt{3})$

外心は各辺の垂直二等分線の交点だから，AB の中点を通り x 軸に垂直な直線と

AC の中点を通り AC に垂直な直線の交点が O である。

AB の中点を通り x 軸に垂直な直線の式

AB の中点の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$ だから，$x = \dfrac{3}{2}$　・・・①

AC の中点を通り AC に垂直な直線の式

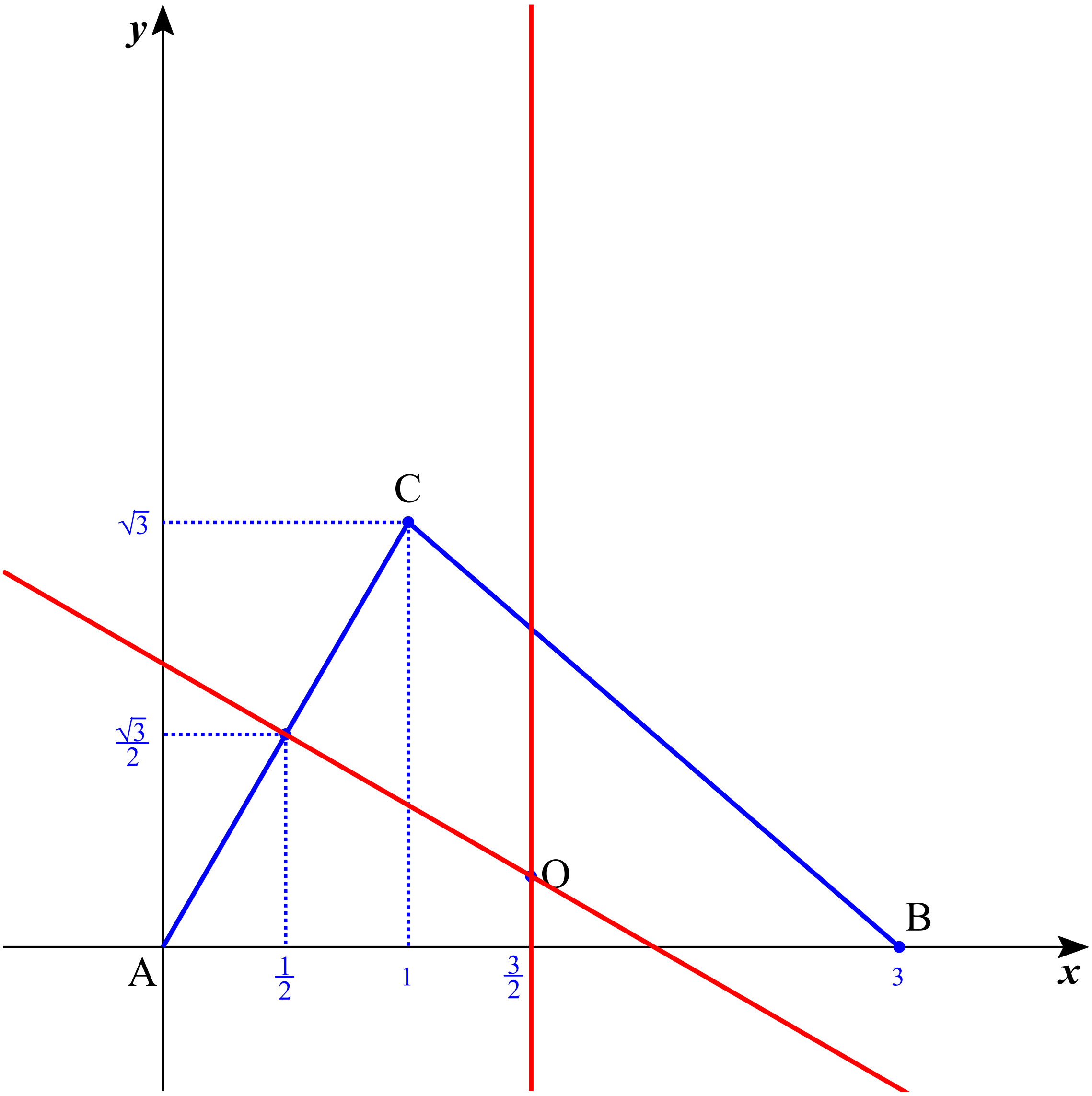
AC の中点座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，AC の傾き $= \sqrt{3}$ より，$y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　・・・②

①，②より，外心 O の座標は $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$\overrightarrow{AO} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とすると，$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ より，$3s + t = \dfrac{3}{2}$ かつ $\dfrac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3}t$

よって，$s = \dfrac{4}{9},\ t = \dfrac{1}{6}$

ゆえに，$\overrightarrow{AO} = \dfrac{4}{9}\vec{b} + \dfrac{1}{6}\vec{c}$



y
C
$\sqrt{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$
O
B
A
$\frac{1}{2}$
1
$\frac{3}{2}$
3
x

68

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

よって，

$$\mathrm{AD}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2=\frac{4}{9}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{4}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{9}\left|\vec{c}\right|^2$$

$$\mathrm{BD}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|^2=\frac{1}{9}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{2}{9}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{9}\left|\vec{c}\right|^2$$

これより，

$$\begin{aligned}3\left(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2\right)&=3\mathrm{AD}^2+6\mathrm{BD}^2\\&=\frac{4}{3}\left|\vec{b}\right|^2+\frac{4}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{3}\left|\vec{c}^{\,2}\right|+\frac{2}{3}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{4}{3}\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{2}{3}\left|\vec{c}\right|^2\\&=2\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\\&=2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\end{aligned}$$

ゆえに，$2\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=3\left(\mathrm{AD}^2+2\mathrm{BD}^2\right)$

69

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{AL}}=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BM}}&=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=-\vec{b}+(1-t)\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{CN}}&=\overrightarrow{\mathrm{CA}}+u\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=u\vec{b}-\vec{c}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AL}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}}+\overrightarrow{\mathrm{CN}}&=(1-s)\vec{b}+s\vec{c}-\vec{b}+(1-t)\vec{c}+u\vec{b}-\vec{c}\\&=(-s+u)\vec{b}+(s-t)\vec{c}\end{aligned}$$

よって，$(-s+u)\vec{b}+(s-t)\vec{c}=\vec{0}$

これと $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が $\vec{0}$ でない互いに独立なベクトルであることから，$-s+u=0$ かつ $s-t=0$

ゆえに，$s=t=u$