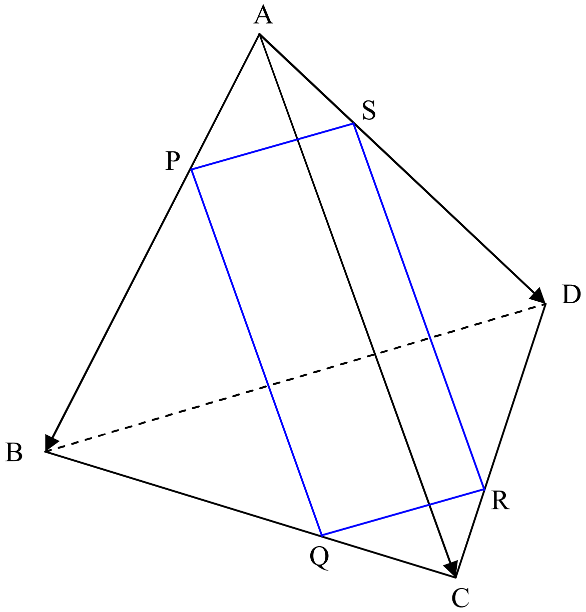
空間のベクトル 5　位置ベクトル

115



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\frac{1}{3}\vec{b}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{c}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AS}}$$
$$=\left(\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)-\frac{1}{3}\vec{d}$$
$$=\frac{2}{3}\vec{c}\quad\cdot\cdot\cdot②$$

①，②より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$

よって，四角形 PQRS は平行四辺形である。

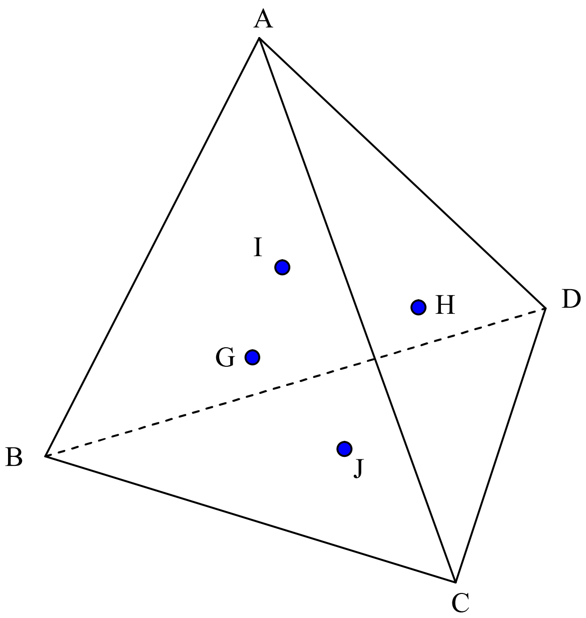
別解

AB：PB＝3：2，CB：QB＝3：2 より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・①

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　・・・②

①，②より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$

116



G,H,I,J の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{g}$, $\vec{h}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ とすると，

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$, $\vec{i}=\dfrac{\vec{a}+\vec{d}+\vec{b}}{3}$, $\vec{j}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$ だから，

DG を 3：1 に内分する点の位置ベクトルは，$\dfrac{1}{4}\vec{d}+\dfrac{3}{4}\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

BH を 3：1 に内分する点の位置ベクトルは，$\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{3}{4}\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

CI を 3：1 に内分する点の位置ベクトルは，$\dfrac{1}{4}\vec{c}+\dfrac{3}{4}\vec{i}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

AJ を 3：1 に内分する点の位置ベクトルは，$\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}j=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

よって，4 点の位置ベクトルが一致する。
すなわち 4 点は同一点である。

117

点 B,C,D,P の点 A を定点とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$ とすると，

$\vec{p}+3\left(\vec{p}-\vec{b}\right)+4\left(\vec{p}-\vec{c}\right)+8\left(\vec{p}-d\right)=\vec{0}$ より，

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\frac{1}{16}\left(3\vec{b}+4\vec{c}+8\vec{d}\right)\\&=\frac{1}{16}\left\{3\vec{b}+12\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)\right\}\\&=\frac{15}{16}\left\{\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)\right\}\end{aligned}$$

辺 CD を 2：1 に内分する点を E とすると，$\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}$ は点 E の位置ベクトルである。

したがって，$\frac{1}{5}\vec{b}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)$ は線分 BE を 4：1 に内分する点の位置ベクトルを表し，

この点を F とすると，$\vec{p}=\frac{15}{16}\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ より，点 P は線分 AF を 15：1 に内分する点である。