13．運動量保存則

(3)

(2)の衝突後のリングの速度

n 回目の衝突後の質点とリングの速度をそれぞれ v_n，V_n とすると，

$\frac{v_1 - V_1}{v_0 - 0} = \frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} = -e$ より，

$\frac{v_1 - V_1}{v_0 - 0} \cdot \frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} = -e \cdot (-e)$

$\therefore \frac{v_2 - V_2}{v_0} = e^2$　・・・①

$\therefore v_2 = e^2 v_0 + V_2$　・・・②

運動量が保存されるから，

$mv_0 = mv_2 + MV_2$　・・・③

②，③より，$mv_0 = m(e^2 v_0 + V_2) + MV_2$

$\therefore V_2 = \frac{m \cdot (1 - e^2)}{m + M} v_0$

(2)の衝突後，次に質点が右側の側面 A に衝突するまでにかかる時間

リングから見た質点の速度 $= v_2 - V_2$

これと①より，$v_2 - V_2 = e^2 v_0 > 0$

よって，質点はリングに対し右向きに大きさ $e^2 v_0$ の相対速度で運動する。

ゆえに，$\frac{2a}{e^2 v_0}$

(4)

n 回目の衝突後の質点とリングの速度をそれぞれ v_n，V_n とすると，

$\frac{v_1 - V_1}{v_0 - 0} = \frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} = \cdots = \frac{v_n - V_n}{v_{n-1} - V_{n-1}} = -e$ より，

$\frac{v_1 - V_1}{v_0 - 0} \cdot \frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} \cdot \cdots \cdot \frac{v_n - V_n}{v_{n-1} - V_{n-1}} = (-e)^n$　$\therefore \frac{v_n - V_n}{v_0} = (-e)^n$

$\therefore \lim_{n \to \infty} (v_n - V_n) = v_0 \lim_{n \to \infty} (-e)^n = 0$　$(\because 0 < e < 1)$

よって，十分に時間が経過すると，相対速度 $v_n - V_n$ が 0 になる。

つまり，質点とリングが一体となって運動する。

このときの速度を u とすると，運動量保存則より，$mv_0 = (m + M)u$

$\therefore u = \frac{m}{m + M} v_0$

補足

失われた運動エネルギーの正体

n回目の衝突後の重心の速度$=\dfrac{mv_n+MV_n}{m+M}$

運動量保存則より，$mv_0=mv_n+MV_n$

よって，$n\to\infty$のとき，

重心の速度$V_{\mathrm{G}}=\dfrac{mv_0}{m+M}=\dfrac{mv_1+MV_1}{m+M}=\cdots=\dfrac{mv_n+MV_n}{m+M}=\cdots=\dfrac{mu+Mu}{m+M}=u$

つまり，運動量が保存されるとき，重心は等速度運動をする。

※はじめの運動量が0ならば，重心は静止し続ける。

上式の結果より，(4)で得られた速度uは重心の速度であり，

その運動エネルギーをv_0で表すと，

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2=\frac{1}{2}(m+M)\left(\frac{m}{m+M}v_0\right)^2=\frac{m^2}{2(m+M)}v_0^2$$

これより，

運動量が保存されるとき，最後まで残る運動エネルギーは重心の運動エネルギーである。

つまり，運動量が保存されるならば重心の運動エネルギーは保存される。

では，失われた運動エネルギーは何かというと，

衝突前の運動エネルギーについて，

重心の運動エネルギー$=\dfrac{m^2}{2(m+M)}v_0^2$

重心からみた質点の運度エネルギー$=\dfrac{1}{2}m\left(v_0-\dfrac{m}{m+M}v_0\right)^2=\dfrac{mM^2}{2(m+M)^2}v_0^2$

重心からみたリングの運度エネルギー$=\dfrac{1}{2}M\left(0-\dfrac{m}{m+M}v_0\right)^2=\dfrac{m^2M}{2(m+M)^2}v_0^2$

これらの運動エネルギーの和をとると，

$$\frac{m^2}{2(m+M)}v_0^2+\frac{mM^2}{2(m+M)^2}v_0^2+\frac{m^2M}{2(m+M)^2}v_0^2=\frac{m^2(m+M)+mM^2+m^2M}{2(m+M)^2}v_0^2$$
$$=\frac{1}{2}mv_0^2$$

一方，衝突直前の全運動エネルギーは$\dfrac{1}{2}mv_0^2$

重心の運動エネルギーは保存されるから，失われたエネルギーは，

衝突前の重心から見た質点とリングの運動エネルギーである。

参照：物理小ネタ「運動量保存則と質点の運動エネルギーと重心の運動エネルギー」

運動量保存と質点の運動エネルギー・重心の運動エネルギー

1. 質点の運動エネルギーの和＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の運動エネルギーの和

証明

重心の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{X}$，$\vec{V}$

質点の位置，速度のベクトルをそれぞれ $\vec{x}_i$，$\vec{v}_i$ で表すと，

$$\vec{X}=\frac{\sum m_i\vec{x}_i}{\sum m_i}=\frac{\sum m_i\vec{x}_i}{M} \text{ より，} \quad \vec{V}=\frac{d\vec{X}}{dt}=\frac{\sum m_i\left(\frac{d\vec{x}_i}{dt}\right)}{M}=\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{M}$$

$$\therefore M\vec{V}=\sum m_i\vec{v}_i \quad ・・・①$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)^2&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i{}^2-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}\vec{V}^2\sum m_i\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i{}^2-\vec{V}\sum m_i\vec{v}_i+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i{}^2-\vec{V}M\vec{V}+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}M\vec{V}^2+\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i{}^2-M\vec{V}^2+\frac{1}{2}M\vec{V}^2\\&=\frac{1}{2}\sum m_i\vec{v}_i{}^2\end{aligned}$$

2. 重心から見た質点の運動量の総和は **0** である。

証明

式①より，$\sum m_i\vec{v}_i-M\vec{V}=0$

ここで，$M\vec{V}=\sum m_i\vec{V}$ より，$\sum m_i\vec{v}_i-\sum m_i\vec{V}=0 \quad \therefore \sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)=0$

$m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)$は重心から見た質点の運動量を表すから，

$\sum m_i\left(\vec{v}_i-\vec{V}\right)=0$ は，重心から見た質点の運動量の総和は 0 であることを示している。

3. 質点の運動量の総和が保存されることと重心の運動エネルギーが保存されることは同値

証明

式①の右辺は質点の運動量の総和を表している。

よって，質点の運動量が保存されるならば，$\sum m_i \vec{v}_i = \vec{C}$ （$\vec{C}$ は定ベクトル）

これと $M\vec{V} = \sum m_i \vec{v}_i$ より，$M\vec{V} = \vec{C}$ $\quad \therefore \vec{V} = \dfrac{\vec{C}}{M}$

よって，重心の速度 $\vec{V}$ は一定である。

ゆえに，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ は一定，すなわち重心の運動エネルギーは保存される。

逆に，$\dfrac{1}{2}M\vec{V}^2$ が一定ならば，$\sum m_i \vec{v}_i$ すなわち質点の運動量の総和は保存される。

補足

質点の運動エネルギー＝重心の運動エネルギー＋質点の重心に対する相対運動エネルギー
より，質点の運動エネルギーが保存されるとき，重心の運動エネルギーも保存される。
重心の運動エネルギーが保存されることと質点の運動量が保存されることは同値だから，
このとき質点の運動量も保存される。
しかし，質点の運動量が保存されても，重心の運動エネルギーは保存されるが，
質点の運動エネルギーが保存されるとは限らない。
つまり，
「質点の運動エネルギーが保存される⇒質点の運動量が保存される」は常に成り立つが，
逆は常には成り立たない。