数列 2　等差数列とその和

163

(1)

この等差数列を$\{a_n\}$とすると，初項 100，公差-6の数列より，

$a_n=100+(n-1)\times(-6)\quad \therefore a_n=106-6n$

第x項で初めて負の数になるとすると，$a_x<0$であることが必要だから，

$106-6x<0\quad \therefore x>\dfrac{53}{3}=17+\dfrac{2}{3}$

xはこれを満たす最小の自然数だから，$x=18$

よって，第 18 項

(2)

この等差数列を$\{a_n\}$とすると，初項 5，公差 4 の数列より，

$a_n=5+(n-1)\times 4\quad \therefore a_n=1+4n$

第x項で初めて 100 より大きくなるとすると，$a_x>100$であることが必要だから，

$1+4x>100\quad \therefore x>\dfrac{99}{4}=24+\dfrac{3}{4}$

xはこれを満たす最小の自然数だから，$x=25$

よって，第 25 項

164

(1)

$a_{n+1}-a_n=\{3-4(n+1)\}-(3-4n)=-4$より，

数列$\{a_n\}$は公差が-4の等差数列であり，その初項$a_1=3-4\cdot 1=-1$

(2)

$b_1=a_1$，$b_2=a_4$，$b_3=a_7$，$\cdots$とおくと，$b_n=a_{1+(n-1)\times 3}=a_{3n-2}$

よって，$b_{n+1}-b_n=a_{3(n+1)-2}-a_{3n-2}=a_{3n+1}-a_{3n-2}=3-4(3n+1)-\{3-4(3n-2)\}=-12$

これより，数列$a_1,a_4,a_7,\cdots$は，公差-12，初項$a_1=-1$の等差数列である。

165

数列$\{a_n\}$の初項をa_1，公差をp

数列$\{b_n\}$の初項をb_1，公差をqとすると，

一般項はそれぞれ$a_n=a_1+(n-1)p$，$b_n=b_1+(n-1)q$

(1)

$$\begin{aligned}a_{5(n+1)}-a_{5n}&=a_{5n+5}-a_{5n}\\&=a_1+(5n+4)p-\{a_1+(5n-1)p\}\\&=5p\end{aligned}$$

より，

数列$\{a_{5n}\}$は公差$5p$の等差数列である。

(2)

$$\begin{aligned}(2a_{n+1}-3b_{n+1})-(2a_n-3b_n)&=2(a_{n+1}-a_n)-3(b_{n+1}-b_n)\\&=2p-3q\end{aligned}$$

より，

数列$\{2a_n-3b_n\}$は公差$2p-3q$の等差数列である。

(3)

$$\begin{aligned}(a_{2(n+1)}+b_{3(n+1)})-(a_{2n}+b_{3n})&=(a_{2n+2}-a_{2n})+(b_{3n+3}-b_{3n})\\&=[a_1+(2n+2-1)p-\{a_1+(2n-1)p\}]\\&\qquad+[b_1+(3n+3-1)q-\{b_1+(3n-1)q\}]\\&=2p+3q\end{aligned}$$

より，

数列$\{a_{2n}+b_{3n}\}$は公差$2p+3q$の等差数列である。

166

(1)

3 数を$a-d,a,a+d$とおくと，

条件より

$(a-d)+a+(a+d)=15$　・・・①

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83$　・・・②

①より，$3a=15$　$\therefore a=5$

これと②より，$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=83$　$\therefore d=\pm 2$

よって，$(a-d,a,a+d)=(3,5,7)$，$(7,5,3)$

ゆえに，求める 3 数は$(3,5,7)$

(2)

5 数を$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$とおくと，

条件より

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5$　・・・①

$(a-2d)^2+(a-d)^2+a^2+(a+d)^2+(a+2d)^2=45$　・・・②

①より，$5a=5$　$\therefore a=1$

これと②より，$(1-2d)^2+(1-d)^2+1^2+(1+d)^2+(1+2d)^2=45$　$\therefore d=\pm 2$

よって，$(a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d)=(-3,\ -1,\ 1,3,5)$，$(5,3,1,-1,-3)$

ゆえに，求める 5 数は$(-3,-1,1,3,5)$

167

(1)

条件より，$1, 3, 5, \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \cdots$ は公差 2 の等差数列だから，$\frac{1}{x}=7, \frac{1}{y}=9$　$\therefore x=\frac{1}{7}, y=\frac{1}{9}$

また，この等差数列を$\{a_n\}$とおくと，初項が 1 だから，

一般項は$a_n=1+(n-1)\cdot 2$　$\therefore a_n=2n-1$

ゆえに，求める数列の一般項をb_nとすると，$b_n=\frac{1}{a_n}$より，$b_n=\frac{1}{2n-1}$

(2)

等差数列$1, \frac{1}{x}, 2, \frac{1}{y}, \cdots$のうち，$1, \frac{1}{x}, 2$について，$\frac{1}{x}=\frac{1+2}{2}$より，$\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$　$\therefore x=\frac{2}{3}$

また，この数列の公差$=\frac{1}{x}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$より，$\frac{1}{y}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$　$\therefore y=\frac{2}{5}$

さらに，この等差数列を$\{a_n\}$とおくと，初項が 1 だから，

一般項は$a_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{2}$　$\therefore a_n=\frac{n+1}{2}$

よって，求める数列の一般項をb_nとすると，$b_n=\frac{1}{a_n}$より，$b_n=\frac{2}{n+1}$

168

「等差数列の和＝項の値の平均値×項数」で与えられる。

これと項の値の平均値$=\frac{\text{初項の値＋末項の値}}{2}$より，

等差数列の和$=\frac{\text{初項の値＋末項の値}}{2}\times$項数　となる。

そこで，等差数列を$\{a_n\}$とおくと，$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30$　・・・①

$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10$，$S_{10}=100$ より，$a_1+a_{10}=20$　・・・②

$S_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot 20$，$S_{20}=400$ より，$a_1+a_{20}=40$　・・・③

③－②より，$a_{20}-a_{10}=20$

よって，等差数列の性質より，$a_{30}-a_{20}=a_{20}-a_{10}=20$　$\therefore a_{30}=a_{20}+20$

これと①，③より，

$$S_{30}=\frac{a_1+a_{30}}{2}\cdot 30=\frac{a_1+a_{20}+20}{2}\cdot 30=\frac{40+20}{2}\cdot 30=900$$

169

等差数列を$\{a_n\}$とおくと，初項 32，公差 17 より，$a_n = 32 + (n-1)\cdot 17 \quad \therefore a_n = 15 + 17n$

値が 300 と 500 の間にある項は，$300 < 15 + 17n < 500$ を満たすから $\dfrac{285}{17} < n < \dfrac{485}{17}$

$\therefore 16 + \dfrac{13}{17} < n < 28 + \dfrac{9}{17}$

これより，nは 17 以上 28 以下の自然数であることがわかる。

したがって，a_{17}からa_{28}までの和が求める和であり，その和は

$$\frac{a_{17} + a_{28}}{2} \times \{(28-17)+1\} = \frac{(32+16\cdot 17)+(32+27\cdot 17)}{2} \times 12 = (64 + 43\cdot 17)\times 6 = 4770$$

170

(1)

この等差数列を$\{a_n\}$とおくと，$a_n = 50 + (n-1)\times(-3) \quad \therefore a_n = 53 - 3n$

第x項で初めて負の数となるとすると，$a_x < 0$であることが必要だから，

$53 - 3x < 0 \quad \therefore x > \dfrac{53}{3} = 17 + \dfrac{2}{3}$

xはこれを満たす最小の自然数だから，$x = 18$

よって，第 18 項

(2)

初項から第n項までの和をS_nとすると，

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \\ &= \frac{50 + (53 - 3n)}{2} \times n \\ &= \frac{1}{2}\left(-3n^2 + 103n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{-3\left(n - \frac{103}{6}\right)^2 + \frac{103^2}{12}\right\} \end{aligned}$$

よって，S_nが最大値をとるのは整数nが$\dfrac{103}{6}$に最も近い値をとるときであり，

これは，$\dfrac{103}{6} = 17 + \dfrac{1}{6}$から，$n = 17$のときである。

ゆえに，初項から第 17 項までの和が最大で，その値は$\dfrac{50 + (53 - 3\cdot 17)}{2} \times 17 = 442$

171

(1)

求める和＝3 の倍数の和＋7 の倍数の和－3 と 7 の最小公倍数すなわち 21 の倍数の和

3 の倍数の和

3 の倍数の数列を $\{a_n\}$ とすると，初項 3，公差 3 の等差数列より，

$a_n = 3 + (n-1)\cdot 3 \quad \therefore a_n = 3n$

また，$3n \leq 300$ より，n の最大値は 100

よって，3 で割り切れる数の和＝$\dfrac{3+3\cdot 100}{2}\times 100 = 15150$　・・・①

7 の倍数の和

7 の倍数の数列を $\{b_n\}$ とすると，初項 7，公差 7 の等差数列より，

$b_n = 7 + (n-1)\cdot 7 \quad \therefore b_n = 7n$

また，$7n \leq 300$ より，n の最大値は 42

よって，7 で割り切れる数の和＝$\dfrac{7+7\cdot 42}{2}\times 42 = 6321$　・・・②

21 の倍数の和

21 の倍数の数列を $\{c_n\}$ とすると，初項 21，公差 21 の等差数列より，

$c_n = 21 + (n-1)\cdot 21 \quad \therefore c_n = 21n$

また，$21n \leq 300$ より，n の最大値は 14

よって，21 で割り切れる数の和＝$\dfrac{21+21\cdot 14}{2}\times 14 = 2205$　・・・③

①＋②－③より，

$15150 + 8321 - 2205 = 19266$

(2)

全体集合を U，3 の倍数の集合を A，7 の倍数の集合を B とすると，

3 でも 7 でも割り切れない≡3 の倍数でも 7 の倍数でもない

≡3 の倍数でないかつ 7 の倍数でない

$\equiv \overline{A} \cap \overline{B}$

$\equiv \overline{A \cup B}$

$\equiv U - (A \cup B)$

よって，1 から 300 までの数の和から 3 または 7 の倍数の和を引けばよい。

3 または 7 の倍数の和は，(1)より 25884 だから，

求める値は，$\dfrac{1+300}{2}\times 300 - 19266 = 25884$

172

(1)

この等差数列を$\{a_n\}$，公差をdとすると，$a_n = a_1 + (n-1)d$　・・・①

第 25 項は第 10 項から数えて$25-10+1=16$番目の項だから，

a_{10}を初項としてa_{25}を表すと，$a_{25} = a_{10} + (16-1)\cdot d$となるから，

$392 = 152 + 15d$　$\therefore d = 16$

これと①より，$a_n = a_1 + (n-1)\cdot 16$

$a_{10} = 152$より，$152 = a_1 + (10-1)\cdot 16$　$\therefore a_1 = 8$

よって，$a_n = 8 + (n-1)\cdot 16$　$\therefore a_n = -8 + 16n$

$a_n = 1000$のとき，$-8+16n = 1000$より，$n = 63$　ゆえに，第 63 項

(2)

初項から第n項までの和$=\dfrac{a_1 + a_n}{2}\times n = \dfrac{8+(-8+16n)}{2}\times n = 8n^2$

初項から第x項までの和で初めて 1000 より大きくなるとすると，

$8x^2 > 1000$　$\therefore x^2 > 125$

xはこれを満たす最小の自然数だから，$x = 12$　よって，第 12 項

173

a以上b以下の 5 を分母とするすべての分数（整数を含む）の和から

a以上b以下のすべての整数の和を引けばよい。

a以上b以下の 5 を分母とするすべての分数（整数を含む）の和は，

$$\frac{5a}{5}+\frac{5a+1}{5}+\frac{5a+2}{5}+\cdots\frac{5b-2}{5}+\frac{5b-1}{5}+\frac{5b}{5}=\frac{1}{5}\{5a+(5a+1)+(5a+2)+(5b-2)+(5b-1)+5b\}$$

ここで，$5a+(5a+1)+(5a+2)+(5b-2)+(5b-1)+5b$は等差数列であるから，

項の値の平均値$=\dfrac{5a+5b}{2}$であり，公差が 1 であることから項数$=(5b-5a)+1$

よって，$5a+(5a+1)+(5a+2)+(5b-2)+(5b-1)+5b = \dfrac{5a+5b}{2}\times(5b-5a+1)$

$$\therefore \frac{5a}{5}+\frac{5a+1}{5}+\frac{5a+2}{5}+\cdots\frac{5b-2}{5}+\frac{5b-1}{5}+\frac{5b}{5}=\frac{1}{5}\cdot\frac{5a+5b}{2}\cdot(5b-5a+1)$$

$$=\frac{a+b}{2}\cdot(5b-5a+1)\quad\cdots①$$

同様に，a以上b以下のすべての整数の和は，$\dfrac{a+b}{2}\cdot(b-a+1)$　・・・②

よって，求める和は，①－②より，

$$\frac{a+b}{2}\cdot(5b-5a+1)-\frac{a+b}{2}\cdot(b-a+1)=\frac{a+b}{2}(4b-4a)=2(b^2-a^2)$$

174

$$S_m=\frac{a+\{a+(m-1)d\}}{2}\cdot m$$
$$=\frac{(2a-d)m+dm^2}{2}$$

$$S_n=\frac{a+\{a+(n-1)d\}}{2}\cdot n$$
$$=\frac{(2a-d)n+dn^2}{2}$$

$$\therefore S_m-S_n=\frac{(2a-d)m+dm^2}{2}-\frac{(2a-d)n+dn^2}{2}$$
$$=\frac{(2a-d)(m-n)+d(m-n)(m+n)}{2}$$
$$=\frac{(m-n)\{2a-d+d(m+n)\}}{2}$$

これと $S_m-S_n=0$， $m\neq n$ より， $2a-d+d(m+n)=0$

$$\therefore S_{m+n}=\frac{\{a+a+(m+n-1)d\}}{2}\cdot(m+n)$$
$$=\frac{2a-d+(m+n)d}{2}\cdot(m+n)$$
$$=\frac{0}{2}\cdot(m+n)$$
$$=0$$

175

共通な項を $a_p=b_q$ とすると，

$a_p=2+(p-1)\cdot 3=3p-1$， $b_q=4+(q-1)\cdot 5=5q-1$ より， $3p=5q$

3 と 5 は互いに素だから， $p=5k$， $q=3k$ （$k=1, 2, 3, \cdots$） と表せる。

これより，

数列 $\{c_n\}$ は， $a_5=b_3=14$ を初項，5 と 3 の最小公倍数 15 を公差とする等差数列である。

よって， $c_n=14+(n-1)\cdot 15=15n-1$

あるいは,

$p=5k$ より， $c_k=a_{5k}=b_{3k}$ $\quad\therefore c_n=a_{5n}=b_{3n}$

数列 $\{a_{5n}\}$ は，初項 $a_5=14$，公差 15 の等差数列だから，

$c_n=a_{5n}=14+(n-1)\cdot 15=15n-1$