

数列 4 和の記号 Σ

数列 5 階差数列

207

(1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m (12k - 6) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left\{ 12 \cdot \frac{m(m+1)}{2} - 6m \right\} \\
 &= \sum_{m=1}^n 6m^2 \\
 &= 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= n(n+1)(2n+1)
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l k \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \frac{l(l+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m (l^2 + l) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n \left\{ \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{m=1}^n (m^3 + 3m^2 + 2m) \\
 &= \frac{1}{6} \left[\left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)\{n(n+1) + 2(2n+1) + 4\}}{4} \\
 &= \frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{24} \\
 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}
 \end{aligned}$$

208

(1)

第 k 項

$k^2 + k(k+1) + (k+1)^2$ を展開し, k について整理することにより, $3k^2 + 3k + 1$
初項から第 n 項までの和

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1) &= 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n\{(n+1)(2n+1) + 3(n+1) + 2\}}{2} \\ &= n(n^2 + 3n + 3)\end{aligned}$$

(2)

第 k 項

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^k (2m-1)^2 &= \sum_{m=1}^k (4m^2 - 4m + 1) \\ &= 4 \cdot \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} - 4 \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k \\ &= \frac{1}{3}(4k^3 - k)\end{aligned}$$

初項から第 n 項までの和

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (4k^3 - k) &= \frac{1}{3} \left[4 \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{n(n+1)}{2} \right] \\ &= \frac{n(n+1)(2n^2 + 2n - 1)}{6}\end{aligned}$$

209

(1)

第 k 項は $(2k-1)\{n-(k-1)\}$ と表せるから,

求める数列の和は初項から第 n 項までの和であり,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (2k-1)\{n-(k-1)\} &= \sum_{k=1}^n \{-2k^2 + (2n+3)k - (n+1)\} \\ &= -2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+3) \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

(2)

第 k 項は $k^2\{n-(k-1)\}$ と表せるから,

求める数列の和は初項から第 n 項までの和であり,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n [k^2\{n-(k-1)\}] &= \sum_{k=1}^n \{-k^3 + (n+1)k^2\} \\ &= -\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + (n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}\end{aligned}$$

210

(1)

一般項

与えられた数列を $\{a_n\}$, その階差数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$b_1 = 4 - 0 = 4, b_2 = 18 - 4 = 14, b_3 = 48 - 18 = 30, b_4 = 100 - 48 = 52, b_5 = 180 - 100 = 80, \\ b_6 = 294 - 180 = 114$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると,

$$c_1 = 14 - 4 = 10, c_2 = 30 - 14 = 16, c_3 = 52 - 30 = 22, c_4 = 80 - 52 = 28, c_5 = 114 - 80 = 34$$

これより, 数列 $\{c_n\}$ は初項 10, 公差 6 の等差数列だから, $c_n = 10 + 6(n-1) = 6n + 4$ よって, $n \geq 2$ のとき,

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 4) \\ = 4 + 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 4(n-1) \\ = 3n^2 + n$$

これは $b_1 = 4$ を満たすから,これより, $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + k) \\ = 3 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\ = n^2(n-1)$$

これは $a_1 = 0$ を満たす。ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = n^2(n-1)$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k^2(k-1) \\ = \sum_{k=1}^n (k^3 - k^2) \\ = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}$$

(2)

一般項

与えられた数列を $\{a_n\}$, その階差数列を $\{b_n\}$ とすると,

$$b_1 = 24 - 6 = 18, b_2 = 60 - 24 = 36, b_3 = 120 - 60 = 60, b_4 = 210 - 120 = 90, b_5 = 336 - 210 = 126, \\ b_6 = 504 - 336 = 168$$

数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とすると,

$$c_1 = 36 - 18 = 18, c_2 = 60 - 36 = 24, c_3 = 90 - 60 = 30, c_4 = 126 - 90 = 36, c_5 = 168 - 126 = 42$$

これより, 数列 $\{c_n\}$ は初項 18, 公差 6 の等差数列であるから,

$$\text{その一般項は } c_n = 18 + 6(n-1) = 6n + 12$$

よって, $n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = 18 + \sum_{k=1}^{n-1} (6k + 12) \\ = 18 + 6 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 12(n-1) \\ = 3n^2 + 9n + 6$$

これは $b_1 = 18$ を満たすから,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ = 6 + \sum_{k=1}^{n-1} (3k^2 + 9k + 6) \\ = 6 + 3 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 9 \cdot \frac{(n-1)n}{2} + 6(n-1) \\ = n(n+1)(n+2)$$

これは $a_1 = 6$ を満たす。ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = n(n+1)(n+2)$ 初項から第 n 項までの和

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2)\} \\ = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ = \frac{1}{4} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0) + (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \cdots + \{n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)\} \\ = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

補足：連続する整数の積の和を差分分解で求める方法

例： $\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2)$ を差分分解で求める

$$k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2)(k+3) - (k-1)k(k+1)(k+2)\} \\ &= \frac{1}{4} (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 0) + (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + \cdots + \{n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)\} \\ &= \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

211

$$S_n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = n(n+1) \text{ とすると,}$$

$n=1$ のとき

$$S_n = n(n+1) \text{ より, } a_1 = S_1 = 2$$

$n \geq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} na_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n(n+1) - (n-1)n \\ &= 2n \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2$$

これは $a_1 = 2$ を満たす。

よって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 2$

ゆえに、 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2n$