

数列 6 いろいろな数列の和

212

(1)

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(3k+1) - (3k-2)}{(3k-2)(3k+1)} \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\
&= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) \\
&= \frac{n}{3n+1}
\end{aligned}$$

(2)

 $n=1$ のとき

$$S = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$

 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{(k+2) - k}{k(k+2)} \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \text{ の項は } n \geq 2 \text{ で定義される。} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&\qquad \qquad \qquad \downarrow \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

これに $n=1$ を代入すると, $S = \frac{1}{3}$ となり, $n=1$ のときの S と一致する。

$$\text{以上より, } S = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

補足

縦書にすれば $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+2}$ が残ることが一目瞭然

項		
1	1	$-\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{5}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-2$	$\frac{1}{n-2}$	$-\frac{1}{n}$
$n-1$	$\frac{1}{n-1}$	$-\frac{1}{n+1}$
n	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n+2}$

213

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+3}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k+2}} \cdot \frac{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}}{\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+3} - \sqrt{k+2}) \\
 &= (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) + \cdots + (\sqrt{n+3} - \sqrt{n+2}) \\
 &= \sqrt{n+3} - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

214

(1)

数列の一般項は,

$$\begin{aligned}
 \frac{2n+1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2} &= \frac{2n+1}{\sum_{k=1}^n k^2} \\
 &= \frac{2n+1}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\
 &= \frac{6}{n(n+1)} \\
 &= 6 \cdot \frac{(n+1) - n}{n(n+1)} \\
 &= 6 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} = \frac{6n}{n+1}$$

(2)

数列の一般項は,

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

$$\text{よって, } \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

215

(1)

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 5 \cdot 5^4 + \cdots + n \cdot 5^{n-1}$$

$$5S = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + \cdots + (n-1)5^{n-1} + n \cdot 5^n$$

より,

$$S - 5S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + 5^4 + \cdots + 5^{n-1} - n \cdot 5^n$$

$$= \sum_{k=1}^n 5^{k-1} - n \cdot 5^n$$

$$= \frac{5^n - 1}{5 - 1} - n \cdot 5^n$$

$$= \frac{-(4n-1)5^n + 1}{4}$$

$$\therefore S = \frac{(4n-1) \cdot 5^n + 1}{16}$$

(2)

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{n}{3^{n-1}}$$

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^{n-1}} + \frac{n}{3^n}$$

より,

$$S - \frac{1}{3}S = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{n}{3^n}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - \frac{n}{3^n}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n}$$

$$= \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{2 \cdot 3^n}$$

$$\therefore S = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{4 \cdot 3^{n-1}}$$

(3)

 $x=0$ のとき

$$S = 1$$

 $x=1$ のとき

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n (3k-2) \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 2n \\ &= \frac{n(3n-1)}{2} \end{aligned}$$

 $x \neq 0$ かつ $x \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S - xS &= 1 + 3x + 3x^2 + 3x^3 + \cdots + 3x^{n-1} - (3n-2)x^n \\ &= 3(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1}) - 2 - (3n-2)x^n \\ &= 3 \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} - 2 - (3n-2)x^n \\ &= \frac{-1 - 2x + (3n+1)x^n - (3n-2)x^{n+1}}{x-1} \end{aligned}$$

$$\therefore S = \frac{1 + 2x - (3n-1)x^n + (3n-2)x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

これに $x=0$ を代入すると $S=1$ となるから、これは $x=0$ のときも成り立つ。

以上より、

$x=1$ のとき

$$S = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$x \neq 1$ のとき

$$S = \frac{1+2x-(3n-1)x^n + (3n-2)x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

216

(1)

第 $n-1$ 群の末項は第 1 群の初項から数えて $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{2^{\{(n-1)-1\}+1} - 1}{2-1} = 2^{n-1} - 1$ 番目の項だから、

第 n 群の初項は第 1 群の初項から数えて $(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^{n-1}$ 番目の項である。

これと第 1 群の初項から数えて m 番目の項の値が m であることから、

第 n 群の最初の自然数は 2^{n-1}

(2)

500 は第 1 群の初項から数えて 500 番目の項である。

したがって、第 1 群の初項から数えて 500 番目の項が第 n 群に属するとき、

$$2^{n-1} \leq 500 < 2^n \text{ より, } n=9$$

よって、第 1 群の初項から数えて 500 番目の項は第 9 群に属する。

第 9 群の初項は第 1 群の初項から数えて $2^{9-1} = 256$ 番目の項だから、

第 1 群の初項から数えて 500 番目の項は第 9 群の $500 - 256 + 1 = 245$ 番目の項、

すなわち第 245 項である。

(3)

第 n 群の初項は第 1 群の初項から数えて 2^{n-1} 番目の項だから、その値は 2^{n-1}

第 n 群の末項は第 1 群の初項から数えて $2^n - 1$ 番目の項だから、その値は $2^n - 1$

これと数列は公差 1 の等差数列であり、第 n 群の項数が 2^{n-1} であることから、

$$\text{第 } n \text{ 群に属する数の総和は } \frac{2^{n-1} + 2^n - 1}{2} \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} (3 \cdot 2^{n-1} - 1)$$

217

与えられた数列を各群の初項の値が 1 となる群数列にすると,

$1 \mid 1, 4 \mid 1, 4, 9 \mid 1, 4, 9, 16 \mid 1, 4, 9, 16, 25 \mid 1, \dots$ より,

$1^2 \mid 1^2, 2^2 \mid 1^2, 2^2, 3^2 \mid 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \mid 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2 \mid 1^2, \dots$

第 n 群の項数は n だから,

第 n 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ 番目の項である。

また, これより, 第 $n+1$ 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ 番目の項である。

与えられた数列の項は第 1 群の初項から数えて 100 番目の項だから,

これが第 n 群に属するとすると,

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 \leq 100 < \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ より, } n(n-1) \leq 198 < n(n+1) \quad \therefore n = 14$$

ゆえに, 初項から数えて 100 番目の項, すなわち与えられた数列の第 100 項は

第 14 群に属し, 第 14 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\frac{14 \cdot 13}{2} + 1 = 92$ 番目の項だから,

第 14 群の初項から数えて $100 - 92 + 1 = 9$ 番目の項である。

これと, 第 n 群の数列は $1, 2^2, 3^2, \dots, k^2, \dots, n^2$ で与えられることから,

与えられた数列の第 100 項は $9^2 = 81 \quad \dots \text{(答)}$

$$\text{第 } n \text{ 群の数列の和は } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

よって, 第 13 群までの数列の総和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{13} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{13} (2k^3 + 3k^2 + k) \\ &= \frac{1}{6} \left\{ 2 \cdot \left(\frac{13 \cdot 14}{2} \right)^2 + 3 \cdot \frac{13(13+1)(2 \cdot 13+1)}{6} + \frac{13 \cdot 14}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{6} (13^2 \cdot 14 \cdot 7 + 13 \cdot 7 \cdot 27 + 13 \cdot 7) \\ &= \frac{13 \cdot 7(13 \cdot 14 + 27 + 1)}{6} \\ &= 3185 \end{aligned}$$

$$\text{これと第 14 群の初項から第 9 項までの和} = \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{9(9+1)(2 \cdot 9+1)}{6} = 285 \text{ より,}$$

求める数列の和は $3185 + 285 = 3470 \quad \dots \text{(答)}$

218

与えられた数列と分母の値が等しい群に分けると、

$$\frac{1}{2} \left| \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right| \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right| \left| \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right| \left| \frac{1}{6}, \dots \right|$$

第 n 群の項数は n だから、

第 n 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\sum_{k=1}^{n-1} k + 1 = \frac{n(n-1)}{2} + 1$ 番目の項である。

また、これより、第 $n+1$ 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ 番目の項である。

与えられた数列の項は第 1 群の初項から数えて 800 番目の項だから、

これが第 n 群に属するとすると、

$$\frac{n(n-1)}{2} + 1 \leq 800 < \frac{n(n+1)}{2} + 1 \text{ より, } n(n-1) \leq 1598 < n(n+1) \quad \therefore n = 40$$

ゆえに、初項から数えて 800 番目の項、すなわち与えられた数列の第 800 項は

第 40 群に属し、第 40 群の初項は第 1 群の初項から数えて $\frac{40 \cdot 39}{2} + 1 = 781$ 番目の項だから、

第 40 群の初項から数えて $800 - 781 + 1 = 20$ 番目の項である。

第 n 群の数列は $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \dots, \frac{k}{n+1}, \dots, \frac{n}{n+1}$ で与えられることから

$$\text{第 40 群の初項から第 20 項までの和は } \frac{1}{41} + \frac{2}{41} + \dots + \frac{20}{41} = \frac{\frac{1}{41} + \frac{20}{41}}{2} \cdot 20 = \frac{210}{41}$$

また、第 n 群の数列の和は

$$\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} (1 + 2 + \dots + n) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\text{よって、第 39 群までの数列の総和は } \sum_{k=1}^{39} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{39} k = \frac{1}{2} \cdot \frac{39 \cdot (39+1)}{2} = 390$$

$$\text{ゆえに、初項から第 800 項までの和は } \frac{210}{41} + 390 = \frac{16200}{41}$$

219

(1)

下表の黄色で塗りつぶした部分の数字の総和 $= (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$

	1	2	3	...	n
1	1^2	$1 \cdot 2$	$1 \cdot 3$	...	$1 \cdot n$
2	$2 \cdot 1$	2^2	$2 \cdot 3$	...	$2 \cdot n$
3	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 2$	3^2	...	$3 \cdot n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n	$n \cdot 1$	$n \cdot 2$	$n \cdot 3$	...	n^2

表の右下向き対角線上の数は k^2 ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) であり、
 同じ組み合わせの異なる 2 項の積がその対角線について対称の位置に分布するから、
 異なる 2 項の積の和を S とすると、

$$\begin{aligned}
 2S &= (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \\
 &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12} \\
 \therefore S &= \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}
 \end{aligned}$$

(2)

異なる 2 つの項の積の和から互いに隣り合う 2 つの項の和を除けばよい。
 互いに隣り合う 2 つの項の積の和は

$$\begin{aligned}
 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1) \cdot n &= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + k) \\
 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\
 &= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}
 \end{aligned}$$

よって、互いに隣り合わない 2 つの項の積の和は

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24} - \frac{n(n-1)(n+1)}{3} = \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{8}$$

220

(1)

$$1 \cdot x^{n-1} + 2 \cdot x^{n-1} + \cdots + n \cdot x^{n-1} = (1 + 2 + \cdots + n)x^{n-1} = \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1} \text{ より, } \frac{n(n+1)}{2}$$

(2)

2 個の因数の定数項の積の和より,

$$\frac{(1+2+\cdots+n)^2 - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{2} = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}$$

補足

219(1)と同じ

221

2 点 $(3n, 0)$, $(0, n)$ を通る直線の方程式は $\frac{x}{3n} + \frac{y}{n} = 1$ より, $x = 3n - 3y$

よって, $y = k$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 上の格子点の数は,

$$0 \leq x \leq 3n - 3k \text{ より, } 3n - 3k + 1$$

ゆえに, 格子点の総数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (3n - 3k + 1) &= 3n + 1 + \sum_{k=1}^n \{(3n + 1) - 3k\} \\ &= 3n + 1 + (3n + 1)n - \frac{3n(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \end{aligned}$$