空間のベクトル 4　ベクトルの内積

108

条件より，$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)=0$

また，

$$\vec{a}+k\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}x\\-1\\-2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}kx+1\\-k+2\\-2k+3\end{pmatrix}$$

より，

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}kx+1\\-k+2\\-2k+3\end{pmatrix}$$
$$=1\cdot(kx+1)+2(-k+2)+3(-2k+3)$$
$$=kx-8k+14$$

よって，$kx-8k+14=0$　・・・①

条件より，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+k\vec{a}\right)=0$

また，

$$\vec{b}+k\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\-1\\-2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}x+k\\2k-1\\3k-2\end{pmatrix}$$

より，$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+k\vec{a}\right)=x+14k-8$

よって，$x+14k-8=0$，すなわち $x=-14k+8$　・・・②

②を①に代入すると，$k(-14k+8)-8k+14=0$

条件より $k>0$ だから，$k=1$

したがって，②より，$x=-6$

これより，$\vec{a}+k\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$，$\vec{b}+k\vec{a}=\begin{pmatrix}-5\\1\\1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$，

すなわち $\left|\vec{a}+k\vec{b}\right|\neq0$，$\left|\vec{b}+k\vec{a}\right|\neq0$ であるから，条件を満たす。

ゆえに，$k=1$

109

(1)

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle BAC&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\sin^2\angle BAC}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\left(1-\cos^2\angle BAC\right)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2\cos^2\angle BAC}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2\cdot 9-3^2}\\&=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(2)

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\2\\0\end{pmatrix}$，　$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle BAC&=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{13\cdot 5-4^2}\\&=\frac{7}{2}\end{aligned}$$

110

x 軸，　y 軸，　z 軸に関する基本ベクトルをそれぞれ $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ とすると，
α,β,γ はそれぞれ $\vec{a}$ と $\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z$ のなす角である。

これと $\vec{e}_x=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_y=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\vec{e}_z=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ より，

$$\cos\alpha=\frac{\vec{e}_x\cdot\vec{a}}{\left|\vec{e}_x\right|\left|\vec{a}\right|}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{\vec{e}_y\cdot\vec{a}}{\left|\vec{e}_y\right|\left|\vec{a}\right|}=-\frac{1}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{\vec{e}_z\cdot\vec{a}}{\left|\vec{e}_z\right|\left|\vec{a}\right|}=-\frac{2}{3}$$

111

求めるベクトルを$\vec{a}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$

x軸，y軸，z軸に関する基本ベクトルをそれぞれ$\vec{e}_x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,$\vec{e}_z=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$とすると，

条件より，$|\vec{a}|=2$，$\cos 45°=\dfrac{\vec{e}_x\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_x||\vec{a}|}$，$\cos 60°=\dfrac{\vec{e}_y\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_y||\vec{a}|}$

よって，

$p^2+q^2+r^2=4$　・・・①

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{p}{2}$　$\therefore p=\sqrt{2}$　・・・②

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{q}{2}$　$\therefore q=1$　・・・③

②，③を①に代入して整理すると，$r^2=1$　$\therefore r=\pm 1$

以上より，

$\vec{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$　・・・(答)

$\vec{a}$がz軸の正の向きとなす角をγ（$0\leq\gamma\leq 180°$）とすると，

$\vec{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$のとき，$\cos\gamma=\dfrac{\vec{e}_z\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_z||\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$　$\therefore\gamma=60°$　・・・(答)

$\vec{a}=\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$のとき，$\cos\gamma=\dfrac{\vec{e}_z\cdot\vec{a}}{|\vec{e}_z||\vec{a}|}=-\dfrac{1}{2}$　$\therefore\gamma=120°$　・・・(答)

112

$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right)=2\left|\vec{a}\right|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5\left|\vec{b}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}-5\vec{b}\cdot\vec{c}$

$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right)=0,\ \left|\vec{a}\right|=6,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^\circ$ より,

$5\left|\vec{b}\right|^2+9\left|\vec{b}\right|-72=0 \quad \therefore \left(5\left|\vec{b}\right|+24\right)\left(\left|\vec{b}\right|-3\right)=0$

これと $\left|\vec{b}\right|>0$ より, $\left|\vec{b}\right|=3$ ・・・(答)

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2&=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=36+9+1+2\cdot6\cdot3\cdot\frac{1}{2}+0+0\\&=64\end{aligned}$$

これと $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|>0$ より, $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=8$ ・・・(答)