数列 3　等比数列とその和

184

a は等差数列 $8,\ a,\ b$ の中項だから，$2a=b+8$　$\therefore b=2a-8$　・・・①

b は等比数列 $a,\ b,\ 36$ の中項だから，$b^2=36a$　・・・②

①，②より，$(2a-8)^2=36a$　$\therefore 4(a-1)(a-16)=0$

これと①から，$(a,\ b)=(1,\ -6),\ (16,\ 24)$

185

公比を r，等比中項を a とすると，3 つの実数は $\dfrac{a}{r},\ a,\ ar$　・・・①　と表せる。

それらの積が 216 だから，$\dfrac{a}{r}\cdot a\cdot ar=216$ より，$a^3=216$　$\therefore a=6$　・・・②

それらの和が 19 であることと②より，$\dfrac{6}{r}+6+6r=19$　$\therefore \dfrac{(3r-2)(2r-3)}{r}=0$

ゆえに，$r=\dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2}$ であり，①，②より，3 つの実数はいずれの r でも $4,\ 6,\ 9$

186

等差数列と仮定すると，その一般項は $4(n-1)+2=4n-2$ と表せる。

すると，$4n-2=954$ より，$n=239$

よって，954 はこの等差数列の第 239 項である。

等比数列と仮定すると，その一般項は $2\cdot 4^{n-1}$ と表せる。

すると，$2\cdot 4^{n-1}=954$ より，$4^{n-1}=477$

ところが左辺は偶数，右辺は奇数だから，等号は成立しない。

これは仮定と矛盾する。よって，等比数列ではない。

以上より，この数列は等差数列であるが等比数列ではない。

187

$$\begin{aligned}\log_2 a_n &= -1\cdot(n-1)+2\\ &= -n+3\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}a_n &= 2^{-n++3}\\ &= 2^{-(n-1)+2}\\ &= 4\cdot\left(2^{-1}\right)^{n-1}\\ &= 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

よって，数列 $\{a_n\}$ は初項 4，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。

188

数列$\{a_n\}$の公差をd，数列$\{b_n\}$の公比をrとすると，

$a_n=1+(n-1)d$，$b_n=2r^{n-1}$より，$c_n=1+(n-1)d+2r^{n-1}$

これと$c_2=6,\ c_3=11,\ c_4=20$より，

$1+d+2r=6 \quad \therefore d+2r=5$ ・・・①

$1+2d+2r^2=11 \quad \therefore d+r^2=5$ ・・・②

$1+3d+2r^3=20 \quad \therefore 3d+2r^3=19$ ・・・③

よって，①，②，③の連立方程式の解を求めることで，数列$\{c_n\}$の一般項が得られる。

そこで，まず①と②の連立方程式の解を求めると，

②－①より，$r^2-2r=0 \quad \therefore r(r-2)=0$

$r\neq 0$より，$r=2$

これと①より，$d=1$

これらは③を満たすから，①，②，③の連立方程式の解は$d=1,\ r=2$である。

よって，$c_n=2^n+n$

189

ポイント：公比rの等比数列$\{a_n\}$の第m項から第n項までの和は，$\dfrac{a_m-a_{n+1}}{1-r}$

(1)

等比数列を$\{a_n\}$とすると，$a_n=a_1\cdot(-2)^{n-1}$

初項から第 10 項までの和は$\dfrac{a_1-a_{11}}{1-(-2)}$で与えられるから，

$$\frac{a_1-a_{11}}{1-(-2)}=\frac{a_1-a_1(-2)^{10}}{3}$$
$$=\frac{-1023a_1}{3}$$

よって，$\dfrac{-1023a_1}{3}=-1023 \quad \therefore a_1=3$

(2)

等比数列を$\{a_n\}$の公比をrとすると，$a_n=a_1r^{n-1}$

条件より，$a_1r=6$ ・・・① $a_1+a_1r+a_1r^2=21$ ・・・②

$\dfrac{②}{①}$より，$\dfrac{1+r+r^2}{r}=\dfrac{7}{2}$

両辺を$2r$倍し，整理すると，$(2r-1)(r-2)=0 \quad \therefore r=\dfrac{1}{2},\ 2$

これと①より，$(a_1,\ r)=\left(12,\ \dfrac{1}{2}\right),\ (3,\ 2)$

解説

等比数列の和の公式とその導き方

等比数列$a_n = ar^{n-1}$の初項から第n項までの和をS_nとすると，

$$S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

あるいは

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

導き方 **1**：階差数列を利用

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^{k-1}(r-1)}{r-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^k - ar^{k-1}}{r-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{r-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k - a_{k+1}}{1-r}\\ &= \frac{1}{1-r}\{(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-a_{n+1})\}\\ &= \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}\end{aligned}$$

導き方 **2**：級数（数列の和）を利用

$$\begin{aligned}S_n - rS_n &= (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ar^3 \cdots + ar^{n-1} + ar^n)\\ &= a - ar^n\\ &= a_1 - a_{n+1}\end{aligned}$$

$$\therefore (1-r)S_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$\therefore S_n = \frac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$$

$\boldsymbol{S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}}$ **は，** $\boldsymbol{S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}}$ **より使い勝手が良い**

$S_n = \dfrac{a_1 - a_{n+1}}{1-r}$ が意味するのは，

「等比数列の第 1 項から第 n 項までの和は，$\dfrac{\text{第1項の値} - \text{第}(n+1)\text{項の値}}{1-r}$ で与えられる」

ということだから，

等比数列の第 x 項から第 y 項までの和を求める際に，即座に $\dfrac{a_x - a_{y+1}}{1-r}$ と反応できる。

実際，第 x 項から第 y 項までの和は，
「初項から第 y 項までの和 S_y －初項から第 $(x-1)$ 項までの和 S_{x-1}」だから，

それで確かめてみると，

$$\begin{aligned} S_y - S_{x-1} &= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_{(x-1)+1}}{1-r} \\ &= \frac{a_1 - a_{y+1}}{1-r} - \frac{a_1 - a_x}{1-r} \\ &= \frac{a_x - a_{y+1}}{1-r} \end{aligned}$$

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ の公式の場合，

$1-r^n$ の 1 は，第 1 項の $r^0 = 1$ の意味であるが，その意味が見えにくくなっているため，
上のように，即座に反応しにくい。

$S_n = \dfrac{a(r^0 - r^n)}{1-r}$ としても，つらいかな・・・。

190

等比数列を$\{a_n\}$，公比をrとすると，

(1) 略解

$a_1+a_1r=-2$ ・・・①

$a_1r^2+a_1r^3=-8$ ・・・②

$\dfrac{②}{①}$より，$\dfrac{r^2(1+r)}{1+r}=4$ $\therefore r=\pm 2$

これと①より，$(a_1,\ r)=\left(-\dfrac{2}{3},\ 2\right),\ (2,\ -2)$

(2) 略解

$a_1(1+r+r^2)=3$ ・・・①

$a_1(r^3+r^4+r^5)=-24$ ・・・②

$\dfrac{②}{①}$より，$\dfrac{r^3(1+r+r^2)}{1+r+r^2}=-8$ $\therefore r=-2$

これと①より，$a_1=1$

以上より，$(a_1,\ r)=(1,\ -2)$

191

数列を$\{a_n\}$とすると，$a_n=3^{n-1}$

よって，初めて 100 より大きくなるnは$3^{n-1}>100$を満たす最小の自然数であり，

$3^4<100<3^5$より，$n-1=5$ $\therefore n=6$

ゆえに，数列$\{a_n\}$が初めて 100 より大きくなるのは第 6 項である。

数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和をS_nとすると，$S_n=\dfrac{3^n-1}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

よって，S_nが初めて 1000 より大きくなるnは$\dfrac{1}{2}(3^n-1)>1000$を，

すなわち$3^n>2001$を満たす最小の自然数であり，$3^6<2001<3^7$より，$n=7$

ゆえに，初項から第n項までの和が初めて 1000 より大きくなるのは第 7 項である。

192

初項から第n項までの和をS_nとすると，$S_n=\dfrac{2\cdot 3^n-2}{3-1}=3^n-1$

よって，$3^n-1>10000$より，$3^n>10001$ $\therefore 3^n>10000$

ここで，$3^n>10000$について，10 を底とする対数をとると，

$n\log_{10}3>4$より，$n>\dfrac{4}{0.4771}\approx 8.38$

よって，$3^n>10000$を満たす最小の自然数nは 9 であり，

これと$3^8<10001<3^9$より，初項から第 9 項までの和が初めて 10000 より大きくなる。

193

(1)

$$1+3+3^2+\cdots+3^7=\frac{3^{7+1}-1}{3-1}=\frac{3^8-1}{2}=3280$$

(2)

$$\begin{aligned}(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+7+7^2+7^3)&=\frac{3^{4+1}-1}{3-1}\cdot\frac{7^{3+1}-1}{7-1}\\&=121\cdot 400\\&=48400\end{aligned}$$

(3)

$864=2^5\cdot 3^3$ だから,

$$\begin{aligned}(1+2+2^2+\cdots+2^5)(1+3+3^2+3^3)&=\frac{2^{5+1}-1}{2-1}\cdot\frac{3^{3+1}-1}{3-1}\\&=63\cdot 40\\&=2520\end{aligned}$$

194

$$S=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2^{(n-1)+1}-1}{2-1}=2^n-1\quad \therefore S^n=(2^n-1)^n$$

$$P=1\cdot 2\cdot 2^2\cdot\cdots\cdot 2^{n-1}=1\cdot 2^{\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}\quad \therefore P^2=2^{n(n-1)}$$

$$T=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\quad \therefore T^n=2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore P^2T^n&=2^{n(n-1)}2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n\\&=2^{n^2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n\\&=(2^n)^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)^n\\&=\left\{2^n\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right\}^n\\&=(2^n-1)^n\\&=S^n\end{aligned}$$

195

等差数列の公差を d とすると， $u=a+d,\ w=a+3d,\ b=a+4d$

ただし， $0<a<b$ より， $d>0$

等比数列の公比を r とすると， $x=ar,\ z=ar^3,\ b=ar^4$

ただし， $0<a<b$ より， $r>1$

また，これより， $a+4d=ar^4$

(1)

$$
\begin{aligned}
uw-xz&=(a+d)(a+3d)-ar\cdot ar^3\\
&=a^2+4ad+3d^2-a^2r^4\\
&=a^2+4ad+3d^2-a\cdot ar^4\\
&=a^2+4ad+3d^2-a(a+4d)\\
&=3d^2\\
&>0\ \ (\because d>0)
\end{aligned}
$$

よって， $uw>xz$

(2)

$$
\begin{aligned}
u+w-(x+z)&=a+d+a+3d-(ar+ar^3)\\
&=a+a+4d-(ar+ar^3)\\
&=a+ar^4-ar-ar^3\\
&=a(r^4-r^3-r+1)\\
&=a\{r^3(r-1)-(r-1)\}\\
&=a(r-1)(r^3-1)\\
&>0\ \ (\because a>0,\ r>1)
\end{aligned}
$$

196

第 1 年度末は $10000\cdot1.006=10060$ 円だから，

第 n 年度末には $10060\cdot1.006^{n-1}$ 円になる。

よって，

$$
\begin{aligned}
&10060+10060\cdot1.006+10060\cdot1.006^2+\cdots+10060\cdot1.006^9\\
&=\frac{10060\cdot1.006^{10}-10060}{1.006-1}\\
&=\frac{10060(1.006^{10}-1)}{0.006}\\
&=\frac{10060(1.0616-1)}{0.006}\\
&=\frac{10060\cdot0.0616}{0.006}\\
&\approx103282
\end{aligned}
$$

ゆえに，103282 円

197

$p=1.07$，$a=10^6$ 円，年末の返済金額を x 円とすると，

2012 年 12 月 31 日の返済後の借金残高は $pa-x$

2013 年 12 月 31 日の返済後の借金残高は $p(pa-x)-x=p^2a-px-x$

2014 年 12 月 31 日の返済後の借金残高は $p(p^2a-px-x)-x=p^3a-p^2x-px-x$

2014 年 12 月 31 日の返済後の借金残高は 0 だから，

$p^3a-p^2x-px-x=0$ より，$p^3a=(1+p+p^2)x$　$\therefore p^3a=\dfrac{p^3-1}{p-1}\cdot x$

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{p^3(p-1)a}{p^3-1}\\
&=\frac{1.07^3(1.07-1)\cdot 10^6}{1.07^3-1}\\
&=\frac{1.225\cdot 0.07\cdot 10^6}{1.225-1}\\
&=\frac{1.225\cdot 7\cdot 10^4}{0.225}\\
&=\frac{1225\cdot 7\cdot 10^4}{225}\\
&=\frac{49\cdot 7\cdot 10^4}{9}\\
&\approx 381111.1\\
&\approx 381112
\end{aligned}
$$

結局，$p^3a=(1+p+p^2)x$ より，

借りた金の 3 年後の元利合計＝毎年年末に x 円ずつ年利率 p の複利で 3 年積み立てた金額