平面上のベクトル　演習問題

1

(1)

$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$，$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

(2)

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，$|\vec{a}|=t|\vec{b}|$ より，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{t|\vec{b}|^2}\quad\cdots①$$

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=t^2|\vec{b}|^2+2+|\vec{b}|^2\\&=|\vec{b}|^2(t^2+1)+2\end{aligned}$$

これと $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$ より，$|\vec{b}|^2(t^2+1)+2=7$　$\therefore|\vec{b}|^2=\dfrac{5}{t^2+1}$　$\cdots②$

①，②より，$\cos\theta=\dfrac{t^2+1}{5t}$

(3)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$ より，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2$

これと $|\vec{a}+\vec{b}|\neq0,,|\vec{a}-\vec{b}|\neq0,|\vec{a}|=t|\vec{b}|$ より，$t^2|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2$　$\therefore t^2=1$

ゆえに，$t=1\ (\because t>0)$

したがって，$\cos\theta=\dfrac{t^2+1}{5t}=\dfrac{2}{5}$

2

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\ &= -\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC} &= \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 \\ &= -\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 2^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

(3)

$\overrightarrow{EP} = t\overrightarrow{BC}\ (0 \le t \le 1)$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EP} &= \overrightarrow{EF}\cdot\left(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EP}\right) \\ &= \overrightarrow{EF}\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{BC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AB} + 0 \\ &= -\frac{2}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{2}{9}\cdot 3^2 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cos 60^\circ \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

3

(1)

解法 1

△ABE と線分 DC について，メネラウスの定理より，$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BP}{PE}\cdot\dfrac{EC}{CA}=1$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{PE}{BP}&=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{EC}{CA}\\&=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore BP:PE=2:1$

これより，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

解法 2

$BP:PE=s:1-s$，　$DP:PC=1-t:t$ とすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=(1-s)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AE}\\&=(1-s)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}s\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=t\overrightarrow{AD}+(1-t)\overrightarrow{AC}\\&=\frac{2}{3}t\overrightarrow{AB}+(1-t)\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

より，$1-s=\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{3}{4}s=1-t$　　$\therefore s=\dfrac{2}{3},\ t=\dfrac{1}{2}$

よって，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

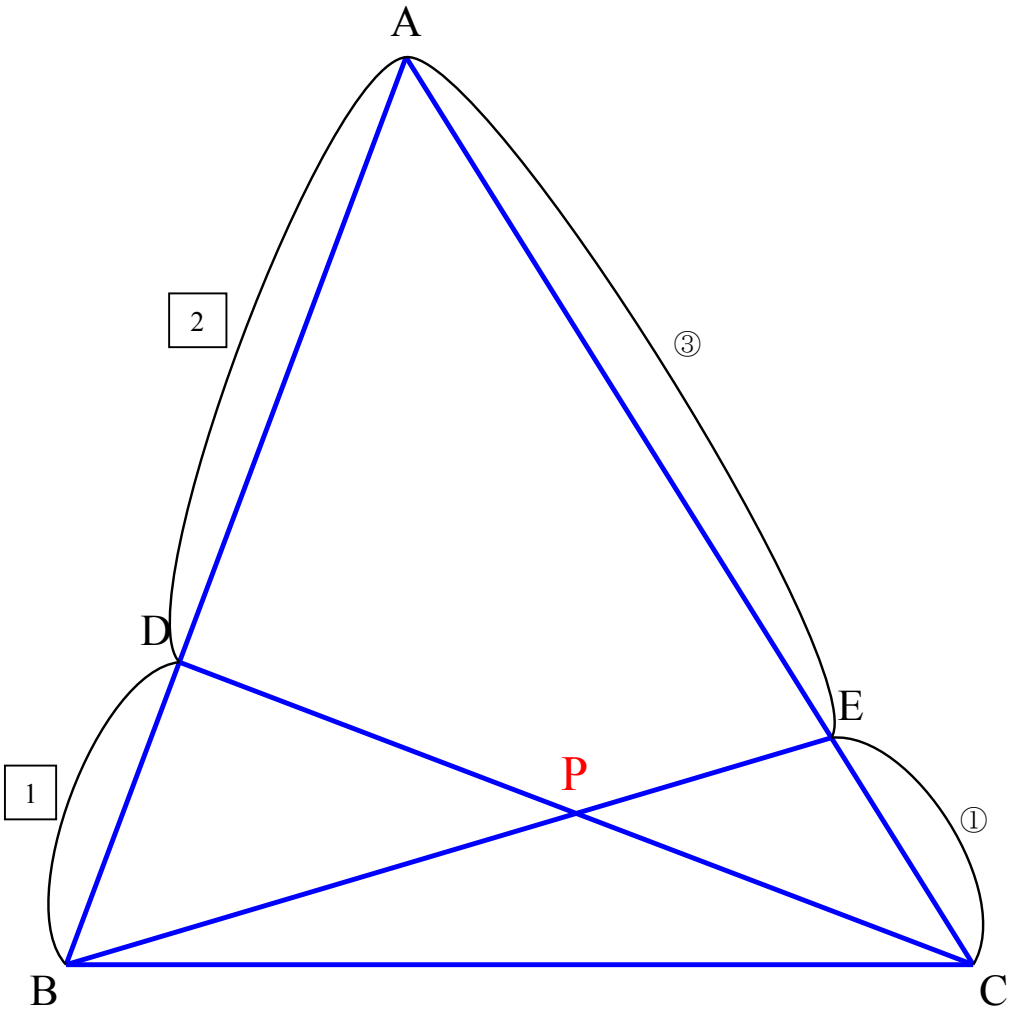
(2)

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$$

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AP}\right|^2 &= \left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|^2 \\ &= \frac{1}{9}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 \\ &= \frac{1}{9}\cdot 3^2 + \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 4\cos\angle BAC + \frac{1}{4}\cdot 4^2 \\ &= 4\cos\angle BAC + 5\end{aligned}$$

より， $4\cos\angle BAC + 5 = 7 \quad \therefore \cos\angle BAC = \frac{1}{2}$

ゆえに， $\angle BAC = 60°$



4

R が線分 BR を $u:1-u$ に内分しているとすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-u)\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OP} \\ &= (1-u)\overrightarrow{OB} + us\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

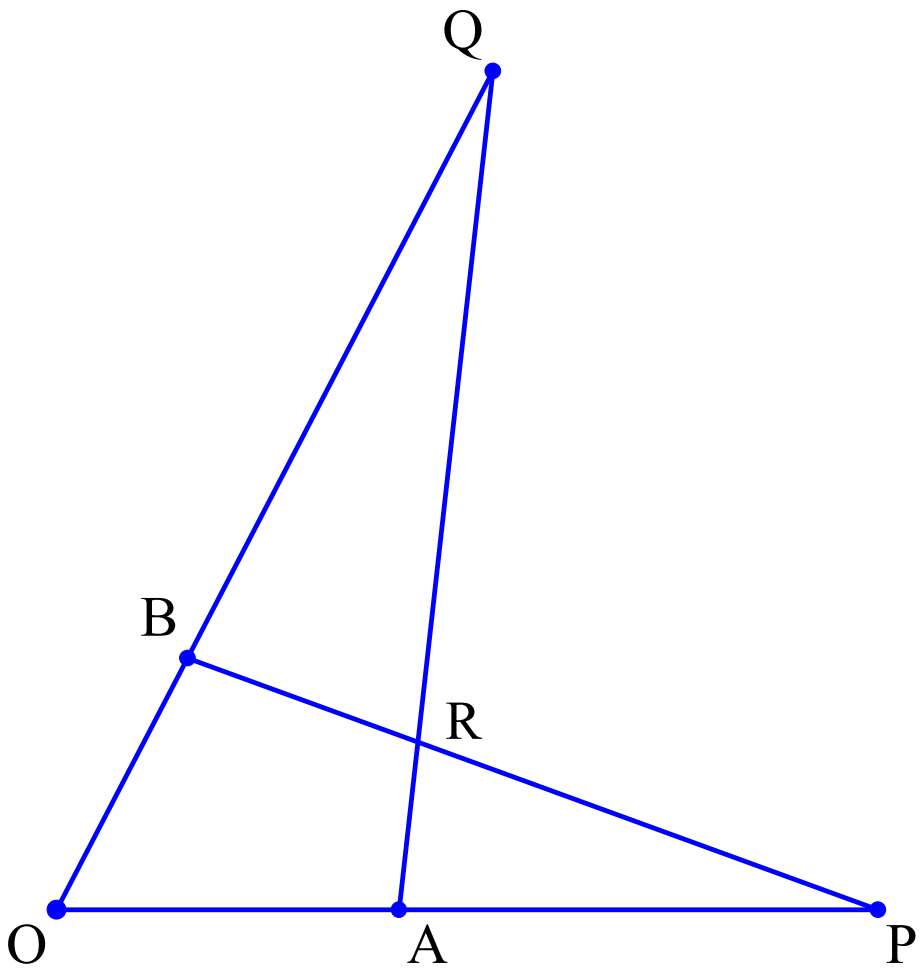
$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OA}$ より， $1-u=\frac{2}{3}$, $us=\frac{4}{5}$ $\therefore u=\frac{1}{3}$, $s=\frac{12}{5}$

R が線分 AQ を $v:1-v$ に内分しているとすると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= (1-v)\overrightarrow{OA} + v\overrightarrow{OQ} \\ &= (1-v)\overrightarrow{OA} + vt\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{OR} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ より， $1-v=\frac{4}{5}$, $vt=\frac{2}{3}$ $\therefore u=\frac{1}{5}$, $t=\frac{10}{3}$

以上より， $s=\frac{12}{5}$, $t=\frac{10}{3}$



5

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とすると，条件より $\vec{b}\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=\left(\vec{c}-\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{c}\right)=-\vec{c}\cdot\vec{b}$

$\therefore \vec{b}\cdot\vec{c}-\left|\vec{b}\right|^2=-\left|\vec{c}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\cdot\vec{b}$

ゆえに，$\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=2\vec{b}\cdot\vec{c}$　・・・①

解法 1

①より，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{\left|\vec{b}\right|^2}{2}$　・・・②

$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$　・・・③

よって，②，③より，

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|}=\frac{\dfrac{\left|\vec{b}\right|^2}{2}}{\left|\vec{b}\right|^2}=\frac{1}{2}\quad\therefore\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$$ ・・・④

また，②より $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$　・・・⑤

④と⑤より，△ABC は AB＝AC，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の二等辺三角形，すなわち正三角形

解法 2

①より，$\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2-2\vec{c}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2$　・・・②

①と②より，$\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|^2$

よって，$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=\left|\vec{c}-\vec{b}\right|$，すなわち $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}$

ゆえに，△ABC は正三角形である。

6

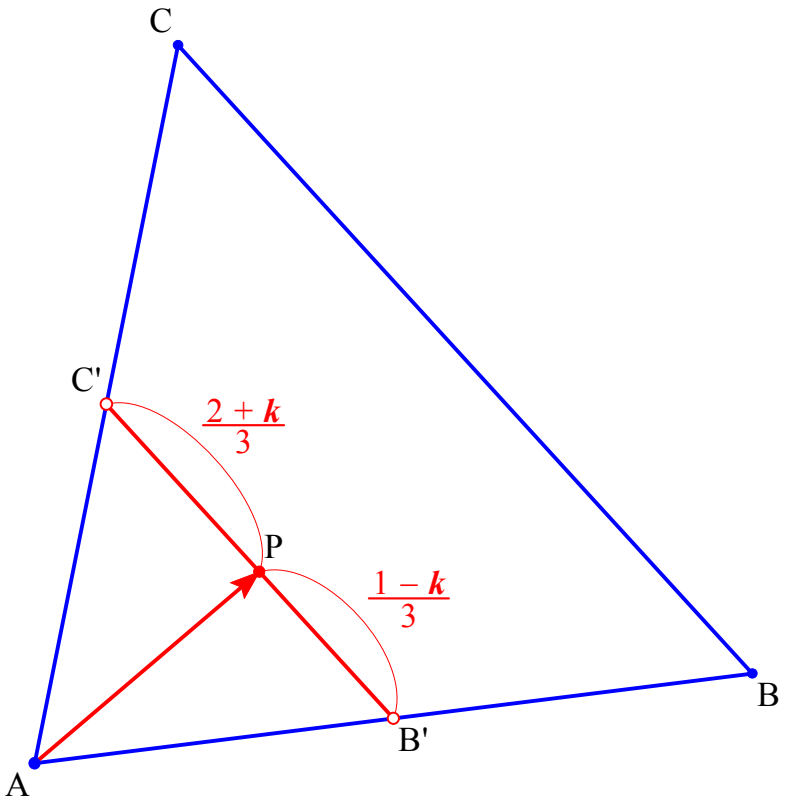
B, C, P の位置を A を定点とするベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ で表すと，

与式は $-3\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AC}-k\overrightarrow{AB}$ となる。
よって，

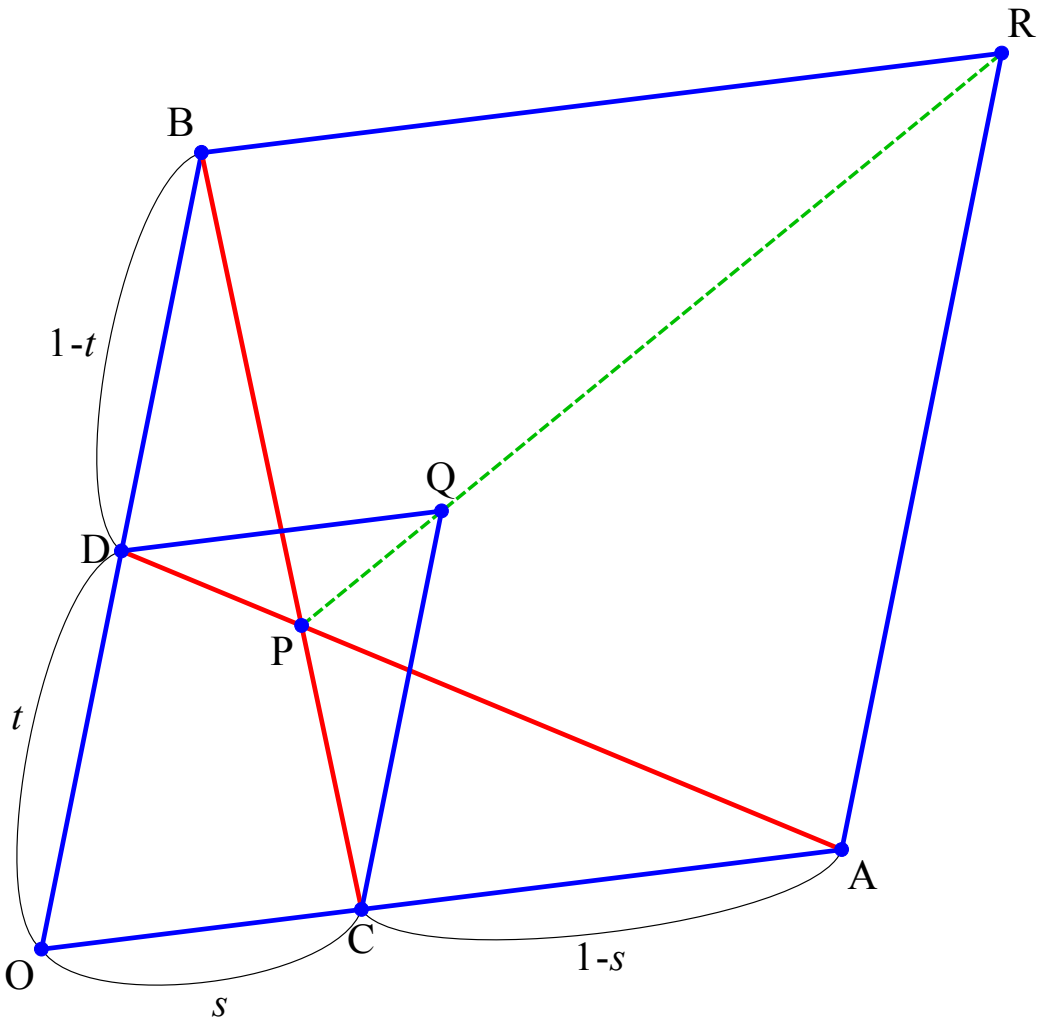
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}&=\frac{2+k}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{6}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{(2+k)+(1-k)}{6}\left\{\frac{2+k}{(2+k)+(1-k)}\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{(2+k)+(1-k)}\overrightarrow{AC}\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{2+k}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1-k}{3}\overrightarrow{AC}\right)\\&=\frac{2+k}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1-k}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\end{aligned}$$

ここで，$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB'}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC'}$ とすると，$\overrightarrow{AP}=\frac{2+k}{3}\overrightarrow{AB'}+\frac{1-k}{3}\overrightarrow{AC'}$

B', C' はそれぞれ AB, AC の中点であるから，
点 P が条件を満たす点であるためには，B'C' を $1-k:2+k$ に内分する点であればよい。
よって，$1-k>0,\ 2+k>0$　　$\therefore -2<k<1$



7



△BOC と線分 AD について，メネラウスの定理より，$\frac{BD}{DO}\cdot\frac{OA}{AC}\cdot\frac{CP}{PB}=1$

よって，$\frac{PB}{CP}=\frac{1-t}{t}\cdot\frac{1}{1-s}=\frac{1-t}{t(1-s)}$，すなわち $BP:PC=1-t:t(1-s)$

ゆえに，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1-t}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OC}+\frac{t(1-s)}{(1-t)+t(1-s)}\overrightarrow{OB}$$

$$=\frac{s(1-t)}{1-st}\overrightarrow{OA}+\frac{t(1-s)}{1-st}\overrightarrow{OB}\quad\cdots①$$

また，条件より，

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$　・・・②

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$　・・・③

①，②，③より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR}&=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}\\&=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-\left\{\frac{s(1-t)}{1-st}\overrightarrow{OA}+\frac{t(1-s)}{1-st}\overrightarrow{OB}\right\}\\&=\frac{1-s}{1-st}\overrightarrow{OA}+\frac{1-t}{1-st}\overrightarrow{OB}\\&=\frac{1}{1-st}\left\{(1-s)\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\right\}\\&=\frac{1}{1-st}\left\{\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)-\left(s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\right)\right\}\\&=\frac{1}{1-st}\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}\right)\\&=\frac{1}{1-st}\overrightarrow{QR}\end{aligned}$$

ゆえに，3 点 P，Q，R は一直線上にある。

8

(1)

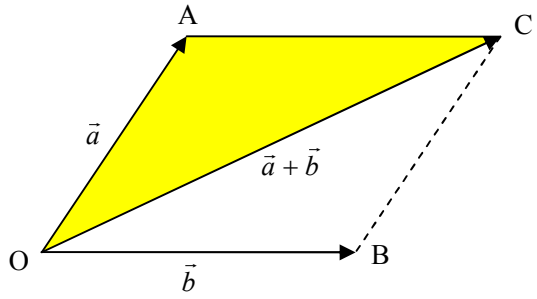
解法 1

（ア）

$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$ とすると，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$

これと $s+t\le 1,\ s\ge 0,\ t\ge 0$ より，

点 P の存在範囲は△OAC の周とその内部



（イ）

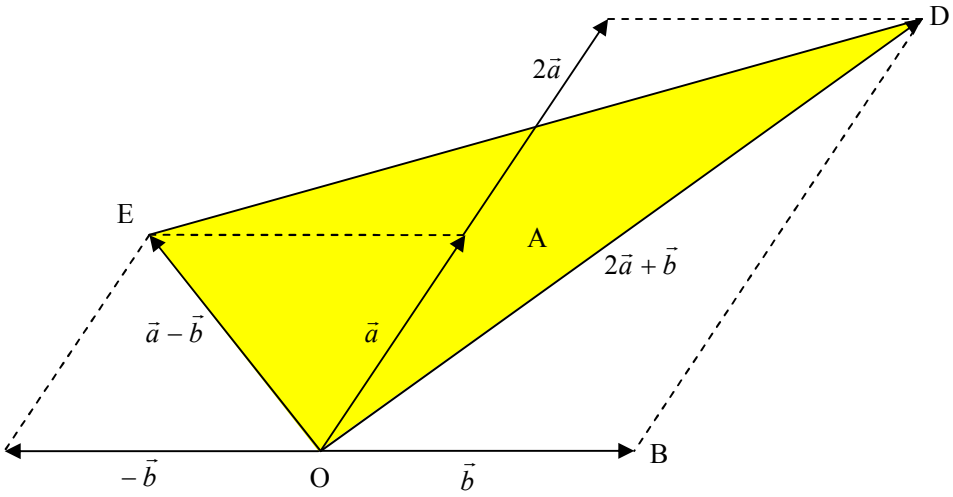
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}\\&=s\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)+t\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\end{aligned}$$

$2\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OD}$，$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OE}$ とすると，

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}$

これと $s+t\le 1,\ s\ge 0,\ t\ge 0$ より，

点 P の存在範囲は△ODE の周とその内部



解法 2

O を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の向きに x 軸，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の向きに y 軸をとり，

A の座標を $(0,\ 1)$，B の座標を $(1,\ 0)$，P の座標を $(x,\ y)$ とし，

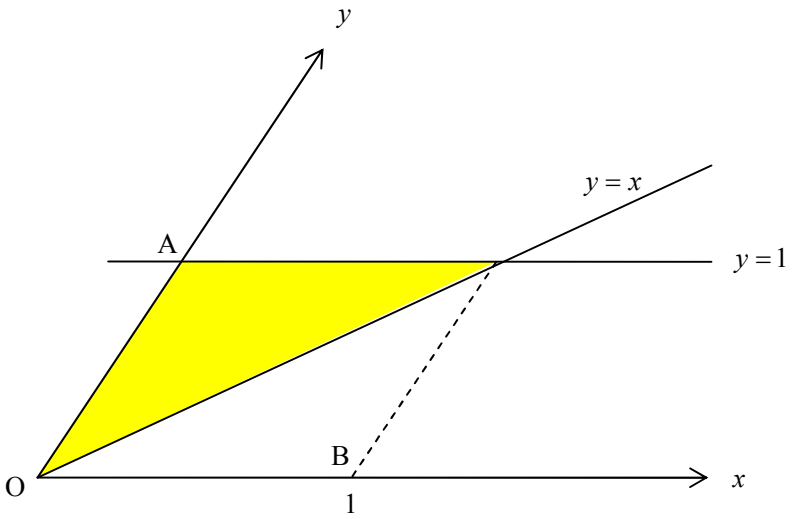
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ の関係について調べる。

（ア）

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}=\begin{pmatrix}t\\s+t\end{pmatrix}$ より，$t=x$，$s+t=y$　$\therefore s=-x+y,\ t=x$

$s+t\leq 1$，$s\geq 0$，$t\geq 0$ に代入し，整理すると，$y\leq 1$，$y\geq x$，$x\geq 0$

よって，点 P の存在範囲は下図黄色部分（境界線を含む）

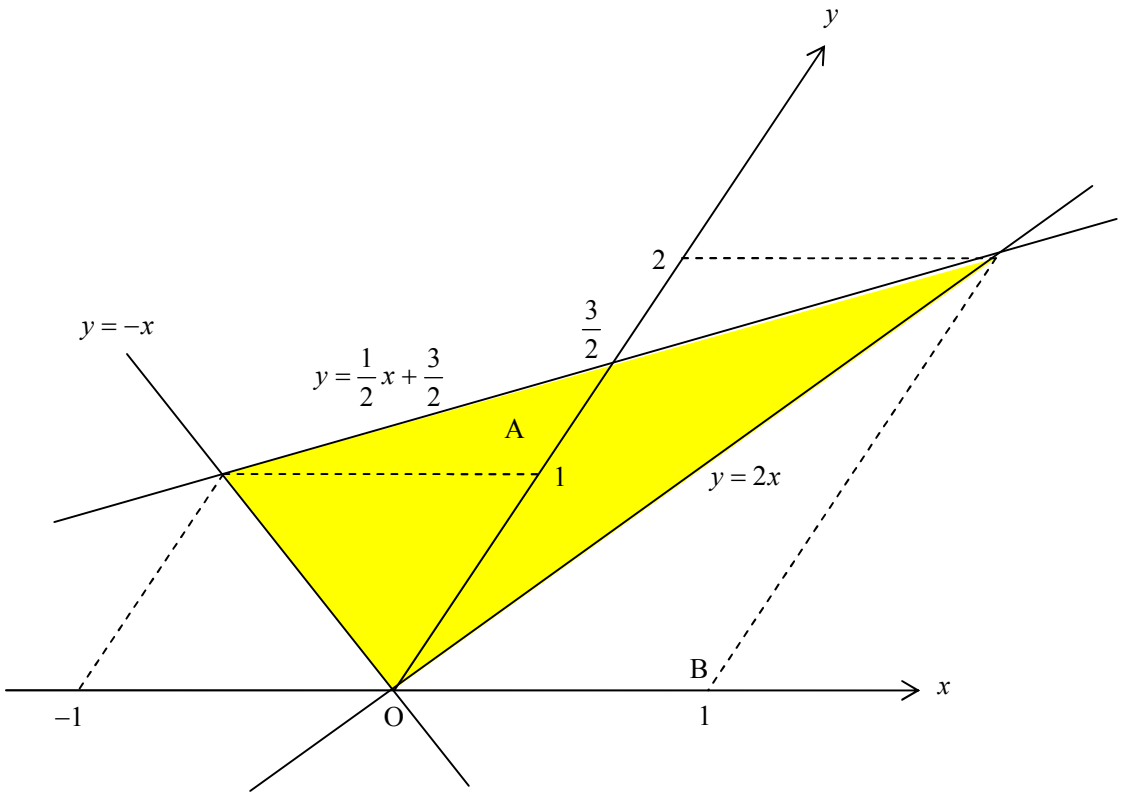


（イ）

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2s+t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (s-t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ 2s+t \end{pmatrix}$ より，$s-t=x$，$2s+t=y$　　$\therefore s=\dfrac{x+y}{3}$, $t=\dfrac{-2x+y}{3}$

$s+t\leq 1$，$s\geq 0$，$t\geq 0$ に代入し，整理すると，$y\leq \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$, $y\geq -x$, $y\geq 2x$

よって，点 P の存在範囲は下図黄色部分（境界線を含む）

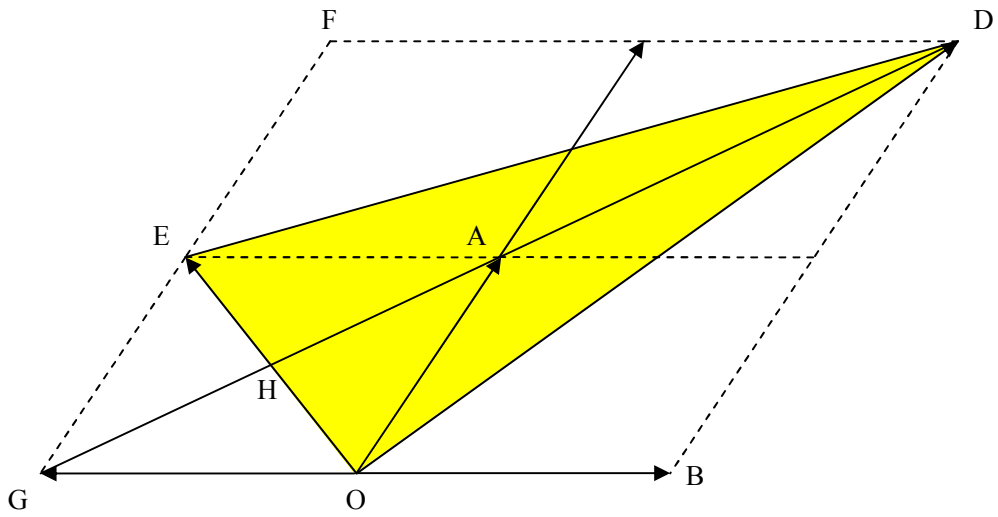


(2)

（ア）

1 倍

（イ）



△OAB の面積を 1 とすると，△OAE の面積は 1

△OAE と△ODE について，OE を共通底辺とすると，

高さの比は HA：HD＝HA：3HA＝1：3

よって，△ODE の面積は 3

ゆえに，3 倍