空間のベクトル 7　座標空間における図形

136

点 Q の座標を $(a,\ b,\ c)$ とすると点 A は PQ の中点だから，

$$\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{b+2}{2},\ \frac{c+3}{2}\right)=(3,\ -4,\ 2) \quad \therefore (a,\ b,\ c)=(5,\ -10,\ 1)$$

137

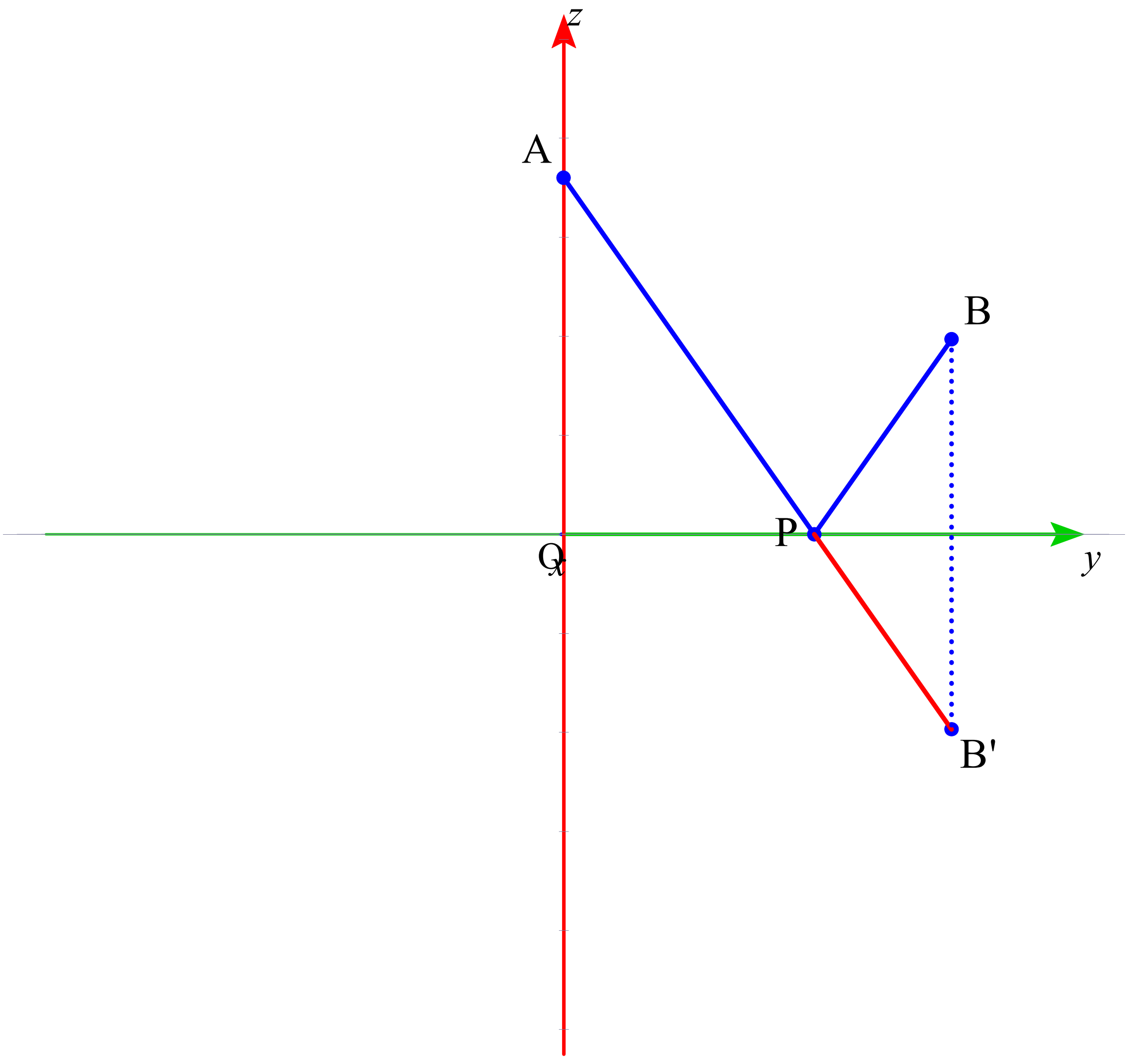
xy 平面に関して点 B と対称な点を B' とすると，B'$(1,\ 2,\ -1)$ であり，

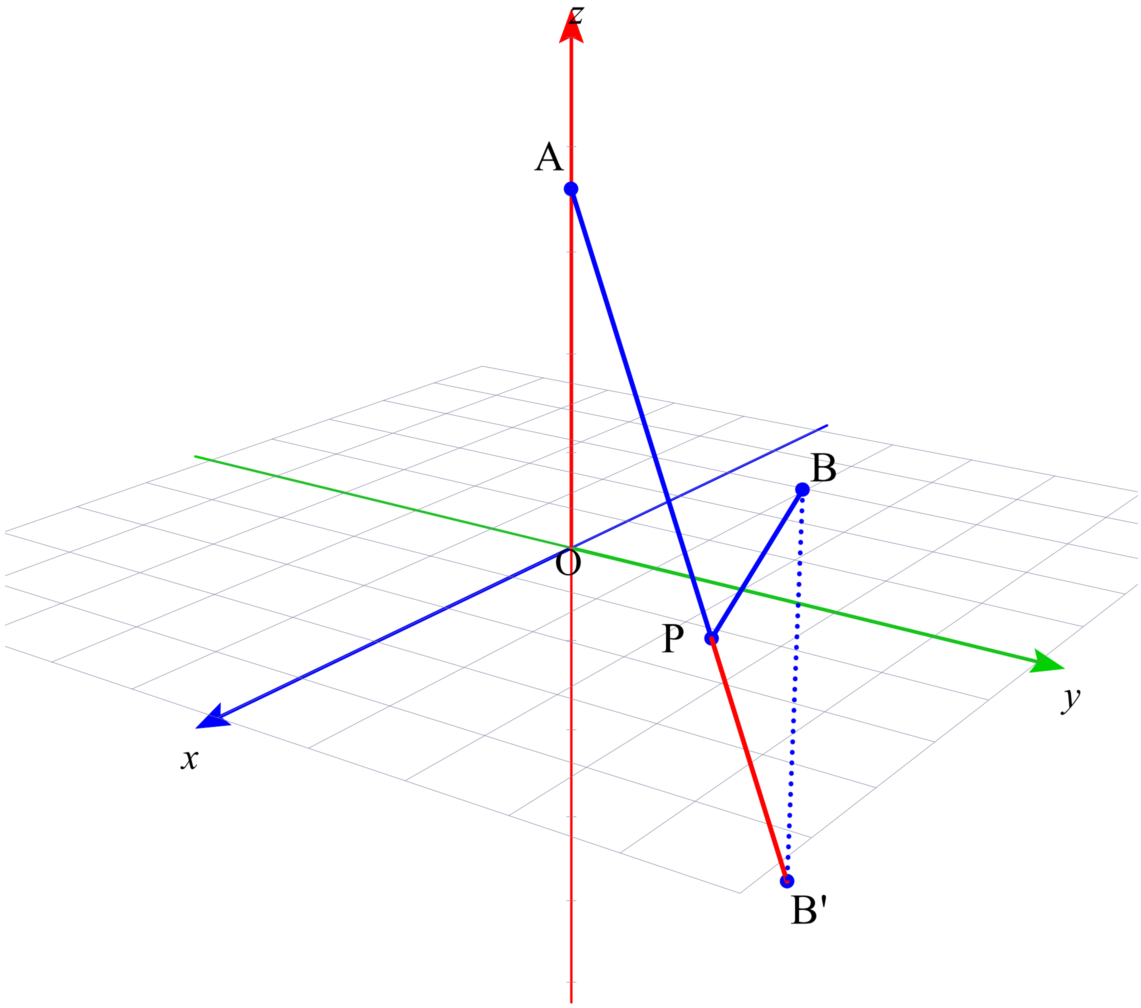
PB = PB' より，AP + PB = AP + PB'

したがって，AP + PB' の最小値を求めればよく，

その最小値は A, P, B' が同一直線上にある場合である。

よって，求める最小値は $\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{14}$





補足：点 **P** の座標

$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB'}}$ より，$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -3k \end{pmatrix}$ $\quad\therefore k=\dfrac{2}{3}$

ゆえに，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3},\ 0\right)$

138

(1)

与式を変形すると $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-6)^2=1^2$

これは $(x,\ y,\ z)$ が定点 $(-3,\ 2,\ 6)$ からの距離が $\sqrt{1}$ の点であること，

すなわち中心 $(-3,\ 2,\ 6)$，半径 1 の球面上の点であることを示している。

ゆえに，求める球面の中心の座標は $(-3,\ 2,\ 6)$，半径は 1

(2)

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\left(\sqrt{\frac{15}{2}}\right)^2$$

よって，中心の座標は $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，半径は $\sqrt{\frac{15}{2}}\ \left(=\frac{\sqrt{30}}{2}\right)$

139

(1)

球が xy $(yz,\ zx)$ 座標平面に接する $\Leftrightarrow$ 中心と xy $(yz,\ zx)$ 座標平面の距離＝球の半径

$\Leftrightarrow$ 中心の z 座標（x 座標，y 座標）の絶対値＝球の半径

3 つの座標平面に接することと点 $(4,\ 2,\ 2)$（$x,\ y,\ z$ がいずれも正）を通ることから，

半径を r（$r>0$）とすると，球面の方程式は $(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2$ と表せる。

$(4,\ 2,\ 2)$ はこの方程式の解だから，$(4-r)^2+(2-r)^2+(2-r)^2=r^2$

すなわち $2(r-2)(r-6)=0\quad \therefore r=2,\ 6$

ゆえに，求める球面の方程式は

$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=4$，$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=36$

(2)

求める球面の方程式を $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ とすると，

条件より，$\begin{cases} d=0 \\ 9+3a+d=0 \\ 16+4b+d=0 \\ 1-c+d=0 \end{cases}$

これを解くと，$a=-3,\ b=-4,\ c=1,\ d=0$

よって，$x^2+y^2+z^2-3x-4y+z=0$

140

球面の方程式は$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=36$

よって，xy平面，すなわち$z=0$と交わってできる円の方程式は，

$(x+2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=36$かつ$z=0$より，

$(x+2)^2+(y-1)^2+(0-a)^2=36$より，$(x+2)^2+(y-1)^2=36-a^2$

この円の半径が$4\sqrt{2}$だから，$36-a^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2$　$\therefore a=\pm 2$

141

球面の方程式を$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=r^2$とすると，

$(-1,\ 1,\ -1)$はこの方程式の解だから，$(-1+1)^2+(1-1)^2+(-1-a)^2=r^2$

すなわち$a^2+2a+1-r^2=0$　・・・①

xy平面の方程式は$z=0$だから，これと交わってできる円の方程式は，

$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-a)^2=r^2$かつ$z=0$より，$(x+1)^2+(y-1)^2=r^2-a^2$

この円の半径が$\sqrt{5}$だから，$r^2-a^2=5$　$\therefore r^2=a^2+5$　・・・②

①，②より，$a=2,\ r^2=9$

よって，$(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$

142

(1)

平面上のAでない点を$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y+3 \\ z-4 \end{pmatrix}$

これと$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{n}=0$より，$2\cdot(x-1)+5\cdot(y+3)+1\cdot(z-4)=0$　$\therefore 2x+5y+z+9=0$

これは$\mathrm{A}(1,\ -3,\ 4)$を満たす。

ゆえに，$2x+5y+z+9=0$

(2)

$1\cdot\{x-(-2)\}+(-2)(y-1)+4(z-0)=0$より，$x-2y+4z+4=0$

これは$\mathrm{A}(-2,\ 1,\ 0)$を満たす。$\therefore x-2y+4z+4=0$

(3)

$3\cdot(x-0)+0\cdot\{y-(-1)\}+(-2)\cdot\{z-(-3)\}=0$より，$3x-2z-6=0$

これは$\mathrm{A}(0,\ -1,\ -3)$を満たす。$\therefore 3x-2z-6=0$

(4)

$0\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)+0\cdot(y-2)+1\cdot(z-0)=0$より，$z=0$

これは$\mathrm{A}\left(\sqrt{2},\ 2,\ 0\right)$を満たす。$\therefore z=0$

143

解法 1

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$,

平面の法線ベクトルを$\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ($\vec{n}\neq\vec{0}$) とすると, $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}=0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0$ より,

$2a+2b+2c=0$ $\therefore a+b+c=0$ ・・・①

$2a+4b=0$ $\therefore a=-2b$ ・・・②

①, ②より, $a=-2b,\ c=b$

$\therefore \vec{n}=\begin{pmatrix}-2b\\b\\b\end{pmatrix}$ ($b\neq0$)

したがって, 平面上のAでない点を$P(x,\ y,\ z)$とすると,

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ より, $-2b(x-1)+b(y+1)+bz=0$

これと $b\neq0$ より, $2x-y-z-3=0$

これは$A(1,\ -1,\ 0)$を満たす。

ゆえに, $2x-y-z-3=0$

解法 2

平面の方程式を$ax+by+cz+d=0$とすると,

$\begin{cases}a-b+d=0\\3a+b+2c+d=0\\3a+3b+d=0\end{cases}$ より, $a=-2b,\ c=b,\ d=3b$

$\therefore -2bx+by+bz+3b=0$

これと $a=b=c=0$, すなわち$b=0$ とはならないことから, $2x-y-z-3=0$

144

(1)

直線上の任意の点を$P(x,\ y,\ z)$とすると, $\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$ より, $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+1\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

よって,

直線の媒介変数表示は$x=1+2t,\ y=1+3t,\ z=-1+t$

tを消去した直線の方程式は, $t=\dfrac{x-1}{2},\ t=\dfrac{y-1}{3},\ t=z+1$ より, $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$

(2)

直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると，$\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$ より，$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって，
直線の媒介変数表示は $x = 3,\ y = 2 + 2t,\ z = 1 + t$

t を消去した直線の方程式は，$x = 3,\ t = \dfrac{y-2}{2},\ t = z - 1$ より，$x = 3,\ \dfrac{y-2}{2} = z - 1$

145

(1)

直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ より，$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z+1 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

よって，
直線の媒介変数表示は $x = -2 + 3t,\ y = 1 + 2t,\ z = -1 + 3t$

t を消去した直線の方程式は，$t = \dfrac{x+2}{3},\ t = \dfrac{y-1}{2},\ t = \dfrac{z+1}{3}$ より，$\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{3}$

(2)

直線上の任意の点を $P(x, y, z)$ とすると，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ より，$\begin{pmatrix} x \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

よって，
直線の媒介変数表示は $x = t,\ y = 1 + t,\ z = 2 - 3t$

t を消去した直線の方程式は，$t = x,\ t = y - 1,\ t = \dfrac{z-2}{-3}$ より，$x = y - 1 = \dfrac{z-2}{-3}$

146

直線上の任意の点を $P(x, y, z)$，媒介変数を t とすると，$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB}$ より，$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

よって，$(x, y, z) = (1 + t, 1 + 2t, 3 - 2t)$

(1)

xy 平面の方程式は $z = 0$ だから，直線が xy 平面と交わるとき $3 - 2t = 0$　$\therefore t = \dfrac{3}{2}$

ゆえに，交点の座標は $\left(\dfrac{5}{2}, 4, 0\right)$

(2)

yz 平面の方程式は $x=0$ だから，直線が yz 平面と交わるとき $1+t=0$　$\therefore t=-1$

ゆえに，交点の座標は $(0,\ -1,\ 5)$

(3)

zx 平面の方程式は $y=0$ だから，直線が zx 平面と交わるとき $1+2t=0$　$\therefore t=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに，交点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 4\right)$

147

A を通る直線上の任意の点を $P(x,\ y,\ z)$，媒介変数を t とすると，

$\overrightarrow{AP}=t\vec{d}$ より，$\begin{pmatrix} x-4 \\ y-1 \\ z+6 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$　$\therefore (x,\ y,\ z)=(4-t,\ 1+t,\ -6+4t)$

したがって，球面との交点において，

t についての方程式 $(4-t)^2+\{(1+t)-2\}^2+\{(-6+4t)-4\}^2=9$ が成り立つ。

これを解くと，$t=2,\ 3$

ゆえに，求める座標は $(2,\ 3,\ 2),\ (1,\ 4,\ 6)$

148

(1)

2 直線 $l,\ m$ 上の点はそれぞれ，媒介変数を $s,\ t$ とすると，

$(-2-3s,\ 2s,\ 2-6s)$，$(-3+2t,\ -3-t,\ 4t)$ と表せる。

したがって，$l,\ m$ が交わるならば，連立方程式 $\begin{cases} -2-3s=-3+2t \\ 2s=-3-t \\ 2-6s=4t \end{cases}$ が解をもつ。

$\begin{cases} -2-3s=-3+2t \\ 2s=-3-t \\ 2-6s=4t \end{cases}$ の解は $s=-7,\ t=11$ だから，

2 直線 $l,\ m$ は交わり，その交点の座標は $(19,\ -14,\ 44)$

(2)

2 直線 $l,\ m$ 上の点はそれぞれ，媒介変数を $s,\ t$ とすると，

$(-1+3s,\ 2s,\ 1+3s),\ (2+2t,\ 9-t,\ 3t)$ と表せる。

したがって，$l,\ m$ が交わるならば，連立方程式 $\begin{cases} -1+3s=2+2t \\ 2s=9-t \\ 1+3s=3t \end{cases}$ が解をもつ。

この連立方程式は解をもたないから，2 直線 $l,\ m$ は交わらない。