16. 保存則

(3) 解説補充

木材と弾丸から成る系のエネルギー保存則で解く場合

衝突直前の弾丸の運動エネルギー＝

一体となったときの運動エネルギー＋摩擦力の仕事で発生する熱エネルギー

摩擦力は弾丸と木材の接触によるから，その仕事の大きさは Fd' で，

これが熱エネルギーになる。よって， $\frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}(m+M)v^2+Fd'$

エネルギーとされた仕事の関係式を弾丸，木材それぞれについて立てて解く場合

弾丸と木材が一体となるまで，

つまり弾丸と木材の速度が等しくなるまでの木材の移動距離を X とすると，

木材が弾丸から抵抗力を受けた距離は X，

弾丸が木材から抵抗力を受けた距離は，弾丸が入り込んだ深さを d' とすると， $X+d'$

仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積だから，

抵抗力が木材にした仕事は $\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X\cdot\cos 0°=\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X$

抵抗力が弾丸にした仕事は $\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')\cdot\cos 180°=-\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')$

弾丸と木材が一体となったときの速度を v とすると，

仕事を受ける前の物体の運動エネルギー＋物体にした仕事

＝仕事を受けた後の運動エネルギー

より，それぞれの運動エネルギーは，

$$0+\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X=\frac{1}{2}Mv^2 \quad ・・・①$$

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+\left\{-\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')\right\}=\frac{1}{2}mv^2 \quad ・・・②$$

①＋②より， $\frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot d'=\frac{1}{2}(m+M)\cdot v^2$ ・・・③

弾丸と木材に働く運動方向に平行な力は，抵抗力（作用・反作用の力）だけだから，

運動量が保存される。

よって， $mv_0=mv+Mv \quad \therefore v=\frac{m}{m+M}v_0$ ・・・④

③，④より， $d'=\frac{M}{m+M}d$

別解

問題**15**および物理小ネタ「運動量保存則と質点の運動エネルギーと重心の運動エネルギー」を参照のこと

系のはじめの運動エネルギー

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \cdot\cdot\cdot ①$$

弾丸と木材が一体となったときの系の運動エネルギー

質点の全運動エネルギー

＝重心の運動エネルギー＋重心から見た質点の全運動エネルギー

について，

重心の速度＝弾丸の速度＝木材の速度より，

重心から見た弾丸の速度＝重心から見た木材の速度＝0

また，弾丸と木材の運動系に外力が働かないから，系全体の運動量が保存される。

運動量が保存されるとき，系の重心は等速度運動をするから，

この場合，重心は $\dfrac{mv_0}{m+M}$ で等速度運動をする

よって，質点の全運動エネルギーは，$0+\dfrac{1}{2}(m+M)\left(\dfrac{mv_0}{m+M}\right)^2$ より，

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}{v_0}^2 \quad \cdot\cdot\cdot ②$$

この運動系に対し抵抗力がした仕事を $\boldsymbol{W}$ とすると

①，②より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2+W=\frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}{v_0}^2$$

$$\therefore W=-\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}{v_0}^2 \quad \cdot\cdot\cdot ③$$

$\boldsymbol{W}$ について

弾丸と木材が一体となるまで，

つまり弾丸と木材の速度が等しくなるまでの木材の移動距離を X とすると，

木材が弾丸から抵抗力を受けた距離は X，

弾丸が木材から抵抗力を受けた距離は，弾丸が入り込んだ深さを d' とすると，$X+d'$

仕事は力ベクトルと変位ベクトルの内積だから，

抵抗力が木材にした仕事は，$\dfrac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X\cdot\cos 0°=\dfrac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X$

抵抗力が弾丸にした仕事は，$\dfrac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')\cdot\cos 180° = -\dfrac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')$

抵抗力が運動系にした仕事は,
抵抗力が木材にした仕事と抵抗力が弾丸にした仕事の和で与えられるから，

$$W=\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot X+\left\{-\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot(X+d')\right\}=-\frac{m{v_0}^2}{2d}\cdot d' \quad \cdot\cdot\cdot④$$

とも表せる。

③，④より，$d'=\dfrac{M}{m+M}d$