31．円運動・単振動

(3)

4．単振り子の運動方程式と単振動の式

まずは，用語の定義から

単振り子

　軽い糸の上端を固定して下端におもりをつるし，これを鉛直面内で振動させるもの

振り子

　定点のまわりに振動する物体

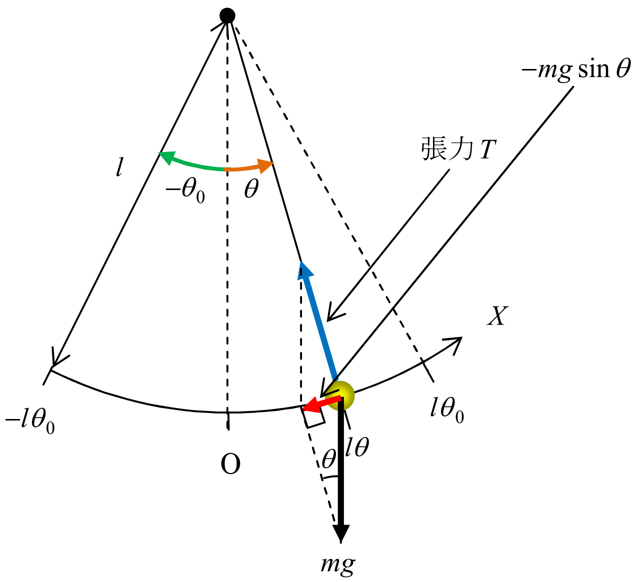
では，本題

質量 m の振り子に働く外力のつり合いの位置を原点 O とし，

X 軸を振り子の軌道（円弧）の反時計まわりの向きにとる。

また，振り子の振幅の大きさを $l\theta_0$ とし，θ_0 は十分小さいものとする $(\theta_0 \approx 0)$。

ただし，図は，見やすくするため θ_0 をわざと大きくとった。



単振り子の運動方程式

単振り子は軌道（円弧）の接線方向の外力により速度を変化させ単振動運動をする。
糸の張力Tの円弧の接線方向の分力は0だから，
張力Tは単振り子の運動方程式の外力に含まれない。
単振り子の単振動運動の原動力となる外力は，重力の円弧の接線成分$-mg\sin\theta$である。
よって，振り子の単振動の運動方程式は，
$ma=-mg\sin\theta$
ここで，$|\theta|<\theta_0\approx 0$だから，$\sin\theta=\theta$としてよい。
$\therefore ma=-mg\theta$　・・・①
また，振り子の変位$X=l\theta$　・・・②
①，②より，$ma=-mg\cdot\dfrac{X}{l}$　・・・③

$\therefore ma=-\dfrac{mg}{l}X$　・・・④

$\dfrac{mg}{l}$は定数だから，運動方程式③は単振動を表す運動方程式である。

単振動の式

振り子の振幅の大きさは$l\theta_0$であり，初期位相をα，角振動数を$\omega\ (>0)$とすると，
$X=l\theta_0\sin(\omega t+\alpha)$と表せる。

振り子の速度$v=\dfrac{dX}{dt}=l\theta_0\omega\cos(\omega t+\alpha)$

振り子の加速度$a=\dfrac{dv}{dt}=-l\theta_0\omega^2\sin(\omega t+\alpha)=-\omega^2X$　・・・⑤

単振動の式と単振動の運動方程式との融合

④より，$a=-\dfrac{g}{l}X$

⑤より，$a=-\omega^2X$

よって，$-\omega^2X=-\dfrac{g}{l}X$ならば，$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$　$\therefore T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

以上より，単振り子は振幅$l\theta_0$，周期$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$の単振動運動を行う。

補足

単振動の運動方程式の一般形$ma=-KX$と$ma=-\dfrac{mg}{l}X$を対応させると，$K=\dfrac{mg}{l}$

これを公式$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{K}}$に代入すると，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$が得られる。

(4)

地上で静止している観測者（地上の観測者）が見た場合

点 A で小球 P は電車に対して静止するから，電車に対する相対速度は 0 である。

すなわち小球 P の速度の水平成分と電車の速度が等しくなる。

そこで，このときの両者の速度を v_x とおく。

また，電車の速度の鉛直成分は 0 だから，

点 A で小球 P は電車に対して静止するということは，

点 A の小球の速度の鉛直成分が 0 であることを意味する。

したがって，地上の観測者が見るが小球 P の運動は水平投射となる。

鉛直方向は自由落下だから，床に衝突するまでの時間を t $(t>0)$ とすると，

$h=\frac{1}{2}gt^2$ より，$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

床に衝突するときの小球 P の電車に対する相対速度の大きさ

相対速度の大きさを u，その水平成分を u_x，その鉛直成分を u_y とする。

u_x について

小球の速度の水平成分は等速度運動より，v_x

電車は水平方向に等加速度 $g\tan\frac{\theta}{2}$ で運動するから $v_x+g\tan\frac{\theta}{2}\cdot t$

よって，$u_x=v_x-\left(v_x+g\tan\frac{\theta}{2}\cdot t\right)=-g\tan\frac{\theta}{2}\cdot t$

これと $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ より，$u_x=-g\tan\frac{\theta}{2}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=-\sqrt{2gh}\tan\frac{\theta}{2}$

u_y について

床に衝突するときの小球 P の鉛直成分は自由落下だから，gt

電車の速度の鉛直成分は 0

よって，$u_y=gt-0=gt$

これと $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ より，$u_y=\sqrt{2gh}$

よって，

$$u=\sqrt{u_x{}^2+u_y{}^2}=\sqrt{2gh\tan^2\frac{\theta}{2}+2gh}=\sqrt{2gh\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2gh}}{\cos\frac{\theta}{2}}$$