数列 7　漸化式と数列

226

(1)

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+1$ より，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$

これは数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$が公差 1 の等差数列であることを示している。

これと $\dfrac{1}{a_1}=1$ より，$\dfrac{1}{a_n}=1+(n-1)\cdot 1$　　$\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$

(2)

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=3\cdot\dfrac{1}{a_n}+2$　　・・・①

ここで，漸化式が　$b_{n+1}=3b_n+2$　　・・・②　の数列$\{b_n\}$を仮定すると，

①－②より，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-b_{n+1}=3\cdot\dfrac{1}{a_n}-3b_n$　　・・・③

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}=3\cdot\dfrac{1}{a_n}+b_{n+1}-3b_n$　　・・・④

①，④より，$b_{n+1}-3b_n=2$

ここで，$b_{n+1}=b_n=\alpha$ とすると，$-2\alpha=2$　　$\therefore b_{n+1}=b_n=\alpha=-1$

これを③に代入し，整理すると，$\dfrac{1}{a_{n+1}}+1=3\left(\dfrac{1}{a_n}+1\right)$となるから，

数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$は公比 3 の等比数列であり，その初項は$\dfrac{1}{a_1}+1=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}+1=3$

よって，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}+1\right\}$の一般項は$\dfrac{1}{a_n}+1=3^{n-1}\cdot 3$　　$\therefore a_n=\dfrac{1}{3^n-1}$

補足

$a_{n+1}=pa_n+q$（q は定数）型の漸化式の解き方

$a_n-\alpha=p(a_n-\alpha)$（α は$\alpha=p\alpha+q$ の解）より，$a_n=p^{n-1}(a_1-\alpha)+\alpha$

227

(1)

漸化式の両辺を2^{n+1}で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+2$より，$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=2$

これより，数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$が公差 2 の等差数列であり，その初項は$\dfrac{a_1}{2}=5$である。

よって，$\dfrac{a_n}{2^n}=5+(n-1)\cdot 2 \quad \therefore a_n=(2n+3)\cdot 2^n$

(2)

解法 1

漸化式の両辺を3^{n+1}で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+1$ ・・・①

ここで，漸化式が $b_{n+1}=2b_n+1$ ・・・② の数列$\{b_n\}$を仮定すると，

①－②より， $\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-b_{n+1}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}-2b_n$ ・・・③

$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=2\cdot\dfrac{a_n}{3^n}+b_{n+1}-2b_n$ ・・・④

①，④より，$b_{n+1}-2b_n=1$

ここで，$b_{n+1}=b_n=\alpha$とすると，$-\alpha=1 \quad \therefore b_{n+1}=b_n=-1$

これを③に代入し，整理すると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}+1=2\cdot\left(\dfrac{a_n}{3^n}+1\right)$

よって，数列$\left\{\dfrac{a_n}{3^n}+1\right\}$は公比 2，初項$\dfrac{a_1}{3}+1=2$の等比数列である。

ゆえに，$\dfrac{a_n}{3^n}+1=2\cdot 2^{n-1}$，すなわち$a_n=3^n\left(2^n-1\right)$

解法 2

$a_{n+1}=6a_n+3^{n+1}$ ・・・①
ここで，漸化式が $b_{n+1}=6b_n+3^{n+1}$ ・・・② の数列$\{b_n\}$を仮定すると，
①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=6a_n-6b_n$ ・・・③
$\therefore a_{n+1}=6a_n+b_{n+1}-6b_n$ ・・・④
①，④より，$b_{n+1}-6b_n=3^{n+1}$

ここで，$b_n=p\cdot 3^{n+1}$とすると，$p\cdot 3^{n+2}-6p\cdot 3^{n+1}=3^{n+1}$より，$p=-\dfrac{1}{3} \quad \therefore b_n=-3^n$

これを③に代入し，整理すると，$a_{n+1}+3^{n+1}=6\left(a_n+3^n\right)$
これより，数列$\{a_n+3^n\}$は公比 6 の等比数列であり，その初項は$a_1+3=6$である。
よって，$a_n+3^n=6\cdot 6^{n-1} \quad \therefore a_n=6^n-3^n$

228

解法 1

$a_{n+2}=3a_{n+1}+4(n+1)$　・・・①

$a_{n+1}=3a_n+4n$　・・・②

①−②より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+4$

$a_{n+1}-a_n$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから，これを $\{b_n\}$ とすると，

$b_{n+1}=3b_n+4$ より，$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$

（特性方程式 $\alpha=3\alpha+4$ を解くと，$\alpha=-2$ より，$b_{n+1}+2=3(b_n+2)$）

これより，数列 $\{b_n+2\}$ は公比 3 の等比数列であり，

その初項は

$$\begin{aligned}b_1+2&=a_2-a_1+2\\&=(3a_1+4)-a_1+2\\&=2a_1+6=8\end{aligned}$$

だから，$b_n+2=8\cdot 3^{n-1}$　$\therefore b_n=8\cdot 3^{n-1}-2$

ゆえに，

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(8\cdot 3^{n-1}-2\right)\\&=1+\frac{8\cdot 3^{n-1}-8\cdot 3^0}{3-1}-2(n-1)\\&=4\cdot 3^{n-1}-2n-1\end{aligned}$$

解法 2

$a_{n+1}=3a_n+4n$　・・・①

ここで，漸化式が　$b_{n+1}=3b_n+4n$　・・・②　の数列 $\{b_n\}$ を仮定すると，

①−②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-3b_n$　・・・③

$\therefore a_{n+1}=3a_n+b_{n+1}-3b_n$　・・・④

①，④より，$b_{n+1}-3b_n=4n$

ここで，$b_n=pn+q$ とすると，$p(n+1)+q-3(pn+q)=4n$　$\therefore -2pn+p-2q=4n$

これは n についての恒等式だから，$p=-2,\ q=-1$

ゆえに，$b_n=-2n-1$

これを③に代入し，整理すると，$a_{n+1}+2(n+1)+1=3(a_n+2n+1)$

これより，数列 $\{a_n+2n+1\}$ は公比 3 の等比数列であり，

その初項は $a_1+2\cdot 1+1=4$

よって，$a_n+2n+1=4\cdot 3^{n-1}$

$\therefore a_n=4\cdot 3^{n-1}-2n-1$

229

(1)

$(n+1)a_{n+1}=na_n=\cdots=1\cdot a_1$

これと $a_1=1$ より，$na_n=1$ $\quad\therefore a_n=\dfrac{1}{n}$

(2)

両辺を $n(n+1)$ で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$

よって，$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\dfrac{a_1}{1}$

これと $a_1=1$ より，$\dfrac{a_n}{n}=1$ $\quad\therefore a_n=n$

230

$S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-(n+1)-(2a_n-n)$ ・・・①

$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ ・・・②

①，②より，$2a_{n+1}-(n+1)-(2a_n-n)=a_{n+1}$ $\quad\therefore a_{n+1}=2a_n+1$

これを変形して，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ とすると，

数列 $\{a_n+1\}$ は公比 2 の等比数列であり，

その初項は $a_1=S_1$，$S_1=2a_1-1$ より，$a_1=2a_1-1$ $\quad\therefore a_1+1=2$

よって，$a_n+1=2^n$ $\quad\therefore a_n=2^n-1$

231

条件を満たす n 個の円にさらに $n+1$ 個目の円を条件を満たすように描くと，

交点の数は $2n$ であり，この交点を適当な位置から順に $1, 2, 3, \cdots, 2n$ と番号をつけると，

1 と 2 の間，2 と 3 の間，$\cdots$，$2n-1$ と $2n$ の間，$2n$ と 1 の間に新たに分割された部分が生じるから，分割部分の増加数は $2n$ である。

よって，$a_{n+1}=a_n+2n$ $\quad\therefore a_{n+1}-a_n=2n$

$a_{n+1}-a_n$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから，これを数列 $\{b_n\}$ とすると，$b_n=2n$

これと $a_1=2$ より，

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\\&=2+\sum_{k=1}^{n-1}2k\\&=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}\\&=n^2-n+2\end{aligned}$$

232

(1)

操作をn回行った後にできる正方形と$n+1$回行った後にできる正方形の相似比は

$3:\sqrt{5}$ だから，$S_{n+1}=\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 S_n$　$\therefore S_{n+1}=\dfrac{5}{9}S_n$

これより，S_n は公比が$\dfrac{5}{9}$の等比数列で，その初項$S_1=\dfrac{5}{9}$である。

よって，$S_n=\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{S_1-S_{n+1}}{1-\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}}{\frac{4}{9}}$$
$$=\frac{9}{4}\left\{\frac{5}{9}-\left(\frac{5}{9}\right)^{n+1}\right\}$$
$$=\frac{9}{4}\cdot\frac{5}{9}\left\{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n}\right\}$$
$$=\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{5}{9}\right)^{n}\right\}$$

233

$n+1$回投げた時の点数が偶数であるためには,

n回投げたときの点数が偶数ならば$n+1$回目は裏が,

n回投げたときの点数が奇数ならば$n+1$回目は表が出ればよい。

よって，$p_{n+1}=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)p_n+\dfrac{1}{3}(1-p_n)$より，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\dfrac{1}{3}$　$\therefore p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$

これより，数列$\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$は公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列であり，その初項$p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$である。

よって，$p_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$　$\therefore p_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

補足

初項を $p_0-\frac{1}{2}$ にすると，$p_0=1$ だから，$p_0-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

よって，$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ より，$p_n=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

234

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+4}\\
&=\frac{\frac{4a_n+8}{a_n+6}-2}{\frac{4a_n+8}{a_n+6}+4}\\
&=\frac{2a_n-4}{8a_n+32}\\
&=\frac{a_n-2}{4a_n+16}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n-2}{a_n+4}\\
&=\frac{1}{4}b_n
\end{aligned}
$$

これより，数列$\{b_n\}$は公比$\frac{1}{4}$の等比数列であり，その初項$b_1=\frac{a_1-2}{a_1+4}=\frac{1}{4}$だから，

$$\frac{a_n-2}{a_n+4}=b_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}a_n=2+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Leftrightarrow (4^n-1)a_n=2\cdot 4^n+4$ より，$a_n=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

補足 1

解法の原理

$b_{n+1}=rb_n$， $b_n=\dfrac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}$ （$\alpha\neq\beta$）とおくと，
$$\begin{array}{ccc} a_n & \to & a_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ b_n & \to & b_{n+1} \end{array}$$
より，

$a_n\to b_n\to b_{n+1}$ の場合

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=rb_n\\ &=r\cdot\frac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}\end{aligned}$$

$a_n\to a_{n+1}\to b_{n+1}$ の場合

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=\frac{a_{n+1}+\beta}{a_{n+1}+\alpha}\\ &=\frac{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+\beta}{\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}+\alpha}\\ &=\frac{(4+\beta)a_n+8+6\beta}{(4+\alpha)a_n+8+6\alpha}\\ &=\frac{4+\beta}{4+\alpha}\cdot\frac{a_n+\dfrac{8+6\beta}{4+\beta}}{a_n+\dfrac{8+6\alpha}{4+\alpha}}\end{aligned}$$

よって， $r\cdot\dfrac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}=\dfrac{4+\beta}{4+\alpha}\cdot\dfrac{a_n+\dfrac{8+6\beta}{4+\beta}}{a_n+\dfrac{8+6\alpha}{4+\alpha}}$

ゆえに， $r=\dfrac{4+\beta}{4+\alpha}$， $\dfrac{8+6\alpha}{4+\alpha}=\alpha$， $\dfrac{8+6\beta}{4+\beta}=\beta$

これより $\alpha,\ \beta$ は $\dfrac{8+6x}{4+x}=x$ の解であり， これを解くと $x=-2,\ 4$

これと $\alpha\neq\beta$ より， $\alpha=-2,\ \beta=4$ または $\alpha=4,\ \beta=-2$ から a_n を求めればよい。

$\alpha=-2,\ \beta=4$ で解くと

$r=4$ より， $b_{n+1}=4b_n$

また， $b_n=\dfrac{a_n+4}{a_n-2}$ より， $b_1=\dfrac{a_1+4}{a_1-2}=4$ $\quad\therefore b_n=4^n$

ゆえに， $4^n=\dfrac{a_n+4}{a_n-2}$ から， $a_n=\dfrac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

$\alpha=4,\ \beta=-2$ で解くと

$r=\dfrac{1}{4}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}$

また，$b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ より，$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+4}=\dfrac{1}{4}$　　$\therefore b_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

ゆえに，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ から，$a_n=\dfrac{2\left(4^n+2\right)}{4^n-1}$

補足 2

別解

解法のポイント

$a_n=b_n+t$ とし，適当な t を選ぶことで数列 $\{b_n\}$ の漸化式を例題 24 の形にする。

解

$a_n=b_n+t$ とおくと，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+8}{a_n+6}$ より，

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}+t=\frac{4(b_n+t)+8}{b_n+t+6} &\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{4b_n+4t+8}{b_n+t+6}-t\\
&\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{(4-t)b_n-\left(t^2+2t-8\right)}{b_n+t+6}\\
&\Leftrightarrow b_{n+1}=\frac{(4-t)b_n-(t-2)(t+4)}{b_n+t+6}
\end{aligned}
$$

これより，$t=2,\ -4$ のとき，漸化式が例題 24 の形になる。

$t=2$ で解くと

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}=\frac{2b_n}{b_n+8} &\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}}=4\cdot\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}}+\frac{1}{6}=4\left(\frac{1}{b_n}+\frac{1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

よって，$\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{6}=4^{n-1}\left(\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{6}\right)$

これと $b_1=a_1-2=2$ より，$\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{6}=4^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}\right)$　　$\therefore b_n=\dfrac{6}{4^n-1}$

ゆえに，$a_n=b_n+2=\dfrac{2\left(4^n+2\right)}{4^n-1}$

$t=-4$ で解くと

$$b_{n+1}=\frac{8b_n}{b_n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{b_n}+\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{6}\right)$$

これと $b_1=a_1+4=8$ より，$\frac{1}{b_n}-\frac{1}{6}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{b_n}=\frac{4^n-1}{6\cdot 4^n}$ $\quad \therefore b_n=\frac{6\cdot 4^n}{4^n-1}$

ゆえに，$a_n=b_n-4=\frac{2(4^n+2)}{4^n-1}$

235

(1)

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ とすると，$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$

これと $a_{n+2}+3a_{n+1}-4a_n=0$ より，$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=-4$

よって，$\alpha,\ \beta$ は $x^2+3x-4=0$，すなわち $(x-1)(x+4)=0$ の解である。

ゆえに，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ -4),\ (-4,\ 1)$

解法 1

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ -4)$ のとき

$a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$，$a_2-a_1=1$ より，$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$

$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列だから，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-4)^{k-1}=1+\frac{1-(-4)^{n-1}}{1-(-4)}=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$$

解法 2

$(\alpha,\ \beta)=(1,\ -4)$ のとき

$a_{n+2}-a_{n+1}=-4(a_{n+1}-a_n)$，$a_2-a_1=1$ より，$a_{n+1}-a_n=(-4)^{n-1}$ ・・・①

$(\alpha,\ \beta)=(-4,\ 1)$ のとき

$a_{n+2}+4a_{n+1}=a_{n+1}+4a_n=\cdots=a_2+4a_1=6$ より，$a_{n+1}+4a_n=6$ ・・・②

②－①より，$5a_n=6-(-4)^{n-1}$ $\quad \therefore a_n=\frac{6-(-4)^{n-1}}{5}$

(2)

$x^2+5x+6=0$ を解くと，$x=-2,\ -3$

よって，$a_{n+2}+2a_{n+1}=-3(a_{n+1}+2a_n)$，$a_{n+2}+3a_{n+1}=-2(a_{n+1}+3a_n)$

ゆえに，

$a_{n+1}+2a_n=(-3)^{n-1}(a_2+2a_1)=(-3)^{n-1}$ ・・・①

$a_{n+1}+3a_n=(-2)^{n-1}(a_2+3a_1)=(-2)^{n-1}$ ・・・②

②－①より，$a_n=(-2)^{n-1}-(-3)^{n-1}$

(3)

$x^2-6x+9=0$ を解くと $x=3$ $\quad\therefore a_{n+2}-3a_{n+1}=3(a_{n+1}-3a_n)$

ゆえに，$a_{n+1}-3a_n=3^{n-1}(a_2-3a_1)=3^{n-1}$ より，$a_{n+1}=3a_n+3^{n-1}$

この両辺を 3^{n+1} で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}+\dfrac{1}{9}$

これより，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^n}\right\}$ は公差 $\dfrac{1}{9}$，初項 $\dfrac{a_1}{3}=\dfrac{1}{3}$ の等差数列である。

よって，$\dfrac{a_n}{3^n}=\dfrac{a_1}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{9}$ $\quad\therefore a_n=3^{n-2}\cdot(n+2)$

例題 26

別解：等比数列の連立方程式をつくってから解く

$a_{n+1}=2a_n+b_n$ ・・・①

$b_{n+1}=a_n+2b_n$ ・・・②

①＋$k\times$②より，

$a_{n+1}+kb_{n+1}=(2+k)a_n+(1+2k)b_n$

よって，$2+k\neq 0$ とすると，$a_{n+1}+kb_{n+1}=(2+k)\left(a_n+\dfrac{1+2k}{2+k}b_n\right)$

したがって，$\dfrac{1+2k}{2+k}=k$ を満たす実数 k （$2+k\neq 0$）が存在するならば，

$a_n+kb_n=(2+k)^{n-1}(a_1+kb_1)$ が成り立つ。

$\dfrac{1+2k}{2+k}=k$ を解くと $k=\pm 1$ だから，

$k=1$ のとき

$a_n+b_n=3^{n-1}(a_1+b_1)=4\cdot 3^{n-1}$ ・・・③

$k=-1$ のとき

$a_n-b_n=a_1-b_1=-2$ ・・・④

③，④の連立方程式を解くことにより，

$a_n=2\cdot 3^{n-1}-1$

$b_n=2\cdot 3^{n-1}+1$

注意

この方法は計算が煩雑になる嫌いがある。

236

(1)

$a_2 = 2a_1 + b_1 = 2 \cdot 2 + 6 = 10$

$b_2 = 3a_1 + 4b_1 = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 30$

$a_3 = 2a_2 + b_2 = 2 \cdot 10 + 30 = 50$

$b_3 = 3a_2 + 4b_2 = 3 \cdot 10 + 4 \cdot 30 = 150$

(2)

$a_{n+1} = 2a_n + b_n$ ・・・①

$b_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ ・・・②

$\{a_n + b_n\}$の一般項

①＋②より，$a_{n+1} + b_{n+1} = 5(a_n + b_n)$

これと $a_1 + b_1 = 2 + 6 = 8$ より，$a_n + b_n = 8 \cdot 5^{n-1}$

$\{3a_n - b_n\}$の一般項

3×①－②より，$3a_{n+1} - b_{n+1} = 3a_n - b_n$

よって，$3a_{n+1} - b_{n+1} = 3a_n - b_n = \cdots = 3a_1 - b_1$

これと $3a_1 - b_1 = 3 \cdot 2 - 6 = 0$ より，$3a_n - b_n = 0$

(3)

$3a_n - b_n = 0$ より，$b_n = 3a_n$

これを $a_n + b_n = 8 \cdot 5^{n-1}$ に代入し，整理することにより，$a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

また，$b_n = 3a_n$ より，$b_n = 6 \cdot 5^{n-1}$

解説 1： $a_{n+1} = pa_n + q(n)$ （p は 0 でない定数）の一般項を求める方法

はじめに

$f(n+1) = pf(n) + q(n)$ を満たす漸化式はいくらでもつくれる。

つまり，

$a_{n+1} = pa_n + q(n),\quad a_1 = \alpha$

もあれば、

$b_{n+1} = pb_n + q(n),\quad b_1 = \beta$

もあれば，

$c_{n+1} = pc_n + q(n),\quad c_1 = \gamma$

もあれば，

$\vdots$

といくらでもつくれる。

これらの漸化式 1 つ 1 つを $f(n+1) = pf(n) + q(n)$ の特性方程式という。

$a_{n+1} = pa_n + q(n),\quad a_1 = \alpha$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を特性方程式を利用して求める方法

$a_{n+1} = pa_n + q(n)$　・・・①

$f(n+1) = pf(n) + q(n)$ を満たす特性方程式を $b_{n+1} = pb_n + q(n)$　・・・②とすると，

①－② より，

$a_{n+1} - b_{n+1} = p(a_n - b_n)$　・・・③

$\therefore \dfrac{a_{n+1} - b_{n+1}}{a_n - b_n} = p$

これは，数列 $\{a_n - b_n\}$ が公比 p，初項 $a_1 - b_1$ の等比数列であることを示している。

よって，$a_n - b_n = p^{n-1}(a_1 - b_1)$

ゆえに，$a_n = p^{n-1}(a_1 - b_1) + b_n$

要するに，

与式の漸化式とその特性方程式の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1} - b_{n+1} = p(a_n - b_n)$ を得，

それから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めるというのが，

特性方程式を利用して数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める方法の原理である。

特性方程式の作り方の原理

③より，$a_{n+1} = pa_n + b_{n+1} - pb_n$

これと $a_{n+1} = pa_n + q(n)$ より，

$q(n) = b_{n+1} - pb_n$

これより，b_n を $q(n)$ と同種の式にすれば楽に特性方程式ができることがわかる。

いろいろな特性方程式

$q(n)=c$ （c は定数）の場合

$b_n=\alpha$ （α は定数）とおく。

すると，漸化式は $\alpha=p\alpha+c$ となり，この方程式を解くことにより，α の値が求まる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+c$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ が得られる。

$q(n)=cn+d$ （n の 1 次式）の場合

$b_n=\alpha n+\beta$ とおくと，漸化式は $\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+cn+d$ となり，

これが n の恒等式であることから，α と β を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ が得られる。

補足：階差数列を利用して解くことも可能

$a_{n+2}=pa_{n+1}+c(n+1)+d$ と $a_{n+1}=pa_n+cn+d$ の差をとると，

$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)+c$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であり，

漸化式 $b_{n+1}=pb_n+c$ から数列 $\{b_n\}$ を求めることにより，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k \ (n\geq 2)$

$q(n)=cn^2+dn+e$ （n の 2 次式）の場合

$b_n=\alpha n^2+\beta n+\gamma$ とおくと，

漸化式は $\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma=p(\alpha n^2+\beta n+\gamma)+cn^2+dn+e$ となり，

これが n の恒等式であることから，α,β,γ を求めることができる。

また，これと $a_{n+1}=pa_n+cn^2+dn+e$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma\}=p\{a_n-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\}$ が得られる。

$q(n)=ct^n \ (c\neq p, c\neq 0)$ の場合

特性方程式を使う解き方

$b_n=\alpha t^n$ とおくと，漸化式は $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n \quad \therefore t^n\{\alpha(t-p)-c\}=0$

これが任意の n について成り立つから，$\alpha(t-p)-c=0 \quad \therefore \alpha=\dfrac{c}{t-p}$

また，$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ と $\alpha t^{n+1}=p\alpha t^n+ct^n$ の差をとることにより，

等比数列の漸化式 $a_{n+1}-\alpha t^{n+1}=p(a_n-\alpha t^n)$ が得られる。

特性方程式を使わない解き方

$a_{n+1}=pa_n+ct^n$ の両辺を $\dfrac{1}{t^{n+1}}$ 倍すると，$\dfrac{a_{n+1}}{t^{n+1}}=p\dfrac{a_n}{t^n}+\dfrac{c}{t}$

$b_n=\dfrac{a_n}{t^n}$ とおくと，$b_{n+1}=pb_n+\dfrac{c}{t}$

これを解くことにより，数列 $\{a_n\}$ が求まる。

$q(n)=cp^n$ $(c \neq 0)$の場合，

数列$\{a_n\}$の漸化式は$a_{n+1}=pa_n+cp^n$であり，

この場合は，両辺を$\dfrac{1}{p^{n+1}}$倍することにより，$\dfrac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\dfrac{a_n}{p^n}+\dfrac{c}{p}$を得，

$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$とおいてからb_nを求め，$a_n=p^n b_n$とする。

例題

$a_1=5$，$a_{n+1}=3a_n-2^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$で定まる数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

解法 1．特殊解を使って解く

漸化式$f(n+1)=3f(n)-2^n$の特殊解を$b_n=k\cdot 2^n$とおくと，

$k\cdot 2^{n+1}=3k\cdot 2^n-2^n$

$\therefore 2^n(k-1)=0$

これは任意のnについて成り立つから，$k=1$

よって，

$2^{n+1}=3\cdot 2^n-2^n$

これと$a_{n+1}=3a_n-2^n$の両辺の差をとると，

$a_{n+1}-2^{n+1}=3a_n-3\cdot 2^n \Leftrightarrow a_{n+1}-2^{n+1}=3(a_n-2^n)$より，$a_n-2^n=3^{n-1}(a_1-2)$

これと$a_1=5$より，$a_n=3^n+2^n$

解法 2．特殊解を使わないで解く

漸化式の両辺を3^{n+1}で割ると，$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{a_n}{3^n}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

ここで，式を見やすくする目的で，$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$とおくと，

$b_{n+1}=b_n-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \quad \therefore b_{n+1}-b_n=-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

$b_{n+1}-b_n$は数列$\{b_n\}$の階差数列だから

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{a_1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=1+\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad (\because a_1=5)$$

$\therefore a_n=3^n+2^n$

解説 2：分数形の漸化式の一般解の求め方

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の一般項の求め方（入試問題では，誘導がついているのがふつうである）

方法 1

置き換えにより，分数漸化式の基本形 $\boldsymbol{b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}}$ を得てから解く。

求め方の手順

手順 1

$a_n=b_n+x$ とおいて，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形になるような x の値を求める。

$b_{n+1}+x=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}$ より，$b_{n+1}=\dfrac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x$

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{(p-rx)b_n-\{rx^2-(p-s)x+q\}}{rb_n+rx+s}$

ここで，$rx^2-(p-s)x+q=0$ の解を α とすると，$b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$

尚，$rx^2-(p-s)x+q=0$ の解は，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から求めることができる。

その理由については後述。

手順 2

$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形，つまり $b_{n+1}=\dfrac{(p-r\alpha)b_n}{rb_n+r\alpha+s}$ が得られた。

逆数をとると，$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{rb_n+r\alpha+s}{(p-r\alpha)b_n}$ より，

数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の漸化式 $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ が得られる。

手順 3

$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{r\alpha+s}{p-r\alpha}\cdot\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{r}{p-r\alpha}$ を解くことで，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ の一般項を得，

その逆数をとることにより，数列 $\{b_n\}$ の一般項を得る。

手順 4

数列 $\{a_n\}$ は，$a_n=b_n+\alpha$ を計算することで得られる。

例 1：x の方程式が重解の場合

$a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}$，$a_1=1$，$(n=1,2,3,\cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を先ほどの手順に従って求めてみる。

$a_n=b_n+x$ とすると，$b_{n+1}+x=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}$ より，

$b_{n+1}=\dfrac{5(b_n+x)-16}{b_n+x-3}-x$ $\therefore b_{n+1}=\dfrac{(5-x)b_n-(x-4)^2}{b_n+x-3}$

ここで，$x=4$ とすると，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{b_n+1}$ $\therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+1$ $\therefore \dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{b_n}=1$

これは，数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ が公差 1，初項 $b_1=a_1-4=5-4=1$ $(\because a_1=b_1+4)$

よって，$\dfrac{1}{b_n}=n$ $\therefore b_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+4$ より，$a_n=\dfrac{1}{n}+4$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$a_n=b_n+x$ とおいたとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形にできるような x が $a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ の解と一致する理由

$$b_{n+1}=\frac{p(b_n+x)+q}{r(b_n+x)+s}-x$$
$$=\frac{pb_n+px+q}{rb_n+rx+s}-x$$
$$=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}-x$$
$$=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x\left(\dfrac{rb_n}{rx+s}+1\right)}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}$$
$$=\frac{\dfrac{pb_n}{rx+s}-\dfrac{rxb_n}{rx+s}+\dfrac{px+q}{rx+s}-x}{\dfrac{rb_n}{rx+s}+1}$$

となるから，$\dfrac{px+q}{rx+s}-x=0$ となる x を求めればよいわけだが，

この方程式は，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおくことで得られる方程式，

すなわち $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ と同じである。

よって，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ の形が得られるような x を求めるには，

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1} と a_n を x とおいて得られる x の方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ を解けばよい。

補足

$x=\alpha$ のとき，$b_{n+1}=\dfrac{Ab_n}{Bb_n+C}$ になるとすると，

$b_n=a_n-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{B(a_n-\alpha)+C}$ だから，

これから直接数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてもよい。

例 2：x の方程式が異なる 2 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}$ $(n=1,2,\cdots)$ の一般項 a_n

まず特性方程式の解を求める

$a_n=b_n+x$ とおき，特性方程式 $x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を求めると，$x^2-6x+8=0$ $\quad\therefore x=2,4$

解法 1

$a_n=b_n+2$ とおくと，

$$\begin{aligned}b_{n+1}+2&=\frac{-(b_n+2)+8}{-(b_n+2)+5}\\&=\frac{-b_n+6}{-b_n+3}\\&=\frac{2(-b_n+3)+b_n}{-b_n+3}\\&=2+\frac{b_n}{-b_n+3}\end{aligned}$$

より，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{-b_n+3}$ $\quad\therefore\dfrac{1}{b_{n+1}}=-1+\dfrac{3}{b_n}\Leftrightarrow\dfrac{1}{b_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{2}\right)$

これより，$\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{2}=3^{n-1}\left(\dfrac{1}{b_1}-\dfrac{1}{2}\right)=3^{n-1}\left(\dfrac{1}{a_1-2}-\dfrac{1}{2}\right)=3^{n-1}\cdot\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

ゆえに，$a_n=b_n+2=\dfrac{2}{3^{n-1}+1}+2=\dfrac{2+2\cdot3^{n-1}+2}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$

解法 2（処理は楽だが，特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の形にしてから解く。

$a_n=b_n+2$ とおくと，$b_{n+1}=\dfrac{b_n}{-b_n+3}$ $\quad\therefore a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$ ・・・①

$a_n=c_n+4$ とおくと，$c_{n+1}=\dfrac{3c_n}{-c_n+1}$ $\quad\therefore a_{n+1}-4=\dfrac{3a_n-12}{-a_n+5}$ ・・・②

$\dfrac{①}{②}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3a_n-12}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

これより，数列$\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$は公比$\dfrac{1}{3}$の等比数列であり，その初項は$\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$

よって，$\dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

これを変形すると，$3^{n-1}a_n-2\cdot3^{n-1}=-a_n+4$

ゆえに，$a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

方法 2

分数形漸化式の基本形に変形できる形 $a_{n+1}-\alpha=\dfrac{A(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ にしてから解く。

手順

$$a_{n+1}-x=\frac{pa_n+q}{ra_n+s}-x$$

↓

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)a_n+q-sx}{ra_n+s}$$

↓

$$a_{n+1}-x=\frac{(p-rx)\left(a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)}{ra_n+s}$$

ここで，左辺 $a_{n+1}-x$ と右辺の $a_n+\dfrac{q-sx}{p-rx}$ に注目して，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ となる x を求める。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から解を求めればよい。

↓

特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $\left(\text{または}, -x=\dfrac{q-sx}{p-rx}\right)$ の解を α とすると，

$\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}=-\alpha$ より，$a_{n+1}-\alpha=\dfrac{(p-r\alpha)(a_n-\alpha)}{ra_n+s}$ が得られる。

以後の処理も含めた分数漸化式の一般解の求め方は，以下の例を参照のこと

例 **1**：特性方程式の解が重解の場合

$a_1=5$， $a_{n+1}=\dfrac{5a_n-16}{a_n-3}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{5x-16}{x-3}$ を解くと， $x^2-8x+16=0 \quad \therefore x=4$

$$\begin{aligned} a_{n+1}-4&=\frac{5a_n-16}{a_n-3}-4\\ &=\frac{a_n-4}{a_n-3}\\ &=\frac{a_n-4}{(a_n-4)+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a_{n+1}-4}=\frac{1}{a_n-4}+1$$

これより，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n-4}\right\}$は公差 1 の等差数列で，その初項は$\dfrac{1}{a_1-4}=1$である。

よって， $\dfrac{1}{a_n-4}=1+(n-1)\cdot 1$ より， $a_n=\dfrac{1}{n}+4$

例 **2**：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1=3$， $a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ を解くと， $x^2-6x+8=0 \quad \therefore x=2,4$

解法 1

$x=2$ のとき，

$$a_{n+1}-2=\frac{-a_n+8}{-a_n+5}-2=\frac{a_n-2}{-a_n+5}=\frac{a_n-2}{-(a_n-2)+3}$$

両辺の逆数をとると， $\dfrac{1}{a_{n+1}-2}=3\cdot\dfrac{1}{a_n-2}-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}-2}-\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{a_n-2}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\therefore \frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{2}=3^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}\left(\frac{1}{3-2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3^{n-1}}{2}$$

$$\therefore a_n-2=\frac{2}{3^{n-1}+1} \Leftrightarrow a_n=\frac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$$

解法 2 (特性方程式の解が重解の場合は無理)

$x=2$ のとき，$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n-2}{-a_n+5}$ ・・・③

$x=4$ のとき，$a_{n+1}-4=\dfrac{3(a_n-4)}{-a_n+5}$ ・・・④

$\dfrac{③}{④}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{a_n-2}{3(a_n-4)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right)$

これより，数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$ は公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列であり，その初項は $\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$

よって，$\dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ より，$3^{n-1}a_n-2\cdot 3^{n-1}=-a_n+4$

$\therefore a_n=\dfrac{2(3^{n-1}+2)}{3^{n-1}+1}$

方法 3（特性方程式の解が重解の場合は使えない）

等比数列の漸化式：$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　に変形してから解く

この方法は，誘導形式の形で入試に出題されたことがある

求め方のしくみ

$a_n \xrightarrow{f} a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ から，

$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} \xrightarrow{h} \dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=h\left(\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\right)=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ となるような α，β を求める。

↓

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ から，$\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}=\dfrac{a_1-\alpha}{a_1-\beta}\cdot t^{n-1}$ が得られるので，

これから数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

手順

$b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，関数 f,g,h の関係は以下のようになる。

$$
\begin{array}{ccc}
a_n & \xrightarrow{f} & a_{n+1}=f(a_n)=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s} \\
\downarrow g & & \downarrow g \\
b_n=g(a_n)=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta} & \xrightarrow{h} & \begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}
\end{array}
$$

したがって，

α と β を求めるには，

合成関数の連立方程式 $\begin{cases} b_{n+1}=h(b_n)=h(g(a_n)) \\ b_{n+1}=g(a_{n+1})=g(f(a_n)) \end{cases}$ を解けばよい。

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}&=h(b_n)\\
&=h(g(a_n))\\
&=t\cdot g(a_n)\\
&=t\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}
\end{aligned}
$$

$\therefore b_{n+1}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$　・・・⑤

$$
\begin{aligned}
b_{n+1} &= g(a_{n+1}) \\
&= g(f(a_n)) \\
&= \frac{f(a_n)-\alpha}{f(a_n)-\beta} \\
&= \frac{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\alpha}{\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}-\beta} \\
&= \frac{pa_n+q-\alpha(ra_n+s)}{pa_n+q-\beta(ra_n+s)} \\
&= \frac{(p-r\alpha)a_n+q-s\alpha}{(p-r\beta)a_n+q-s\beta} \\
&= \frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}}
\end{aligned}
$$

$$\therefore b_{n+1}=\frac{p-r\alpha}{p-r\beta}\cdot\frac{a_n+\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}}{a_n+\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}} \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥より，

$t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$，　$-\alpha=\dfrac{q-s\alpha}{p-r\alpha}$，　$-\beta=\dfrac{q-s\beta}{p-r\beta}$

よって，α と β は方程式 $x=\dfrac{sx-q}{rx-p}$ を解くことにより求められ，

これを $t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}$ に代入することにより，公比 t が求められる。

重要補足

$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ より，$rx^2-(p-s)x-q=0$

よって，$-x=\dfrac{q-sx}{p-rx}$ と $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ は同じ方程式である。

したがって，$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の a_{n+1},a_n を x に置き換えた方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ から

解を求めればよい。

まとめ

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ の特性方程式 $x=\dfrac{px+q}{rx+s}$ が異なる 2 実数解 α,β をもつとき，

$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}\quad\left(t=\dfrac{p-r\alpha}{p-r\beta}\right)$ と表せる。

例：特性方程式の解が異なる **2** 実数解の場合

$a_1=3$，$a_{n+1}=\dfrac{-a_n+8}{-a_n+5}\ (n=1,2,\cdots)$

解

$x=\dfrac{-x+8}{-x+5}$ の解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$x^2-6x+8=0\quad\therefore x=2,4$

$\therefore\alpha=2$，$\beta=4$

ここで，$\dfrac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=t\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと，$t=\dfrac{-1-(-1)\cdot2}{-1-(-1)\cdot4}=\dfrac{1}{3}$ より，$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}-4}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n-4}$

よって，数列 $\left\{\dfrac{a_n-2}{a_n-4}\right\}$ は，初項 $\dfrac{a_1-2}{a_1-4}=-1$，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。

$\therefore\dfrac{a_n-2}{a_n-4}=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

これより，$3^{n-1}a_n-2\cdot3^{n-1}=-a_n+4\quad\therefore a_n=\dfrac{2\left(3^{n-1}+2\right)}{3^{n-1}+1}$

解説 3：連立漸化式の解法を 3 つ

はじめに

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ の形にする。

方法 1：連立漸化式をいじり，等比数列の形にする

手順 1

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$ ・・・②

①－$k \times$②より，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)a_n + (q - ks)b_n$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)\left(a_n + \dfrac{q - ks}{p - kr} b_n\right)$ ・・・③

と変形する。

手順 2

③の右辺の $\dfrac{q - ks}{p - kr}$ が $\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$ となれば，

$a_{n+1} - kb_{n+1} = (p - kr)(a_n - kb_n)$ より，

$a_n - kb_n$ は，公比 $p - kr$，初項 $a_1 - kb_1$ の等比数列だから，

$a_n - kb_n = (p - kr)^{n-1}(a_1 - kb_1)$ ・・・④

となる。

したがって，$\dfrac{q - ks}{p - kr} = -k$，

すなわち k についての 2 次方程式

$rk^2 - (p - s)k - q = 0$ ・・・⑤

を解き，

k が異なる 2 実数解をもつならば，

④の式が 2 つできるので，その連立方程式を解けばよい。

k が重解をもつならば，

④，①，②から a_n または b_n の漸化式を得，解けばよい。

補足 1

$p = s, q = r$ の場合は，⑤より，$k = \pm 1$ だから，これを覚えておいて，

いきなり①＋②と①－②から始めれば手際よく解ける。

補足 2

$a_{n+1}=pa_n+qb_n+t$ ・・・①’

$b_{n+1}=ra_n+sb_n+u$ ・・・②’

（t,u は実数）

の場合においても

①’－$k\times$②’より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(p-kr)\left(a_n+\dfrac{q-ks}{p-qr}b_n\right)+t-ku$ とした後，

$\dfrac{q-ks}{p-kr}=-k$，すなわち k についての 2 次方程式 $rk^2-(p-s)k-q=0$ を解き，

$a_{n+1}-kb_{n+1}=(p-kr)(a_n-kb_n)+t-ku$ の形の 2 項間漸化式

（$c_n=a_n-kb_n$ とおけば，$c_{n+1}=(p-kr)c_n+t-ku$ ）にしてから，

その漸化式を解けばよい。

したがって，方法 1 は万能型といえる。

方法 2：a_n と b_n について，それぞれの 3 項間漸化式をつくってから解く。

$a_{n+1} = pa_n + qb_n$ ・・・①

$b_{n+1} = ra_n + sb_n$ ・・・②

a_n についての漸化式

①より，$qb_n = a_{n+1} - pa_n$ $\therefore qb_{n+1} = a_{n+2} - pa_{n+1}$

②×q より，$qb_{n+1} = qra_n + sqb_n$

よって，$a_{n+2} - pa_{n+1} = qra_n + s(a_{n+1} - pa_n)$

$\therefore a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$ ・・・⑥

b_n についての漸化式

②より，$ra_n = b_{n+1} - sb_n$ $\therefore ra_{n+1} = b_{n+2} - sb_{n+1}$

①×r より，$ra_{n+1} = pra_n + qrb_n$

よって，$b_{n+2} - sb_{n+1} = p(b_{n+1} - sb_n) + qrb_n$

$\therefore b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps - qr)b_n = 0$ ・・・⑦

漸化式⑥，⑦を解くことにより，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の一般項を求める。

補足 3

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{cases} a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps-qr)a_n = 0 \\ b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps-qr)b_n = 0 \end{cases}$ は覚えておくとよい。

覚え方

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$

これより，

$a_{n+2} - (p+s)a_{n+1} + (ps - qr)a_n = 0$

$b_{n+2} - (p+s)b_{n+1} + (ps - qr)b_n = 0$

方法 3：行列を利用して解く

手順 1

$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$

手順 2

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}^{n-1}$ を求める。

求め方の 1 例

わかりやすさの目的で $A = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおくと，ケイリー・ハミルトンの定理より，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = O$

ここで，またわかりやすさの目的で，

$A^2 - (p+s)A + (ps - qr)E = (A - \alpha E)(A - \beta E)$ と表すと，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$

続いて，行列 X^{n-1} を $(X - \alpha E)(X - \beta E)$ で割った商を $Q(X)$，余りを $mX + nE$ とする。

すると，

$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + mX + nE$

$X = \alpha E$ のとき

$\alpha^{n-1}E = m\alpha E + nE \quad \therefore m\alpha + n = \alpha^{n-1} \quad$ ・・・⑥

$X = \beta E$ のとき

$\beta^{n-1}E = m\beta E + nE \quad \therefore m\beta + n = \beta^{n-1}$ ・・・⑦

⑥，⑦より，

$$m = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad n = -\frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}$$

よって，$X^{n-1} = (X - \alpha E)(X - \beta E)Q(X) + \dfrac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}X - \dfrac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E$

これに $X = A$ を代入すると，$(A - \alpha E)(A - \beta E) = O$ より，

$$A^{n-1} = \frac{\alpha^{n\backslash 1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \left\{ \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}A - \frac{\alpha\beta\left(\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}\right)}{\alpha - \beta}E \right\} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

補足 4

3 項間漸化式 $a_{n+2} = xa_{n+1} + ya_n$ を行列で解く場合

$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ より，$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ 以下同様

参考サイト：数学小ネタ http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukoneta.html

ケイリー・ハミルトンの定理と行列の n 乗