

数列 演習問題

18

$$\begin{aligned}
 a_k &= 3 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + \cdots + 3 \cdot 10^{k-1} \\
 &= \frac{3 \cdot 10^k - 3}{10 - 1} \\
 &= \frac{10^k - 1}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (10^k - 1) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{10 - 1} - n \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{10^{n+1}}{9} - n - \frac{10}{9} \right) \\
 &= \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}
 \end{aligned}$$

19

$\frac{n}{5} + \frac{1}{2}$ は数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ の階差数列だから,

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_n} &= \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{5} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n-1}{2} \\
 &= \frac{n^2 + 4n + 3}{10}
 \end{aligned}$$

よって, $a_n = \frac{10}{n^2 + 4n + 3}$

これは $a_1 = \frac{5}{4}$ を満たす。

ゆえに, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{10}{n^2 + 4n + 3}$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{28} a_n &= \sum_{n=1}^{28} \frac{10}{(n+1)(n+3)} \\
&= 5 \sum_{k=1}^{28} \frac{(n+3) - (n+1)}{(n+1)(n+3)} \\
&= 5 \sum_{k=1}^{28} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \\
&= 5 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{29} \right) + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{30} \right) + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31} \right) \right\} \\
&= 5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} - \frac{1}{31} \right) \\
&= 5 \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{31} \right) \\
&= 4 - \frac{5}{31} \\
&= \frac{119}{31}
\end{aligned}$$

20

(1)

$$a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n - \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1} \quad b_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n + \frac{5}{4}b_n - \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2} \quad \text{とする。}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

これより, 数列 $\{a_n + b_n\}$ は公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列で, その初項は $a_1 + b_1 = 1$

$$\text{よって, } a_n + b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

(2)

$$(1) \text{ の } \textcircled{1} \text{ と } \textcircled{2} \text{ について, } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n) + 1$$

$$\text{よって, } (a_{n+1} - b_{n+1}) + 1 = 2\{(a_n - b_n) + 1\} \Leftrightarrow a_{n+1} - b_{n+1} + 1 = 2(a_n - b_n + 1)$$

これより, 数列 $\{a_n - b_n + 1\}$ は公比 2 の等比数列で, その初項は $a_1 - b_1 + 1 = 4$

$$\text{ゆえに, } a_n - b_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1}, \text{ すなわち } a_n - b_n = 2^{n+1} - 1$$

(3)

$$a_n + b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{3} \quad a_n - b_n = 2^{n+1} - 1 \quad \cdots \textcircled{4} \quad \text{とする。}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より, } 2a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 2^{n+1} - 1 \quad \therefore a_n = \frac{1}{2^n} + 2^n - \frac{1}{2}$$

21

(1)

$$16 \sum_{k=1}^n k = 16 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 8n(n+1), \quad 16 \sum_{k=1}^n k = 5200 \text{ より, } 8n(n+1) = 5200 \quad \therefore n^2 + n = 650$$

$$\text{これより, } n^2 + n - 650 = 0 \Leftrightarrow (n+26)(n-25) = 0$$

$$\text{これと } n > 0 \text{ より, } n = 25$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{m=1}^k m^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{6} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)}{12} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \{n - (k-1)\} k^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \{(n+1)k^2 - k^3\} \\ &= (n+1) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{2n(n+1)^2(2n+1) - 3n^2(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n = b_n$$

22

(1)

【1】 $n=1$ のとき与式左辺 $= 1! = 1$ ，与式右辺 $= 2^{1-1} = 2^0 = 1$ より，与式が成り立つ。【2】 $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定する。 $n=k+1$ のとき

$$(k+1)! = (k+1)k!$$

$$\geq (k+1) \cdot 2^{k-1}$$

ここで， k は自然数だから， $k+1 \geq 2$

よって，

$$(k+1)! \geq (k+1) \cdot 2^{k-1}$$

$$\geq 2 \cdot 2^{k-1}$$

$$= 2^k$$

これは $n=k+1$ のときも与式が成り立つことを示している。

よって，【1】，【2】より，与式が成り立つ。

(2)

$$(1)より，\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$< 2$$

23

【1】 $n=2$ のとき

$$x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

ここで、条件より $-1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1$ だから、 $x_1 - 1 < 0, x_2 - 1 < 0$

よって、 $x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2) > 0$ 、すなわち $x_1x_2 + 1 > x_1 + x_2$

ゆえに、与式が成り立つ。

【2】 $n=k$ のとき与式が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} & \{x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} + (k+1) - 1\} - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1}) \\ & > x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} + k - \{(x_1x_2x_3 \cdots x_k + k - 1) + x_{k+1}\} \\ & = x_1x_2x_3 \cdots x_k(x_{k+1} - 1) - (x_{k+1} - 1) \\ & = (x_{k+1} - 1)(x_1x_2x_3 \cdots x_k - 1) \end{aligned}$$

ここで、実数に与えられた条件より、 $x_{k+1} - 1 < 0, x_1x_2x_3 \cdots x_k - 1 < 0$

よって、 $\{x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} + (k+1) - 1\} - (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1}) > 0$

ゆえに、 $x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} > x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1}$

これは $n=k+1$ のときも与式が成り立つことを示している。

よって、【1】、【2】より、与式が成り立つ。

24

漸化式の両辺について、底を 2 とする対数をとると、

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2 \text{ より、} \log_2 a_{n+1} = 2\log_2 a_n + 3$$

$$\text{よって、} \log_2 a_{n+1} + 3 = 2(\log_2 a_n + 3)$$

これより、数列 $\{\log_2 a_n + 3\}$ 、すなわち $\{\log_2 8a_n\}$ は公比 2 の等比数列であり、

$$\text{その初項は } \log_2 a_1 + 3 = \log_2 5 + \log_2 8 = \log_2 40$$

$$\text{よって、} \log_2 8a_n = 2^{n-1} \log_2 40 \Leftrightarrow \log_2 8a_n = \log_2 40^{2^{n-1}}$$

$$\text{ゆえに、} a_n = \frac{40^{2^{n-1}}}{8}$$

25

(1)

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}S_{n+1} \quad \cdots \quad \textcircled{1} \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}S_n \quad \cdots \quad \textcircled{2} \quad \text{とすると,}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ および } S_{n+1} - S_n = a_{n+1} \text{ より, } a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + \frac{1}{2}a_{n+1}$$

$$\text{これを整理すると, } a_{n+2} - \frac{1}{2}a_{n+1} = 2\left(a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n\right) \quad \therefore b_{n+1} = 2b_n$$

これより, 数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であり,

$$\text{その初項 } b_1 = a_2 - \frac{1}{2}a_1 = \left(a_1 + \frac{1}{2}S_1\right) - \frac{1}{2}a_1 = \left(a_1 + \frac{1}{2}a_1\right) - \frac{1}{2}a_1 = a_1 = 1$$

$$\text{よって, } b_n = 2^{n-1}$$

(2)

解法 1

$$(1) \text{ より, } a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 2^{n-1} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2^{n-1}$$

$$\text{両辺を } 2^{n+1} \text{ で割ると, } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^{n+2}} + \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} \text{ より, } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{4}$$

$$\text{これを整理すると, } \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{3}\right)$$

これより, 数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{3}\right\}$ は公比 $\frac{1}{4}$, 初項 $\frac{a_1}{2^1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ の等比数列である。

$$\text{よって, } \frac{a_n}{2^n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= 2^n \left(\frac{1}{6 \cdot 4^{n-1}} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2^n \left(\frac{4}{6 \cdot 4^n} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2^n \left(\frac{2}{3 \cdot 4^n} + \frac{1}{3} \right) \\ &= 2^n \cdot \frac{2 + 4^n}{3 \cdot 4^n} \\ &= \frac{4^n + 2}{3 \cdot 2^n} \end{aligned}$$

解法 2

$$(1)より, \quad a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n = 2^{n-1} \quad \therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、漸化式が $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 2^{n-1}$ の数列 $\{p_n\}$ を仮定すると、

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}より, \quad a_{n+1} - p_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{2}p_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{これより,} \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4}より, \quad p_{n+1} - \frac{1}{2}p_n = 2^{n-1}$$

$$\text{ここで} \quad p_n = k \cdot 2^n \text{ とすると,} \quad k \cdot 2^{n+1} - \frac{1}{2} \cdot k 2^n = 2^{n-1} \Leftrightarrow 3k \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\text{よって,} \quad k = \frac{1}{3} \quad \therefore p_n = \frac{1}{3} \cdot 2^n$$

$$\text{これを}\textcircled{3}\text{に代入し, 整理すると,} \quad a_{n+1} - \frac{2^{n+1}}{3} = \frac{1}{2} \left(a_n - \frac{2^n}{3} \right)$$

これより数列 $\left\{ a_n - \frac{2^n}{3} \right\}$ は公比 $\frac{1}{2}$, 初項 $a_1 - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ の等比数列である。

$$\text{よって,} \quad a_n - \frac{2^n}{3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} + \frac{2^n}{3} \\ &= \frac{2}{3 \cdot 2^n} + \frac{2^n}{3} \\ &= \frac{4^n + 2}{3 \cdot 2^n} \end{aligned}$$

26

(1)

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= b_{n+2} - b_{n+1} \\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n+1} a_{n+2} - a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n+1} (a_{n+2} - 1) \\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \cdot \left\{ \left(4 - \frac{3}{a_{n+1}} \right) - 1 \right\} \\
&= a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \left(3 - \frac{3}{a_{n+1}} \right) \\
&= 3(a_1 a_2 \cdots a_{n+1} - a_1 a_2 \cdots a_n) \\
&= 3(b_{n+1} - b_n) \\
&= 3c_n
\end{aligned}$$

これより、数列 $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列であり、その初項は

$$\begin{aligned}
c_1 &= b_2 - b_1 \\
&= a_1 a_2 - a_1 \\
&= a_1 \left(4 - \frac{3}{a_1} \right) - a_1 \\
&= 3a_1 - 3 \\
&= 9
\end{aligned}$$

よって、 $c_n = 9 \cdot 3^{n-1}$ より、 $c_n = 3^{n+1}$

(2)

(1)より、 $b_{n+1} - b_n = 3^{n+1}$

数列 $\{b_{n+1} - b_n\}$ は数列 $\{b_n\}$ の階差数列だから、

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\
&= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k+1} \\
&= 4 + \frac{3^{n+1} - 3^2}{3-1} \\
&= 4 + \frac{3^{n+1} - 9}{2} \\
&= \frac{3^{n+1} - 1}{2}
\end{aligned}$$

これは $b_1 = 4$ を満たす。

よって、 $b_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$

(3)

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= \frac{b_{n+1}}{b_n} \\
 &= \frac{\frac{3^{n+2}-1}{2}}{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \\
 &= \frac{3^{n+2}-1}{3^{n+1}-1}
 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} \quad (n=2, 3, \dots)$$

これは $a_1 = 4$ を満たす。

$$\text{ゆえに, } a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

補足：数学的帰納法から数列 $\{a_n\}$ を直接求める

$$a_1 = 4 = \frac{4}{1}, \quad a_2 = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}, \quad a_3 = 4 - \frac{3}{\frac{13}{4}} = \frac{40}{13}, \quad a_4 = 4 - \frac{3}{\frac{40}{13}} = \frac{121}{40}, \quad a_5 = 4 - \frac{3}{\frac{121}{40}} = \frac{364}{121}$$

数列 $\{a_n\}$ の分母の数列を $\{p_n\}$ とすると, $\{p_n\} = \{1, 4, 13, 40, 121, \dots\}$ より,

数列 $\{p_n\}$ の階差数列は 3^n であると推測されるから,

$n \geq 2$ のとき

$$p_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3^n - 3}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

これは $p_1 = 1$ を満たすから, 数列 $\{p_n\}$ の一般項は $p_n = \frac{3^n - 1}{2}$ と推測される。

同様に, 数列 $\{a_n\}$ の分子の数列は, 4, 13, 40, 121, 364 から, $\frac{3^{n+1}-1}{2}$ と推測される。

$$\text{これより, 数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は } a_n = \frac{\frac{3^{n+1}-1}{2}}{\frac{3^n-1}{2}} = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} \text{ と推測されるので,}$$

これを数学的帰納法で証明する。

【1】 $n=1$ のとき

$$a_1 = 4, \quad \frac{3^{1+1}-1}{3^1-1} = 4 \text{ より, } a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1} \text{ が成り立つ。}$$

【2】 $n=k$ のとき $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 4 - \frac{3}{a_k} \\ &= 4 - \frac{3}{\frac{3^{k+1}-1}{3^k-1}} \\ &= 4 - \frac{3(3^k-1)}{3^{k+1}-1} \\ &= \frac{4(3^{k+1}-1) - (3^{k+1}-3)}{3^{k+1}-1} \\ &= \frac{3 \cdot 3^{k+1} - 1}{3^{k+1}-1} \\ &= \frac{3^{k+2}-1}{3^{k+1}-1} \end{aligned}$$

これは $n=k+1$ のときも $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$ が成り立つことを示している。

よって、【1】、【2】より、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \frac{3^{n+1}-1}{3^n-1}$

27

(1)

$$(3 + \sqrt{5})^{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}(3 + \sqrt{5})^{n+1} &= (3 + \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})^n \\ &= (3 + \sqrt{5})(a_n + b_n\sqrt{5}) \\ &= 3a_n + 5b_n + (a_n + 3b_n)\sqrt{5}\end{aligned}$$

これと $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が自然数の数列であることから,

$(3 + \sqrt{5})^{n+1}$ の有理数部分の漸化式と無理数部分の漸化式はそれぞれ

$$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n, \quad b_{n+1}\sqrt{5} = (a_n + 3b_n)\sqrt{5}$$

よって,

$$a_{n+1} = 3a_n + 5b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

(2)

【1】 $n=1$ のとき

$$3 + \sqrt{5} = a_1 + b_1\sqrt{5} \text{ より, } a_1 = 3, b_1 = 1$$

$$\text{これより, } 3 - \sqrt{5} = a_1 - b_1\sqrt{5}$$

よって, $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つ。

【2】 $n=k$ のとき $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned}(3 - \sqrt{5})^{k+1} &= (3 - \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})^k \\ &= (3 - \sqrt{5})(a_k - b_k\sqrt{5}) \\ &= (3a_k + 5b_k) - (a_k + 3b_k)\sqrt{5}\end{aligned}$$

ここで, (1)より, $a_{k+1} = 3a_k + 5b_k$, $b_{k+1} = a_k + 3b_k$

$$\text{よって, } (3 - \sqrt{5})^{k+1} = a_{k+1} - b_{k+1}\sqrt{5}$$

これは $n=k+1$ のときも $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つことを示している。

よって, 【1】, 【2】より, すべての自然数 n について $(3 - \sqrt{5})^n = a_n - b_n\sqrt{5}$ が成り立つ。

(3)

$$a_n + b_n \sqrt{5} = (3 + \sqrt{5})^n \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_n - b_n \sqrt{5} = (3 - \sqrt{5})^n \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } 2a_n = (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n \quad \therefore a_n = \frac{(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n}{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } 2\sqrt{5}b_n = (3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n \quad \therefore b_n = \frac{\sqrt{5}\{(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n\}}{10}$$