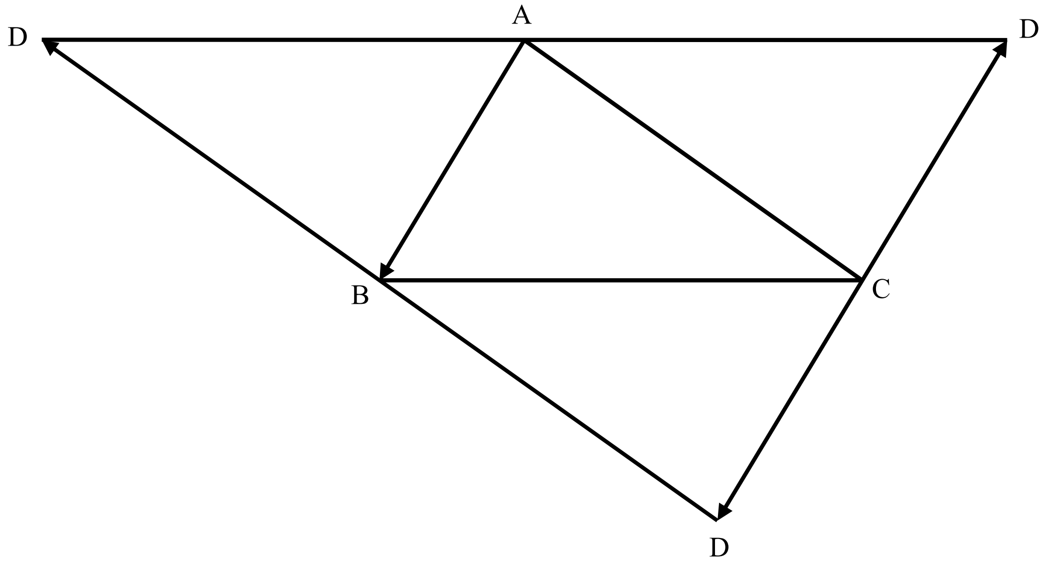
空間のベクトル 3　ベクトルの成分

ことわり

座標とベクトルを区別する目的で，座標は$(x,\ y,\ z)$，ベクトルは$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$と表示している。

99

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ の場合がある。



頂点 D の座標を$(x,\ y,\ z)$とすると，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ の場合

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$ より，

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\quad \therefore \overrightarrow{OD}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-2+4 \\ 5-1+3 \\ -2+3-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{OD}$ の成分と点 D の座標が一致するから，D の座標は$(1,\ 7,\ 0)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ の場合も同様にして D の座標を求めると，

それぞれ，$(7,\ -1,\ -2)$，$(-3,\ 3,\ -4)$

以上より，

$(1,\ 7,\ 0)$，$(7,\ -1,\ -2)$，$(-3,\ 3,\ -4)$

100

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2t\\1+4t\\2+6t\end{pmatrix}$$

より，

$$|\vec{x}|=\sqrt{(2t)^2+(1+4t)^2+(2+6t)^2}$$
$$=\sqrt{56t^2+32t+5}$$
$$=\sqrt{56\left(t+\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}}$$

よって，$t=-\frac{2}{7}$ のとき最小値 $\sqrt{\frac{3}{7}}$，すなわち $\frac{\sqrt{21}}{7}$ をとる。

また，このとき $\vec{x}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{7}\\-\frac{1}{7}\\\frac{2}{7}\end{pmatrix}$

101

$$\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(2x-y)+1\\(2x-y)-1\\x-3\end{pmatrix}$$

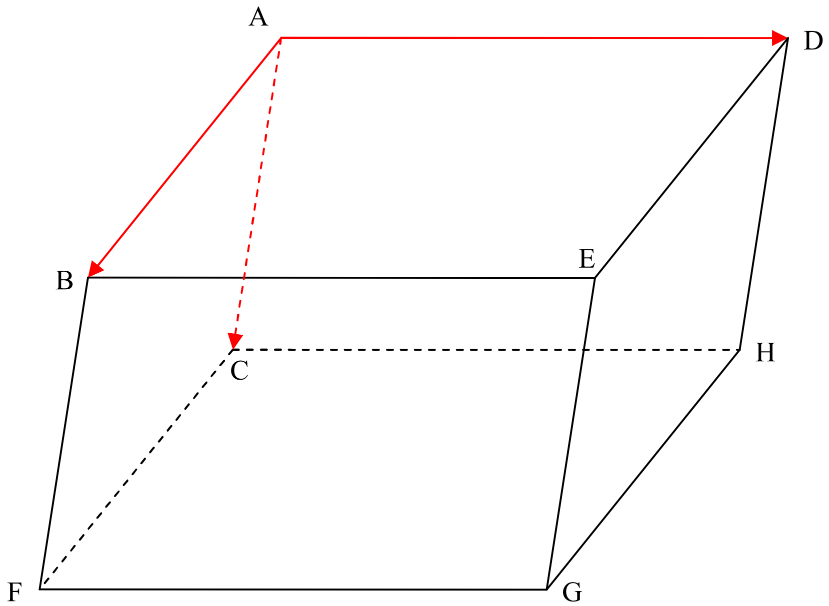
より，

$$\left|\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}\right|=\sqrt{\{(2x-y)+1\}^2+\{(2x-y)-1\}^2+(x-3)^2}$$
$$=\sqrt{2(2x-y)^2+(x-3)^2+2}$$

よって，$\left|\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}\right|$ を最小にする $x,\ y$ は $2x-y=0$ かつ $x-3=0$ の解

すなわち $x=3,\ y=6$

102



$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$O\to E=(O\to A)+(A\to B)+(B\to E)$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\&=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}\\&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\\&=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\-5\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FG}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

以上より，

$(1,\ -2,\ 3),\ (-2,\ -4,\ -4),\ (-1,\ -2,\ -1),\ (0,\ 3,\ 1)$