平面上のベクトル 7　ベクトル方程式

ことわり

座標とベクトルを区別する目的で，座標は$(x,\ y)$，ベクトルは$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$と表示している。

75

(1)

$\mathrm{AG}:\mathrm{GM}=2:1$ より，$\mathrm{AM}:\mathrm{AG}=3:2$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{GA}}$$
$$=-\frac{3}{2}\vec{a}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{GG}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{GG}}=\vec{0}$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$

$\therefore \overrightarrow{\mathrm{GC}}=-\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GB}}=-\vec{a}-\vec{b}$

(2)

実数tを用いることにより，$\vec{p}$ は次のように表される。

$$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{GP}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{GM}}+\overrightarrow{\mathrm{MP}}$$
$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{GA}}-\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+t\left\{\vec{a}-\left(-\vec{a}-\vec{b}\right)\right\}$$
$$=-\frac{1}{2}\vec{a}+t\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$$
$$=\left(2t-\frac{1}{2}\right)\vec{a}+t\vec{b}$$

76

(1)

直線l : $(x,\ y)=(s,\ 2s+3)$，直線m : $(x,\ y)=(-2t+6,\ 3t+1)$

より，交点は$s=-2t+6$かつ$2s+3=3t+1$を満たす点である。

よって，$s=t=2$

ゆえに，その座標は$(2,\ 7)$

(2)

Qは直線l上の点だから，その座標を$(s,\ 2s+3)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} s \\ 2s+3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s-4 \\ 2s+2 \end{pmatrix}$

直線lの方向ベクトルを$\vec{d}$とすると，$\vec{d}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{d}=0$

これと

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{d}&=\begin{pmatrix} s-4 \\ 2s+2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\\ &=s-4+4s+4\\ &=5s\end{aligned}$$

より，$s=0$

よって，Qの座標は$(s,\ 2s+3)=(0,\ 3)$

77

解法のポイント

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &=\frac{s}{4}\left(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{4}\left(4\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$

$\frac{s}{4}+\frac{t}{4}=1$，$\frac{s}{4}\geq 0$，$\frac{t}{4}\geq 0$

よって，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$とすると，点Pの存在範囲は線分A'B'

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\ &=\frac{s}{4}\left(4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{4}\left(4\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$

$\frac{s}{4}+\frac{t}{4}\leq 1$，$\frac{s}{4}\geq 0$，$\frac{t}{4}\geq 0$

よって，$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$4\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$とすると，

点Pの存在範囲はΔOA'B'の周とその内部

例題 8
別解
斜交座標を使って解く

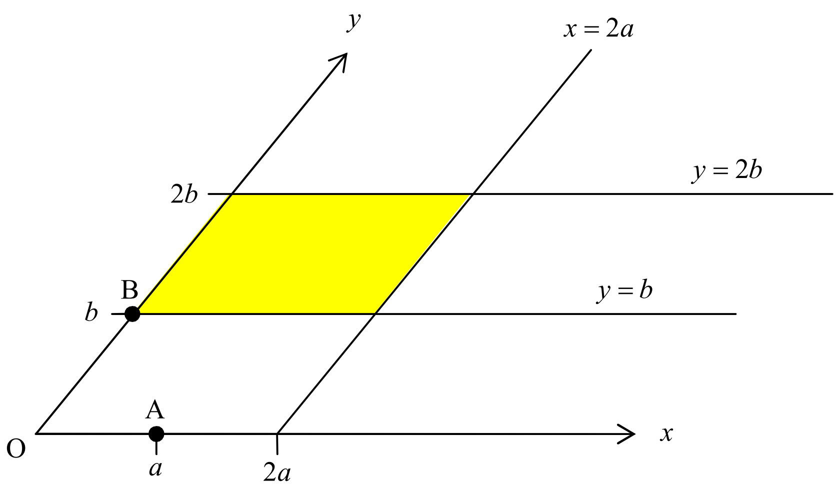
$\overrightarrow{OA}$ の向きを x 軸，$\overrightarrow{OB}$ の向きを y 軸とする xy 斜交座標平面上の原点を O，$(a,\ 0)$ を A，$(0, b)$ を B，ただし，$a>0,\ b>0$ とする。また，点 P を (x, y) とする。

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ より，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} as \\ bt \end{pmatrix}$　$\therefore s=\dfrac{x}{a},\ t=\dfrac{y}{b}$

(1)

$0\leq s\leq 2,\ 1\leq t\leq 2$ より，$0\leq \dfrac{x}{a}\leq 2,\ 1\leq \dfrac{y}{b}\leq 2$　$\therefore 0\leq x\leq 2a,\ b\leq y\leq 2b$

よって，下図黄色部分（境界線を含む）
また，$a<0,\ b>0$ のとき，$a>0,\ b<0$ のとき，$a<0,\ b<0$ のときは
下図をそれぞれ y 軸，x 軸，原点に関して対称移動した図になるが，
$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OP}$ の関係は下図と同じである。



(2)

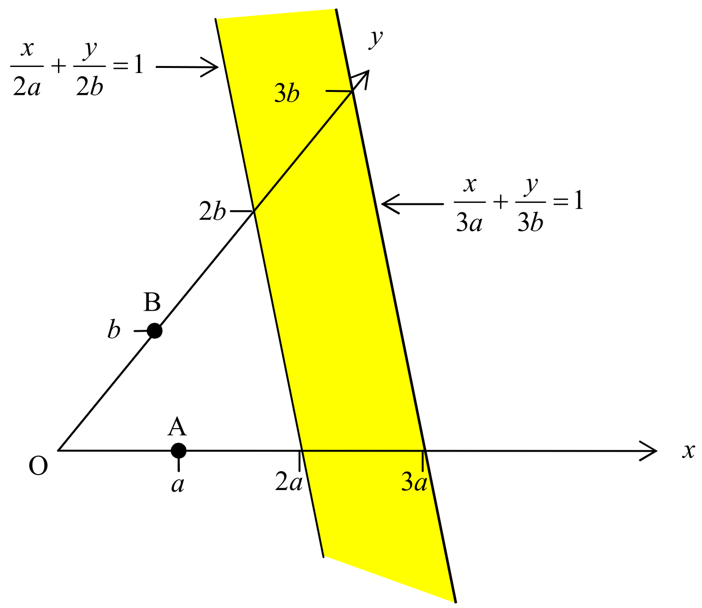
$2 \leq s+t \leq 3$ より，$2 \leq \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \leq 3$　$\therefore \dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b} \geq 1$ かつ $\dfrac{x}{3a}+\dfrac{y}{3b} \leq 1$

よって，下図黄色部分（境界線を含む）

また，$a<0,\ b>0$ のとき，$a>0,\ b<0$ のとき，$a<0,\ b<0$ のときは

下図をそれぞれ y 軸，x 軸，原点に関して対称移動した図になるが，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の関係は下図と同じである。



補足

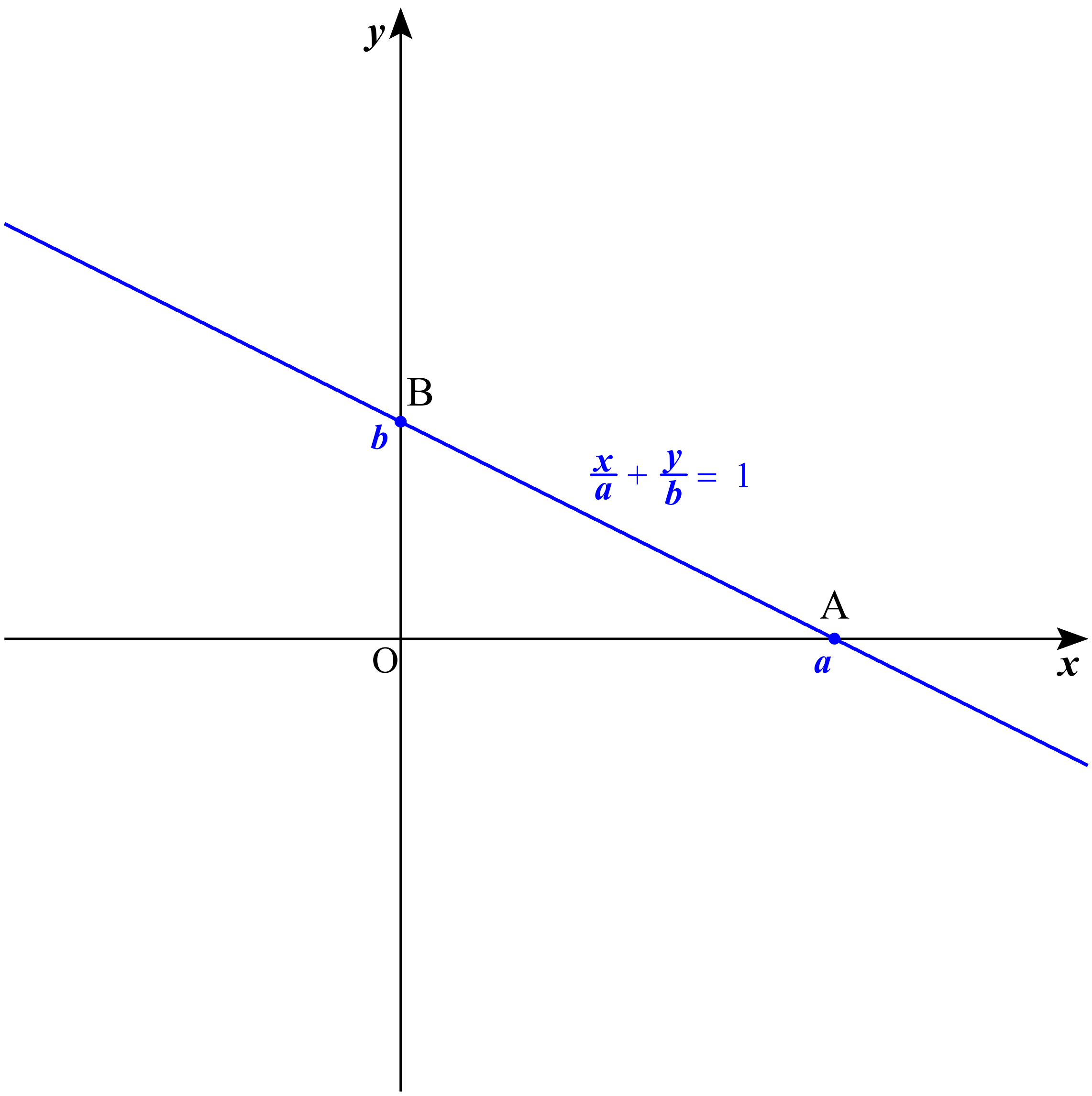
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対する P の範囲についての問題だから，$a,\ b$ は任意である。

したがって，図示のみならば点 A を $(1,\ 0)$，点 B を $(0,\ 1)$ とすると楽である。

補足：切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a，y 切片を b とする直線の方程式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ （a,b は 0 でない実数）

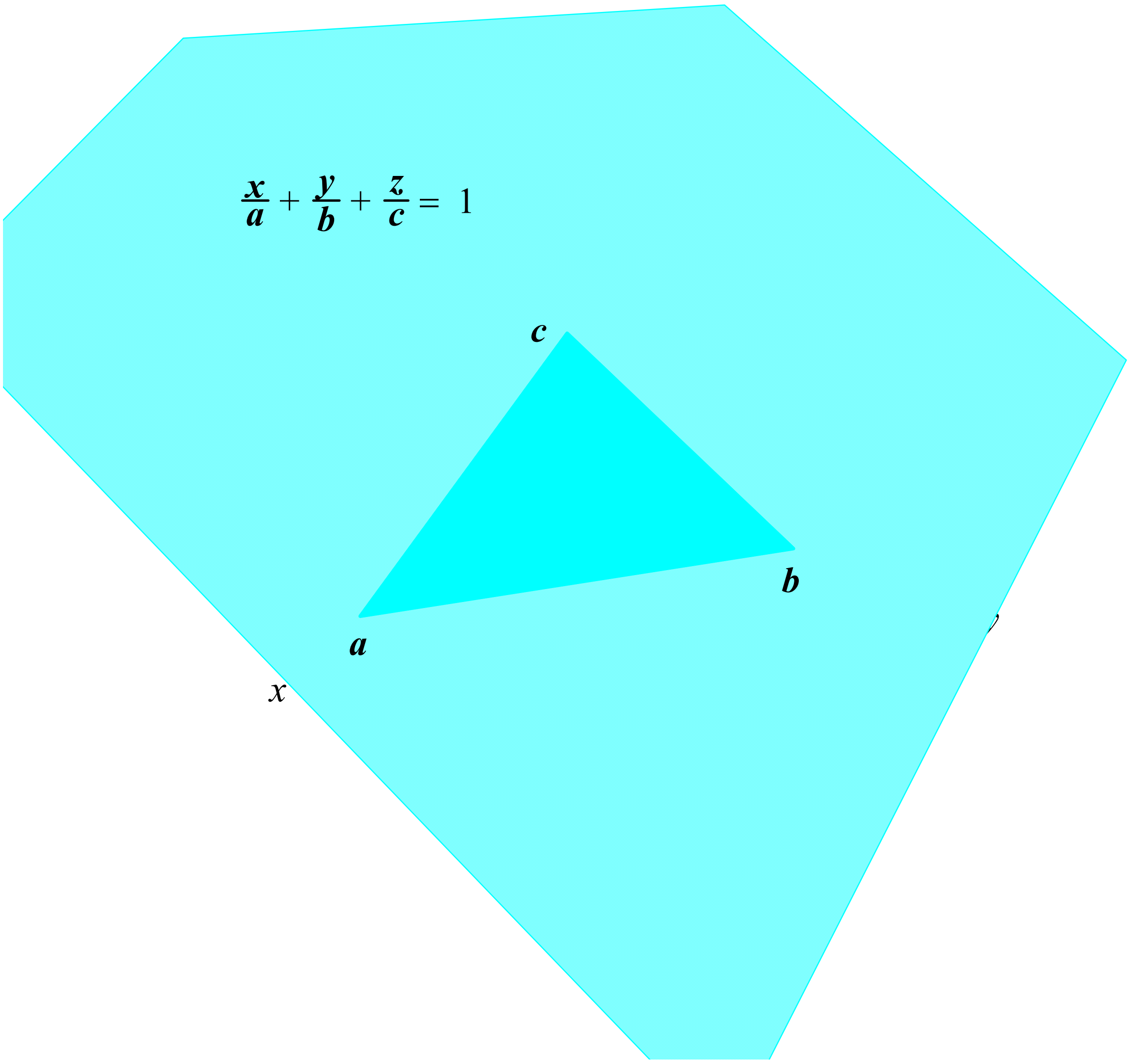


証明

A$(a,0)$，B$(0.b)$を通る直線の方程式は，$y=-\frac{b}{a}x+b$ $\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

x 切片を a，y 切片を b，z 切片を c とする平面の方程式

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（$a,b,c$ は 0 でない実数）



証明

$\mathrm{A}(a,0,0)$，$\mathrm{B}(0.b,0)$，$\mathrm{C}(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より，$p=\frac{s}{a},q=\frac{s}{b},r=\frac{s}{c}$　$\therefore \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

78

(1)

P の座標を $(x,\ y)$ とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+t \\ 2t \end{pmatrix}$

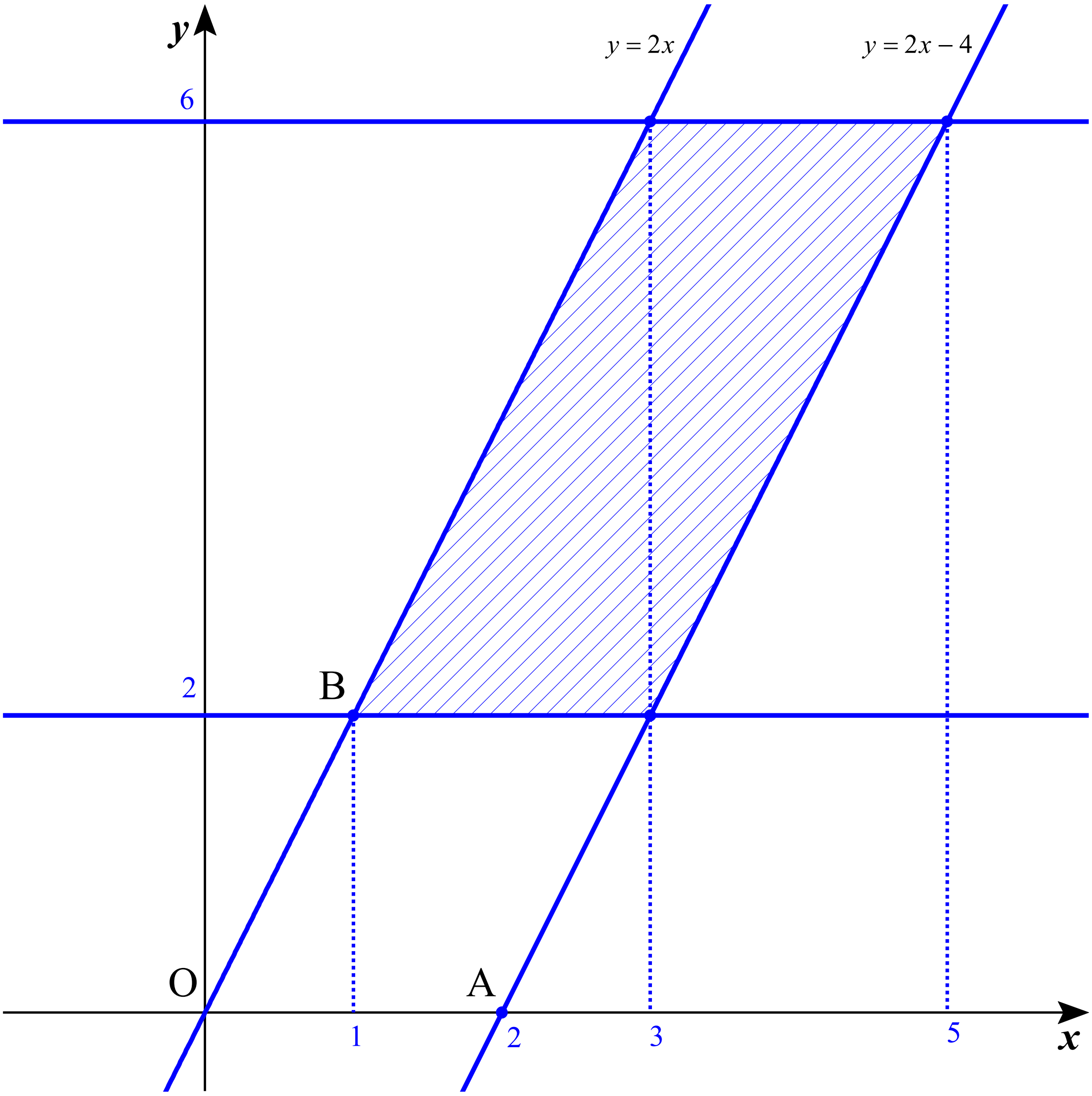
よって，$2s + t = x$　・・・①　$2t = y$　・・・②

①×2－②より，$4s = 2x - y$

これと $0 \le s \le 1$ より，$0 \le 2x - y \le 4$　$\therefore 2x - 4 \le y \le 2x$ ・・・③

②および $1 \le t \le 3$ より，$2 \le y \le 6$　・・・④

よって，点 P の存在範囲は③かつ④を満たす領域（下図斜線部　ただし，境界を含む）



(2)

P の座標を$(x,\ y)$とすると，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+t \\ 2t \end{pmatrix}$

よって，$2s+t=x$　・・・①　$2t=y$　・・・②

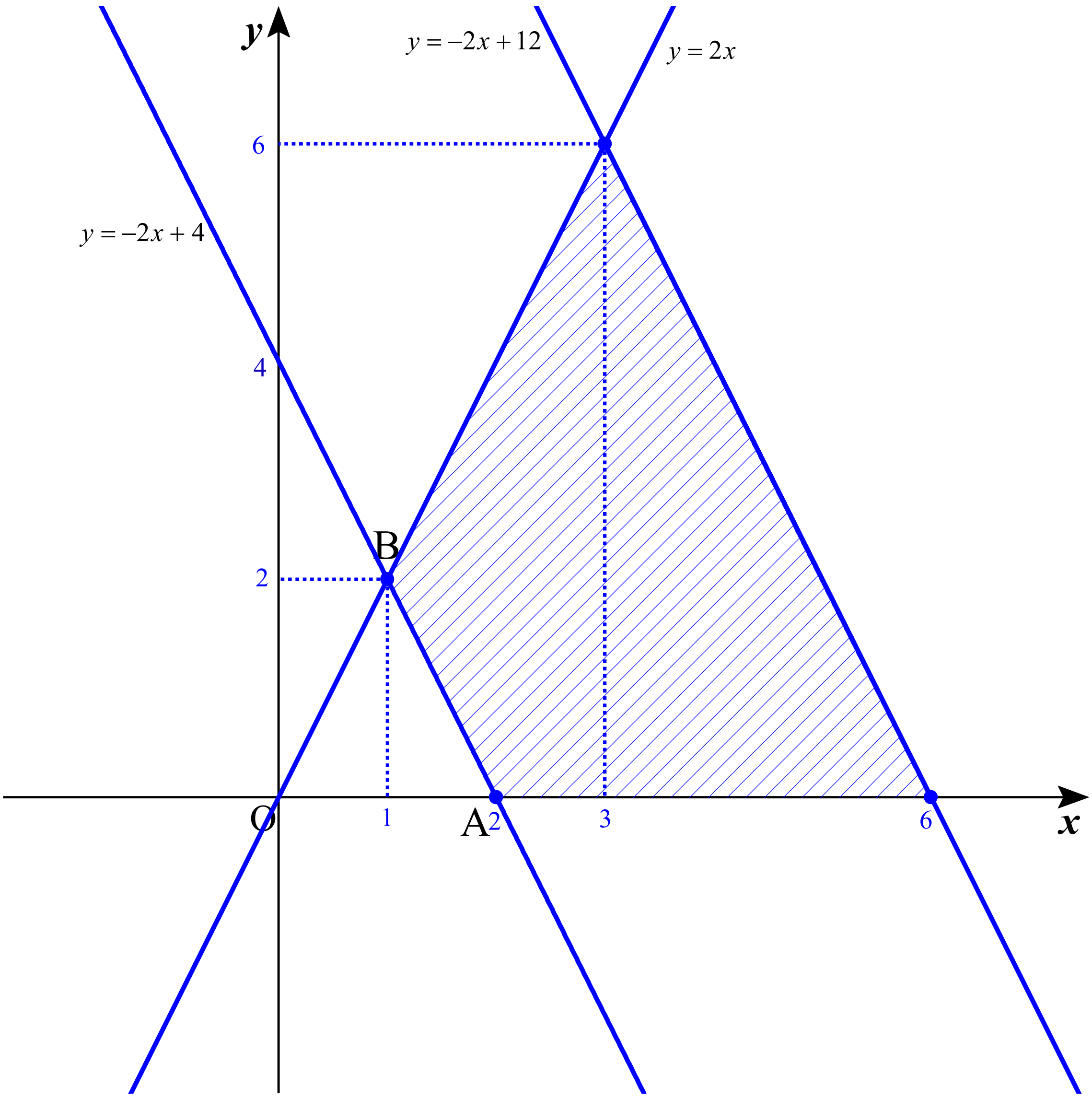
①×2－②より，$4s=2x-y$　$\therefore s=\dfrac{2x-y}{4}$　・・・③

②より，$t=\dfrac{y}{2}$　・・・④

③，④を$1 \leq s+t \leq 3$，$s \geq 0$，$t \geq 0$に代入し，整理すると，

$4 \leq 2x+y \leq 12,\ 2x-y \geq 0,\ y \geq 0$　$\therefore -2x+4 \leq y \leq -2x+12$ かつ $0 \leq y \leq 2x$

よって，点 P の存在範囲は下図斜線部（境界を含む）



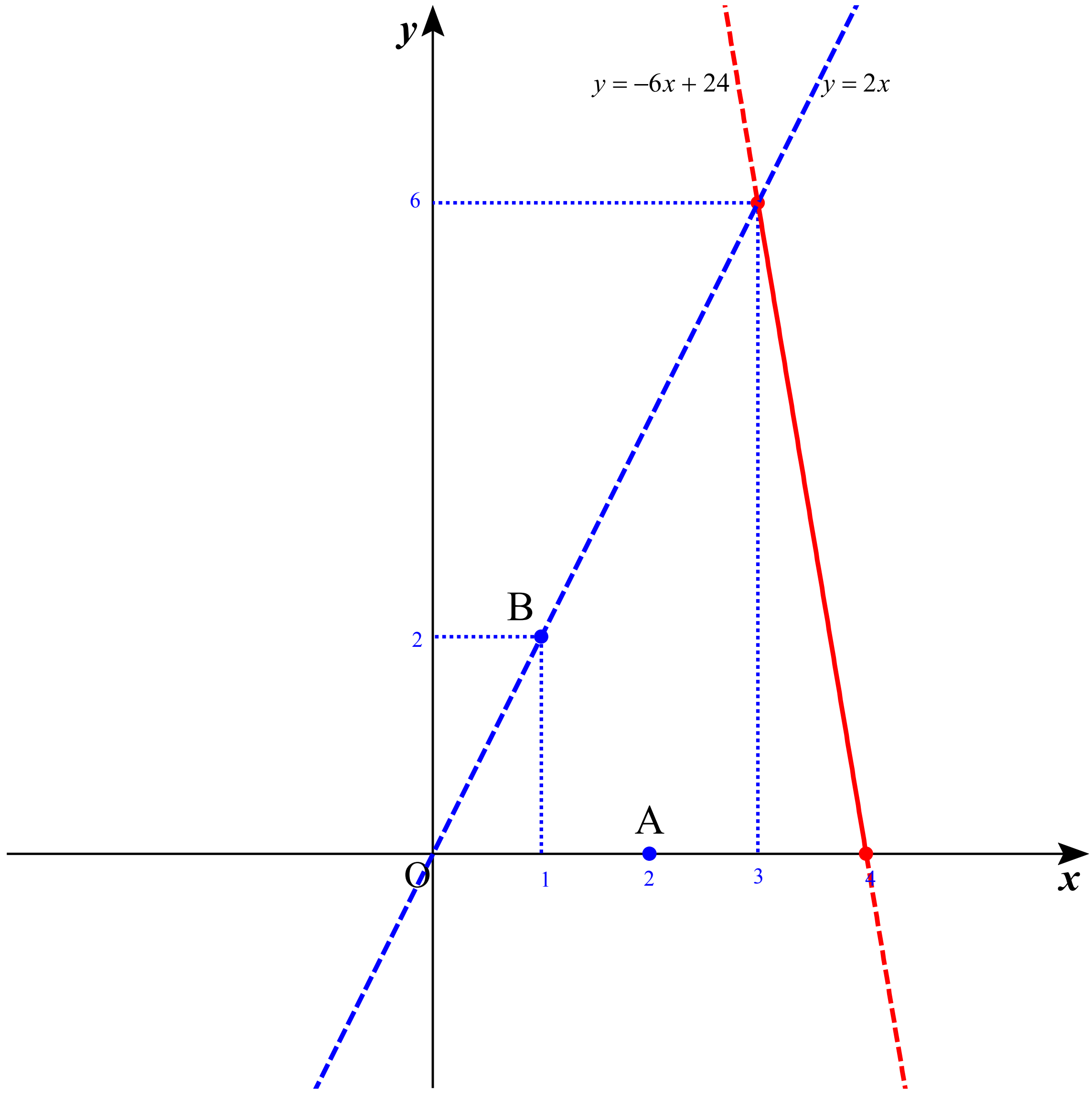
(3)

(2)より， $s=\dfrac{2x-y}{4}$， $t=\dfrac{y}{2}$

これらを $3s+2t=6$， $s\geq 0$， $t\geq 0$ に代入し，整理すると， $y=-6x+24,\ 0\leq y\leq 2x$

よって， $y=-6x+24\ (3\leq x\leq 4)$

ゆえに，点 P の存在範囲は下図赤色実線部



79

解法のポイント

法線ベクトルのなす鋭角も α であることを利用する。

ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は直線 $ax+by+c=0$ の法線ベクトルである。

解説

直線 l 上の定点を $(p,\ q)$，動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。

$(x,\ y)\neq(p,\ q)$ とすると，直線 l の方向ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$ と表せるから，

$\vec{n}\perp\vec{d}$ より，$\vec{n}\cdot\vec{d}=0$

これと $\vec{n}\cdot\vec{d}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-p \\ y-q \end{pmatrix}=a(x-p)+b(y-q)=ax+by-(ap+bq)$ から，

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ のとき，直線 l の方程式は $ax+by-(ap+bq)=0$ であり，

これは $(x,\ y)=(p,\ q)$ のときも成り立つ。

よって，

直線 l 上の定点を $(p,\ q)$，動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とすると，

直線 l の方程式は $ax+by-(ap+bq)=0$ である。

とくに，$-(ap+bq)=c$ とおけば，その方程式は $ax+by+c=0$ となる。

(1)

解法 1：内積を利用する。

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$ は $\sqrt{3}x+3y-1=0$ の法線ベクトル，$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ は $-x+\sqrt{3}y-2=0$ の法線ベクトルだから，

それらのなす角を θ （$0\leq\theta\leq\pi$）とすると，

$$\cos\theta=\frac{\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+3^2}\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\quad\leftarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|},\ \vec{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{-\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$$

ゆえに，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$

解法 2：法線ベクトルの傾きを利用する。

$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix}$の傾きを$\theta_1$，$\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$の傾きを$\theta_2$とすると，$\tan\theta_1 = \sqrt{3},\ \tan\theta_2 = -\sqrt{3}$

$\theta_1 - \theta_2$は法線ベクトルのなす角だから，

$$\begin{aligned}\tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \cdot \tan\theta_2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \left(-\sqrt{3}\right)}{1 + \sqrt{3} \cdot \left(-\sqrt{3}\right)} \\ &= -\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta_1 - \theta_2 = \frac{2}{3}\pi$$

ゆえに，$\alpha = \pi - (\theta_1 - \theta_2) = \dfrac{\pi}{3}$

(2)　解法 2 は省略

(1)の解法 1 と同様にして，

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$

ゆえに，$\alpha = \pi - \dfrac{3}{4}\pi = \dfrac{\pi}{4}$

80

解法 1

ポイント

直線 l 上の定点を $(p,\ q)$，動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とする。

$(x,\ y)\neq(p,\ q)$ とすると，直線 l の方向ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$ と表せるから，

$\vec{n}\perp\vec{d}$ より，$\vec{n}\cdot\vec{d}=0$

これと $\vec{n}\cdot\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-p\\y-q\end{pmatrix}=a(x-p)+b(y-q)=ax+by-(ap+bq)$ から，

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ のとき，直線 l の方程式は $ax+by-(ap+bq)=0$ であり，

これは $(x,\ y)=(p,\ q)$ のときも成り立つ。

よって，

直線 l 上の定点を $(p,\ q)$，動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とすると，

直線 l の方程式は $ax+by-(ap+bq)=0$ である。

とくに，$-(ap+bq)=c$ とおけば，その方程式は $ax+by+c=0$ となる。

解

$\begin{pmatrix}-1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ は求める直線の法線ベクトルであるから，直線の方程式を $-x+\sqrt{3}y+c=0$ とすると，

直線と原点の距離が 4 であることから，$\dfrac{|c|}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}}=4$ より，$|c|=8$　$\therefore c=\pm8$

ゆえに，$x-\sqrt{3}y+8=0$，$x-\sqrt{3}y-8=0$

解法 2

直線 l 上の定点を $(p,\ q)$，動点を $\mathrm{P}(x,\ y)$，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ とする。

$(x,\ y)\neq(p,\ q)$ とすると，直線 l の方向ベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$ と表せるから，

$\vec{n}\perp\vec{d}$ より，$\vec{n}\cdot\vec{d}=0$

これと $\vec{n}\cdot\vec{d}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-p\\y-q\end{pmatrix}=a(x-p)+b(y-q)$ から，

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ のとき，直線 l の方程式は $a(x-p)+b(y-q)=0$ であり，

これは $(x,\ y)=(p,\ q)$ のときも成り立つ。

よって，直線 l の方程式は $a(x-p)+b(y-q)=0$

解

法線ベクトルの単位ベクトルは$\dfrac{1}{\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$

原点Oから直線に下ろした垂線の足をDとすると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|=4$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\pm4\cdot\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\sqrt{3}\end{pmatrix}$より，$\mathrm{D}\pm\left(-2,\ 2\sqrt{3}\right)$

ゆえに，求める直線の方程式は$-\{x\pm(-2)\}+\sqrt{3}\left(y\pm2\sqrt{3}\right)=0$，

すなわち$x-\sqrt{3}y+8=0$，$x-\sqrt{3}y-8=0$

81

(1)

$\mathrm{AP}\perp\mathrm{BC}$より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ $\therefore\left(\vec{p}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$

(2)

辺BCの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ （tは実数）

よって，$\vec{p}-\vec{a}=t\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\vec{a}\right)$ $\therefore\vec{p}=(1-t)\vec{a}+\dfrac{t}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(3)

辺BCの中点をMとすると，$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\mathrm{BC}\perp\mathrm{MP}$より$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって，$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\vec{p}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)=0$ $\therefore 2\vec{p}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

82

点A, B, C, Pの位置を表すベクトルをそれぞれ$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\left(\vec{a}-\vec{p}\right)+\left(\vec{b}-\vec{p}\right)+\left(\vec{c}-\vec{p}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-3\vec{p}=3\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{p}\right)$

よって，$\left|3\left(\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{p}\right)\right|=3$より，$\left|\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\vec{p}\right|=1$

$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$は△ABCの重心の位置を表すベクトルだから，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|=3$は△ABCの重心を中心とする半径1の円を表す。

83

(1)

解法 1

$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|=\left|\vec{p}-\left(-2\vec{a}\right)\right|$ より，

$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|$ は位置ベクトル $-2\vec{a}$ で表される定点と点 P の距離を表す。

$\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|$ は位置ベクトル $2\vec{a}$ で表させる定点と点 P の距離を表す。

$-2\vec{a}$ で表される定点を A'，$2\vec{a}$ で表される定点を A'' とすると，

$\mathrm{A'P}=\mathrm{A''P}$ より，P が描く図形は線分 A'A'' の垂直二等分線であり，

A' と A'' は O に関して対称だから，その直線は O を通る。

解法 2

$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|$ ならば $\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|^2=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|^2$ $\quad\therefore \vec{p}\cdot\vec{a}=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ だから，

$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき $\vec{p}\perp\vec{a}$ より，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{OA}$

$\vec{p}=\vec{0}$ のとき P は O と一致する。

よって，P が描く図形は O を通り OA に垂直な直線である。

逆に，O を通り OA に垂直な直線上の任意の点を P とすると，

$\left|\vec{p}+2\vec{a}\right|=\left|\vec{p}-2\vec{a}\right|$ が成り立つ。

ゆえに，P が描く図形は O を通り OA に垂直な直線である。

(2)

$\vec{p}=\vec{0}$ のとき

等式が成り立つ。

$\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角を θ とすると，$2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|\cos\theta=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{p}\right|$，$\vec{a}\neq\vec{0}$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

よって，OP と OA のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$

以上より，

点 P が描く図形は O を端点とし，線分 OA とのなす角が $\dfrac{\pi}{3}$ の 2 本の半直線である。

84

(1) 二等分線のベクトル方程式は重要

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の単位ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}$$

$\triangle \mathrm{A'OB'}$ は $\mathrm{OA'}=\mathrm{OB'}$ の二等辺三角形だから，

三角形の内角の二等分線の定理より，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線は辺 $\mathrm{A'B'}$ の中点を通る。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2t\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}\right)=t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right)$ （t は実数）

(2)

$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|}\right)$ （t は実数）より，

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=t\left\{\frac{1}{\sqrt{12^2+5^2}}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right\}\\&=t\left\{\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{t}{65}\left\{\begin{pmatrix}60\\25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-39\\52\end{pmatrix}\right\}\\&=\frac{t}{65}\begin{pmatrix}21\\77\end{pmatrix}\\&=\frac{7t}{65}\begin{pmatrix}3\\11\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$t=0$ のとき

$\mathrm{P}(0,\ 0)$

$t\neq 0$ のとき

$\frac{x}{y}=\frac{3}{11}\qquad\therefore 11x-3y=0$

これは $(0,\ 0)$ を満たす。

ゆえに，$11x-3y=0$