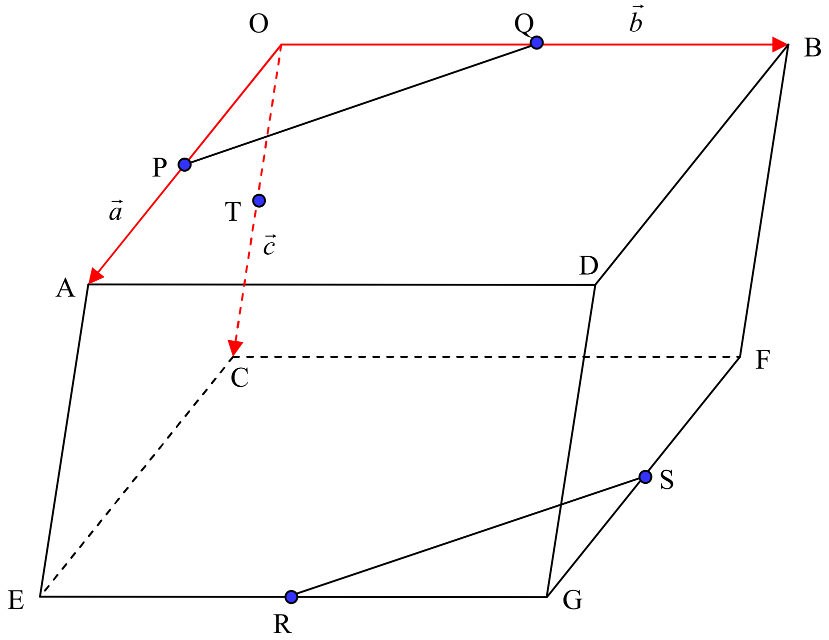
空間のベクトル 6　ベクトルと図形

120



(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$
$$=\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{FG}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{EG}}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)-\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$
$$=\left(\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)-\left(\vec{c}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$$

より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

よって，PQ//RS

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{TH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OT}}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-\frac{1}{2}\vec{c}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

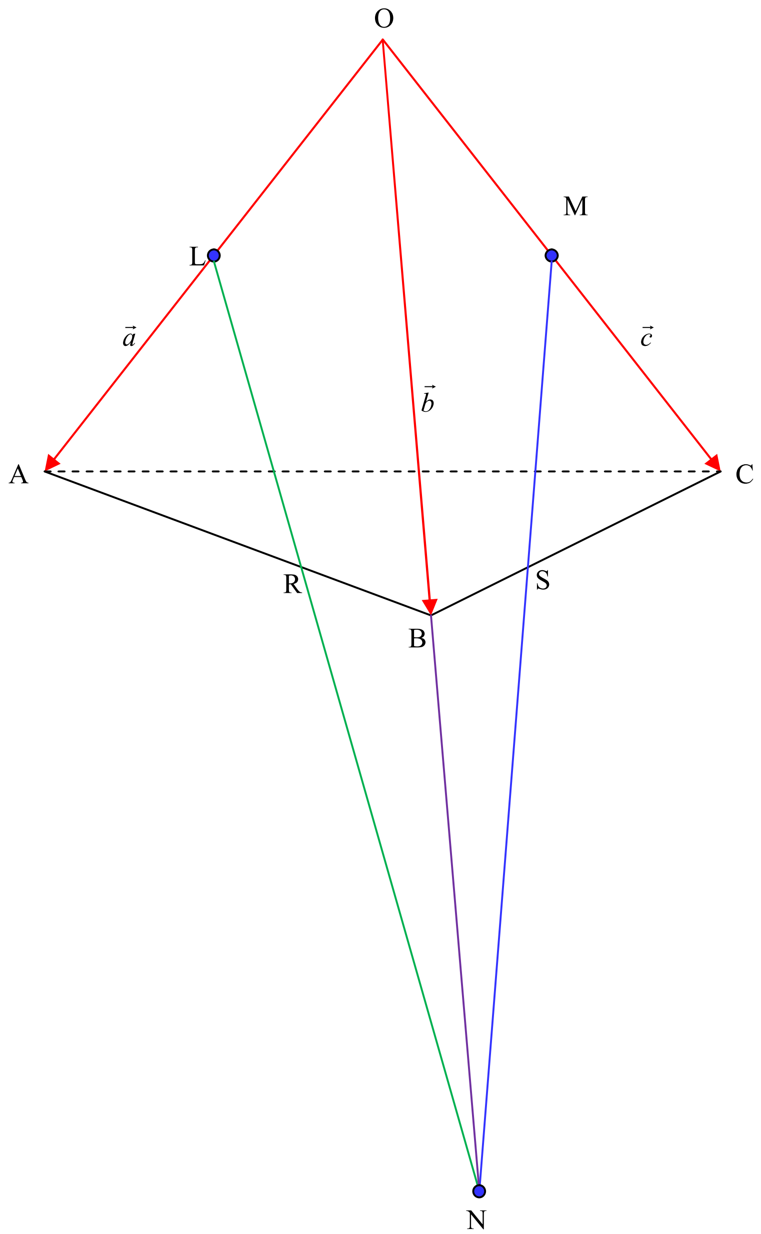
$\overrightarrow{TD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OT}$

$\quad =\vec{a}+\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}$

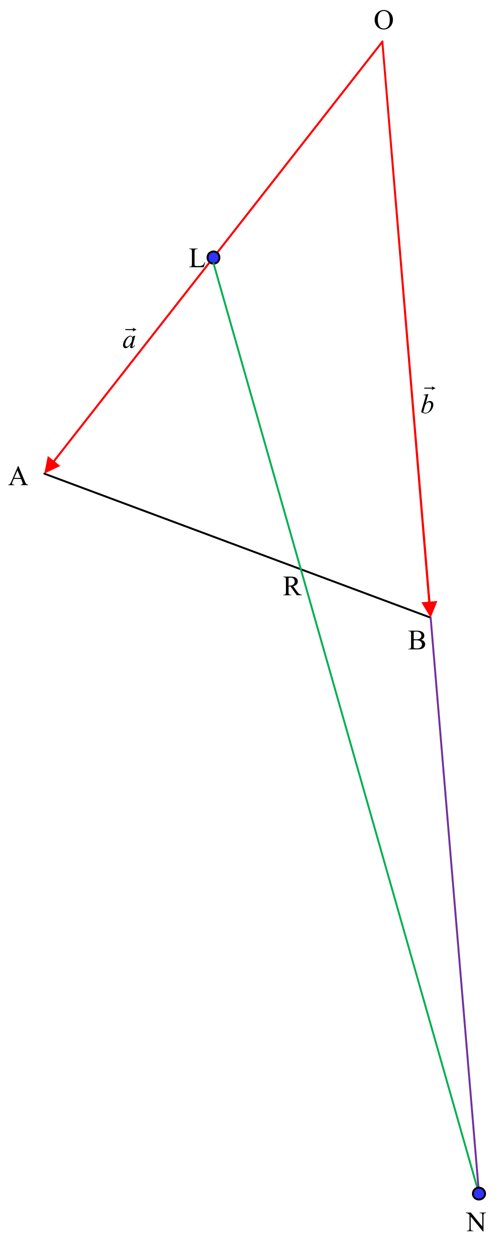
よって，$\overrightarrow{TD}=3\overrightarrow{TH}$

ゆえに，3 点 T, D, H は一直線上にあり，TH：HD＝1：2 である。

121



(1)

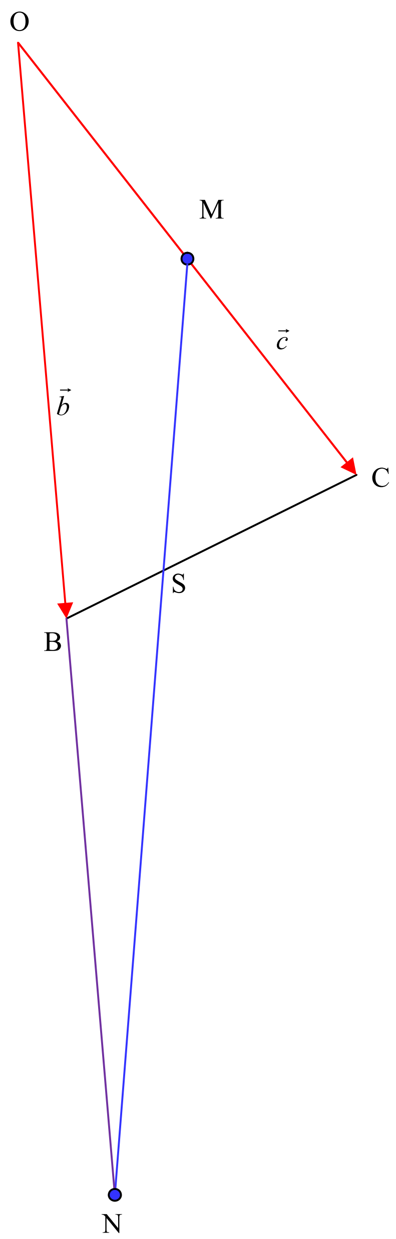


△OAB と線分 LN について，メネラウスの定理より，$\dfrac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=1$

条件より，$\dfrac{\mathrm{OL}}{\mathrm{LA}}=1$，$\dfrac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NO}}=\dfrac{1}{2}$ だから，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=2$

よって，点 R は AB を 2 : 1 に内分する点である。

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}$　・・・①



△OBC と線分 NM について，メネラウスの定理より， $\dfrac{\mathrm{ON}}{\mathrm{NB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SR}}\cdot\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MO}}=1$

条件より， $\dfrac{\mathrm{ON}}{\mathrm{NB}}=2$， $\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MO}}=1$ だから， $\dfrac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SR}}=\dfrac{1}{2}$

よって，点 S は BC を 1：2 に内分する点である。

ゆえに， $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{2}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$$
$$=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{a})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{a})$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{LM}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

ゆえに，RS//LM

122

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

点Pは平面ABC上の点だから，適当な実数をs,tとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{b}$$

また，適当な実数をkとすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}}$より，

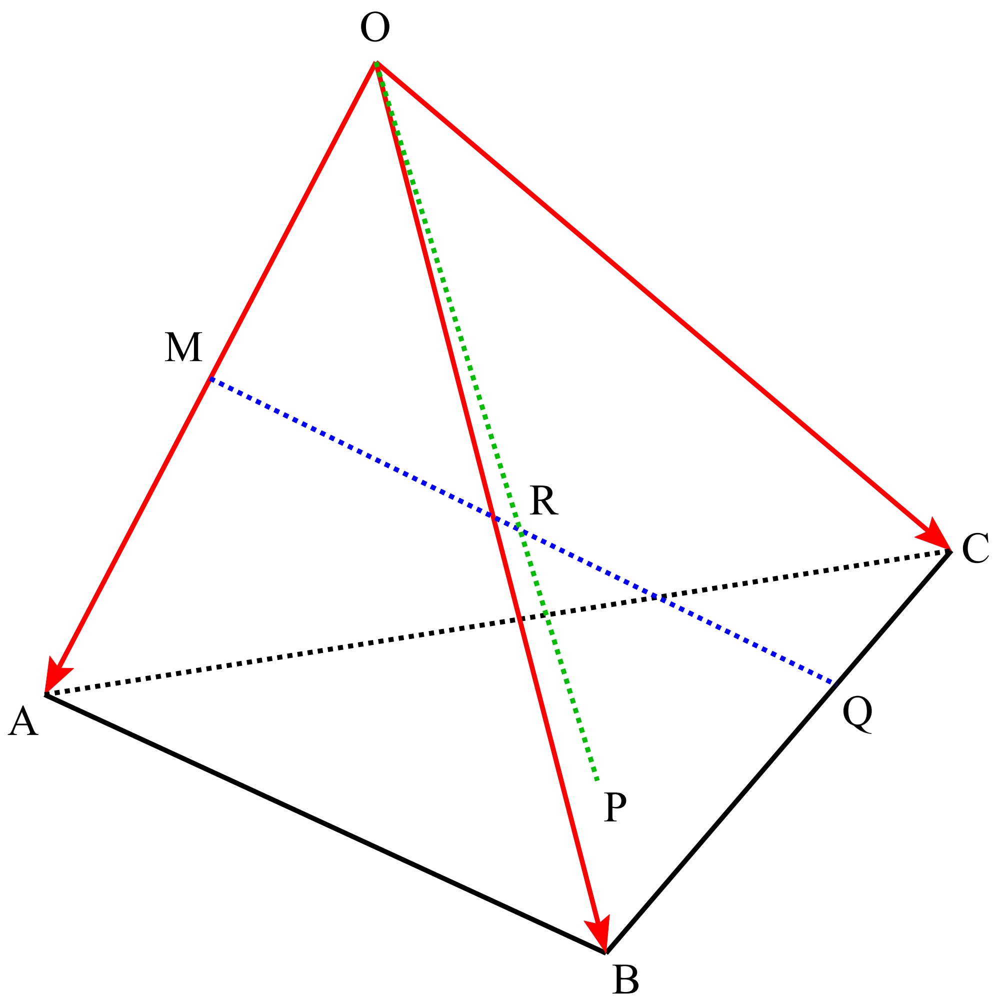
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{k}{4}\vec{a}+\frac{k}{6}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}\quad\cdots①$$

よって，

$$1-s-t=\frac{k}{4}\quad\cdots②,\qquad s=\frac{k}{6}\quad\cdots③,\quad t=\frac{k}{3}\quad\cdots④$$

②＋③＋④より，$1=\frac{3}{4}k\quad\therefore k=\frac{4}{3}$

これと①より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}+\frac{4}{9}\vec{c}$


O
M
R
C
A
Q
P
B

123

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，

$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

点 H は平面 MBC 上の点だから，適当な実数を s,t とすると，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OM}+s\overrightarrow{MB}+t\overrightarrow{MC}$$
$$=(1-s-t)\overrightarrow{OM}+s\vec{b}+t\vec{c}$$
$$=\frac{1-s-t}{2}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$$

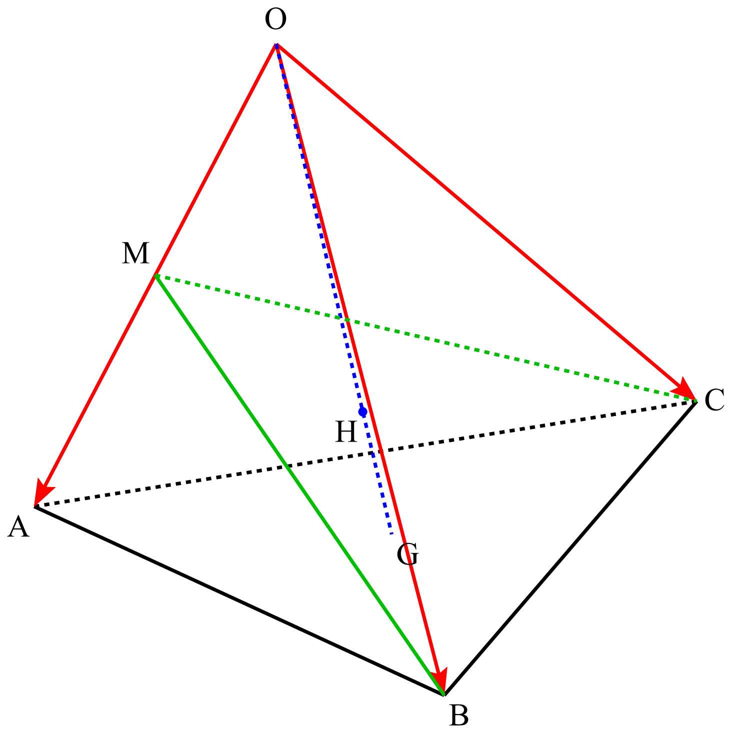
また，適当な実数を k とすると，$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OG}$ より，$\overrightarrow{OH}=\frac{k}{3}\vec{a}+\frac{k}{3}\vec{b}+\frac{k}{3}\vec{c}$

よって，$\frac{1-s-t}{2}=\frac{k}{3}$ ・・・①，$s=\frac{k}{3}$ ・・・②，$t=\frac{k}{3}$ ・・・③

①×2＋②＋③＝1 より，$1=\frac{4}{3}k$　$\therefore k=\frac{3}{4}$

ゆえに，$\overrightarrow{OH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OG}$

すなわち OH：OG＝3：4



124

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right)-OC$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{c}\right)-\vec{c}$$
$$=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}$$

また，適当な実数を k とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{CG}}$$
$$=\vec{c}+k\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{2}{9}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{c}\right)$$
$$=\frac{k}{6}\vec{a}+\frac{2k}{9}\vec{b}+\left(1-\frac{3}{4}k\right)\vec{c}$$

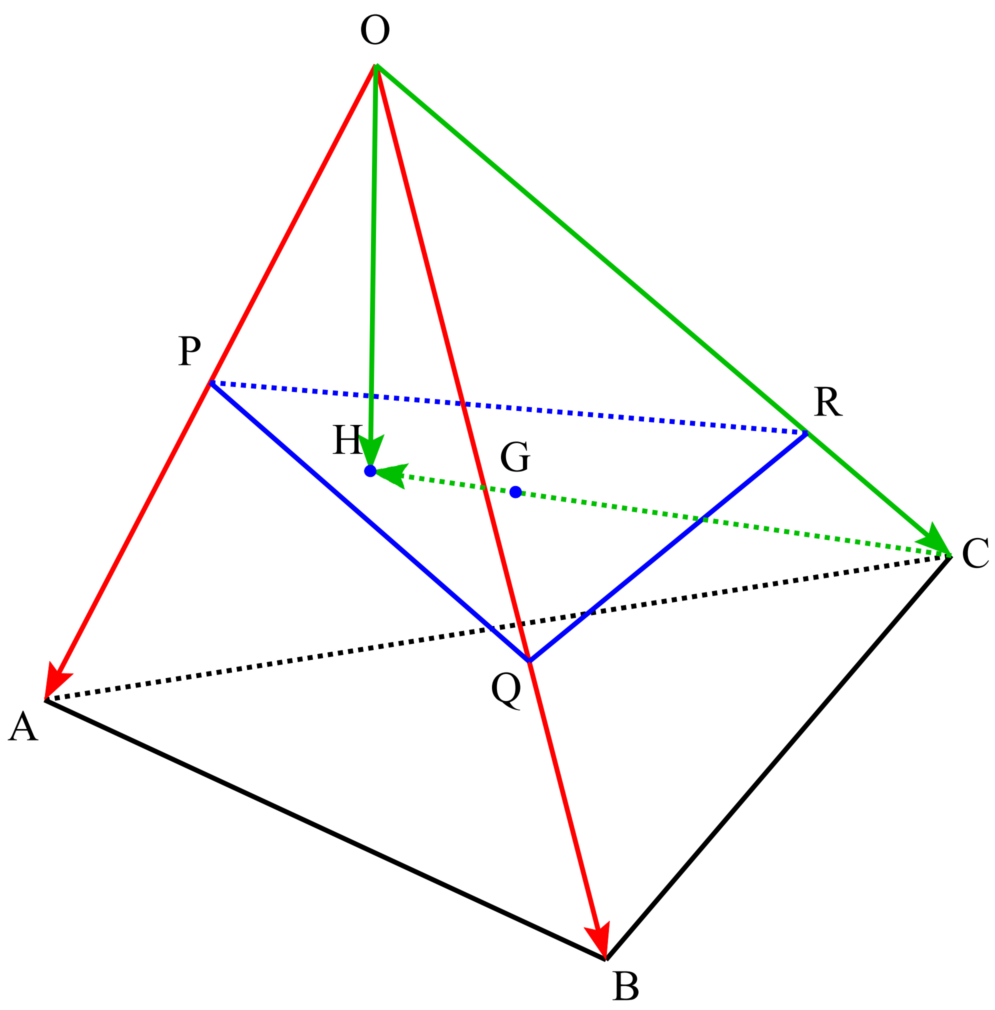
また，点 H は平面 OAB 上の点だから，適当な実数を s,t とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=s\vec{a}+t\vec{b}$$

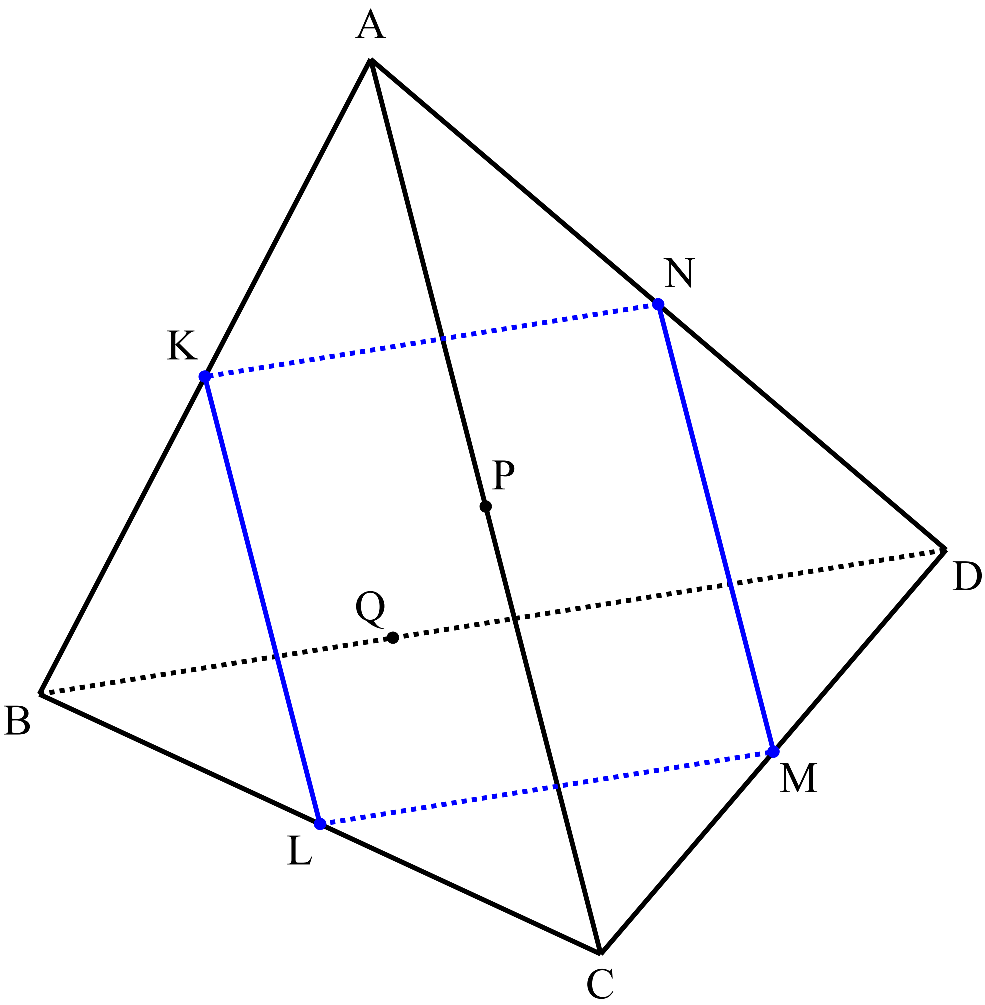
よって，$\dfrac{k}{6}=s$　・・・①　$\dfrac{2}{9}k=t$　・・・②　$1-\dfrac{3}{4}k=0$　・・・③

①，②，③より，$k=\dfrac{4}{3}$，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{8}{27}$

ゆえに，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{8}{27}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$


O
P
R
H
G
C
Q
A
B

125



(1)

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とすると，

中点連結定理より，$\overrightarrow{KL}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$ ・・・① $\overrightarrow{KN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\vec{b}\right)$ ・・・②

また，$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AK}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{2}-\dfrac{1}{2}\vec{b}=\dfrac{1}{2}\vec{c}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{d}\right)$ ・・・③

①，②，③より，$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{KN}$

よって，M は点 K, L, N で定められる平面上の点である。

すなわち 4 点 K, L, N, N は同じ平面上にある。

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$
$$=k\overrightarrow{\mathrm{AD}}-k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

あるいは,

条件より，点 Q は辺 BD を k ：$1-k$ に内分する点であるから,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

(3)

$$\overrightarrow{\mathrm{KR}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{KP}}+\overrightarrow{\mathrm{KQ}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AK}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-2\overrightarrow{\mathrm{AK}}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{h\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{AD}}-2\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{h\overrightarrow{\mathrm{AC}}+k\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)\right\}$$
$$=h\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}+k\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{BD}}}{2}$$
$$=h\overrightarrow{\mathrm{KL}}+k\overrightarrow{\mathrm{KN}}$$

よって，点 R は点 K, L, N で定められる平面上，すなわち(1)で決まる平面上にある。

126

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{HA}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

条件より，$\mathrm{HA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{HP}\perp\mathrm{BC}$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{HP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$　すなわち $\mathrm{PA}\perp\mathrm{BC}$

127

(1)

各面は互いに合同かつ正三角形だから，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|=l$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=l^2\cos 60^\circ$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=l^2\cos 60^\circ$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=l^2\cos 60^\circ$

よって，与式が成り立つ。

(2)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ すなわち $\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD}$

128

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\left\{\begin{pmatrix}8\\0\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}5\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}3t+5\\2t-2\\-t-3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}3t+5\\2t-2\\-t-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$$
$$=14t+14$$

これと $\mathrm{OH}\perp\mathrm{AB}$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$t=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix}$

ゆえに，$\mathrm{H}=(2,\ -4,\ -2)$，$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+(-4)^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}&=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{AH}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\&=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}+t\left\{\begin{pmatrix}8\\4\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\}\\&=\begin{pmatrix}8t-3\\6t-1\\10t-7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\begin{pmatrix}8t-3\\6t-1\\10t-7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\6\\10\end{pmatrix}\\&=200t-100\end{aligned}$$

これと $\mathrm{PH}\perp\mathrm{AB}$，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ より，$t=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$　・・・①

ゆえに，$\mathrm{PH}=\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{PH}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4\\1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{H}(4,\ 1,\ 2)$

例題 13

別解

xyz 直交座標系において，3 点 A,B,C はそれぞれ x, y, z 軸の切片だから，

平面 ABC の方程式は $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{-2}=1 \quad \therefore x+2y-z=2$　・・・①

これより，ベクトル $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ は平面 ABC の法線ベクトルである。

したがって，適当な実数 k を用いると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$

よって，$\mathrm{H}(k,\ 2k,\ -k)$

点 H は平面 ABC 上の点だから，①を満たす。

すなわち $k+2\cdot 2k-(-k)=2 \quad \therefore k=\dfrac{1}{3}$

ゆえに，$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

また，$\mathrm{OH}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

補足

点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を含み $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ に垂直な平面上の A でない任意の点を $\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$ より，$\begin{pmatrix}x-x_1\\y-y_1\\z-z_1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=0 \quad \therefore a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

ゆえに，$ax+by+cz-(ax_1+by_1+cz_1)=0$

これは $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$ についても成り立つ。

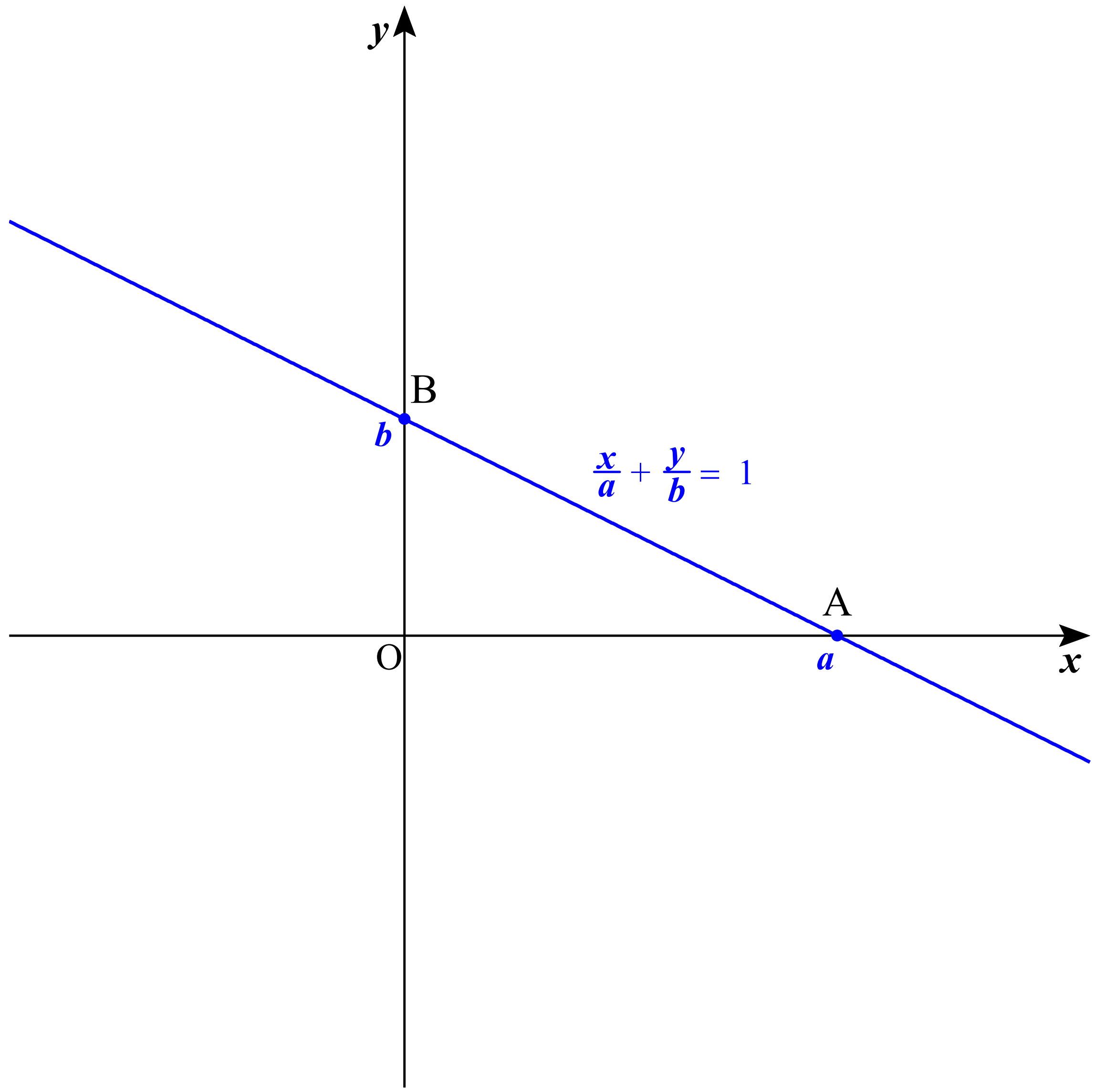
これより，$ax+by+cz+d=0$ で表される平面の方程式において，

ベクトル $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ はその平面の法線ベクトルである。

切片と直線の方程式・平面の方程式

x 切片を a，y 切片を b とする直線の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ （a,b は 0 でない実数）

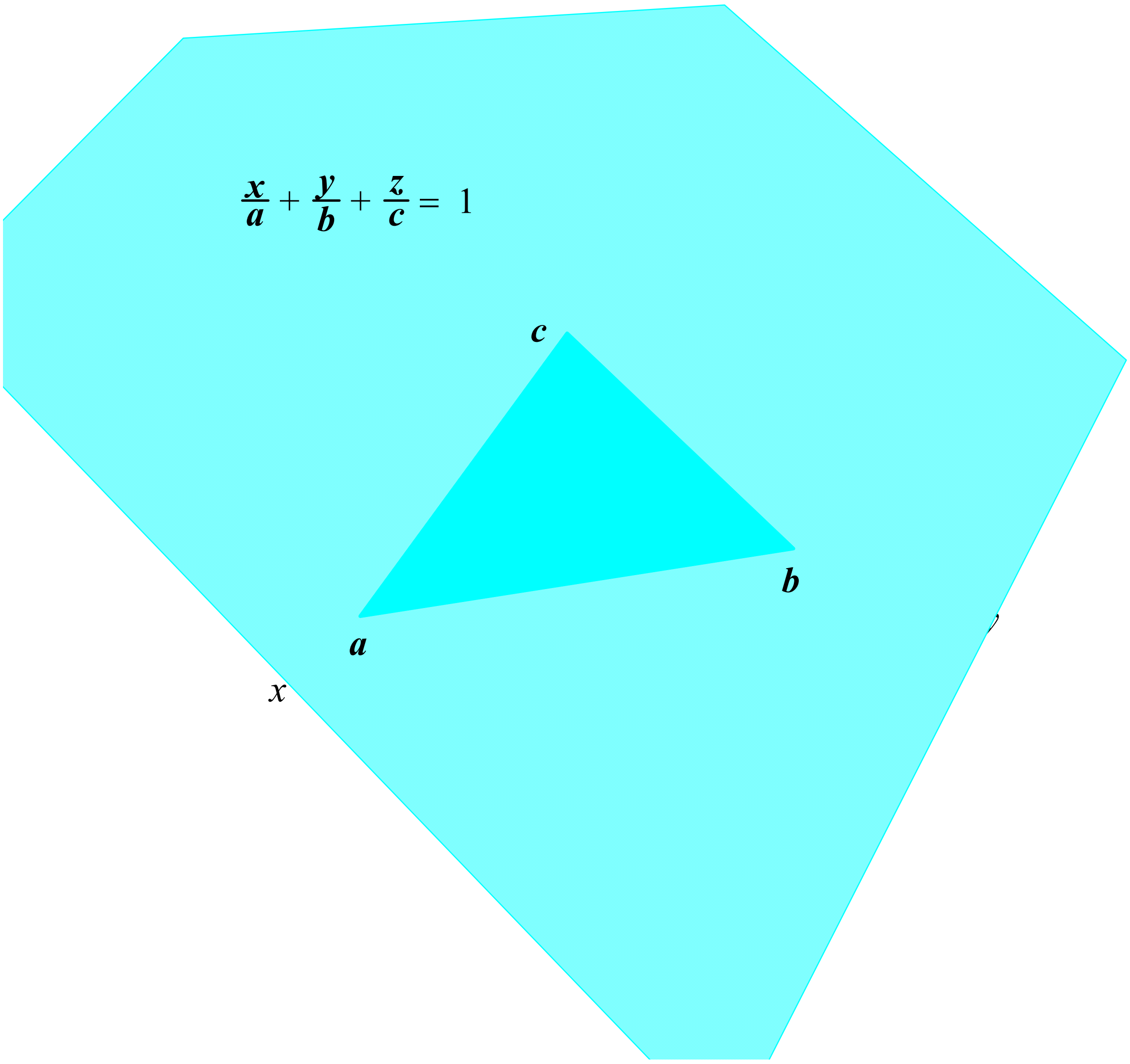


証明

$\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(0.b)$ を通る直線の方程式は，$y=-\dfrac{b}{a}x+b$ $\quad\therefore \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

x 切片を a， y 切片を b， z 切片を c とする平面の方程式

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ （a,b,c は 0 でない実数）



証明

A$(a,0,0)$，B$(0.b,0)$，C$(0,0,c)$を通る平面の方程式を $px+qy+rz=s$ とすると，

$pa=qb=rc=s$ より， $p=\dfrac{s}{a},q=\dfrac{s}{b},r=\dfrac{s}{c}$ $\quad\therefore\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

129

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}+s\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right\}+t\left\{\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t+2\\4t-5\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，

$$\begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t+2\\4t-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}=8s+8t-4=0 \qquad \therefore 2s+2t=1 \qquad \cdots①$$

$$\begin{pmatrix}-2s-3t\\-2s-t+2\\4t-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\-1\\4\end{pmatrix}=8s+26t-22=0 \qquad \therefore 4s+13t=11 \qquad \cdots②$$

①，②より，$s=-\dfrac{1}{2},\ t=1$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PH}}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}$$

ゆえに，$\mathrm{PH}=\left|\overrightarrow{\mathrm{PH}}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$

別解

平面 ABC の法線ベクトルの 1 つを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ より，

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}=-2a-2b=0 \qquad \therefore a+b=0$$

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}=-a+b+4c=0 \qquad \therefore a-b=4c$$

したがって，$c=1$ とすると，$a=2,\ b=-2$

これより，平面 ABC の方程式は$2x-2y+z+d=0$と表される。

これと平面 ABC が点 A を含むことから，$2\cdot3-2\cdot6+0+d=0$ より $d=6$

よって，平面 ABC の方程式は$2x-2y+z+6=0$

ゆえに，点 P と平面 ABC の距離，すなわち線分 PH の長さは$\dfrac{|2\cdot3-2\cdot4+5+6|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=3$

130

△ABC の面積

$$
\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sin\angle\mathrm{BAC}\\
&=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{BAC}}}{2}\\
&=\frac{\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)^2}}{2}
\end{aligned}
$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ より，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\sqrt{5}$ $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1$

$$\therefore S=\frac{\sqrt{2\cdot5-1}}{2}=\frac{3}{2}$$

四面体 ABCD の体積

点 D から底面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると，

$$V=\frac{1}{3}S\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|$$

ここで，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DH}}&=\overrightarrow{\mathrm{DA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\
&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\\
&=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}+t\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\\
&=\begin{pmatrix}-s-t\\s-2\\2t-3\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$\begin{pmatrix}-s-t\\ s-2\\ 2t-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=2s+t-2=0 \quad \therefore 2s+t=2 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

$$\begin{pmatrix}-s-t\\ s-2\\ 2t-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}=s+5t-6=0 \quad \therefore s+5t=6 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

①，②より， $s=\frac{4}{9},\ t=\frac{10}{9}$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{DH}}=\begin{pmatrix}-\frac{14}{9}\\ -\frac{14}{9}\\ -\frac{7}{9}\end{pmatrix}$$

ゆえに， $\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\sqrt{\left(-\frac{14}{9}\right)^2+\left(-\frac{14}{9}\right)^2+\left(-\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{7}{3}$

$\therefore V=\frac{7}{6}$

別解

点 D から底面 ABC に下ろした垂線の足を H とすると，

$V=\frac{1}{3}S\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|$

ここで，

xyz 直交座標系において，3 点 A,B,C はそれぞれ $x,\ y,\ z$ 軸の切片だから，

平面 ABC の方程式は $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1 \quad \therefore 2x+2y+z-2=0$

これより，点 D と平面 ABC の距離，すなわち $\left|\overrightarrow{\mathrm{DH}}\right|=\frac{|2\cdot1+2\cdot2+3-2|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{7}{3}$

$\therefore V=\frac{7}{6}$