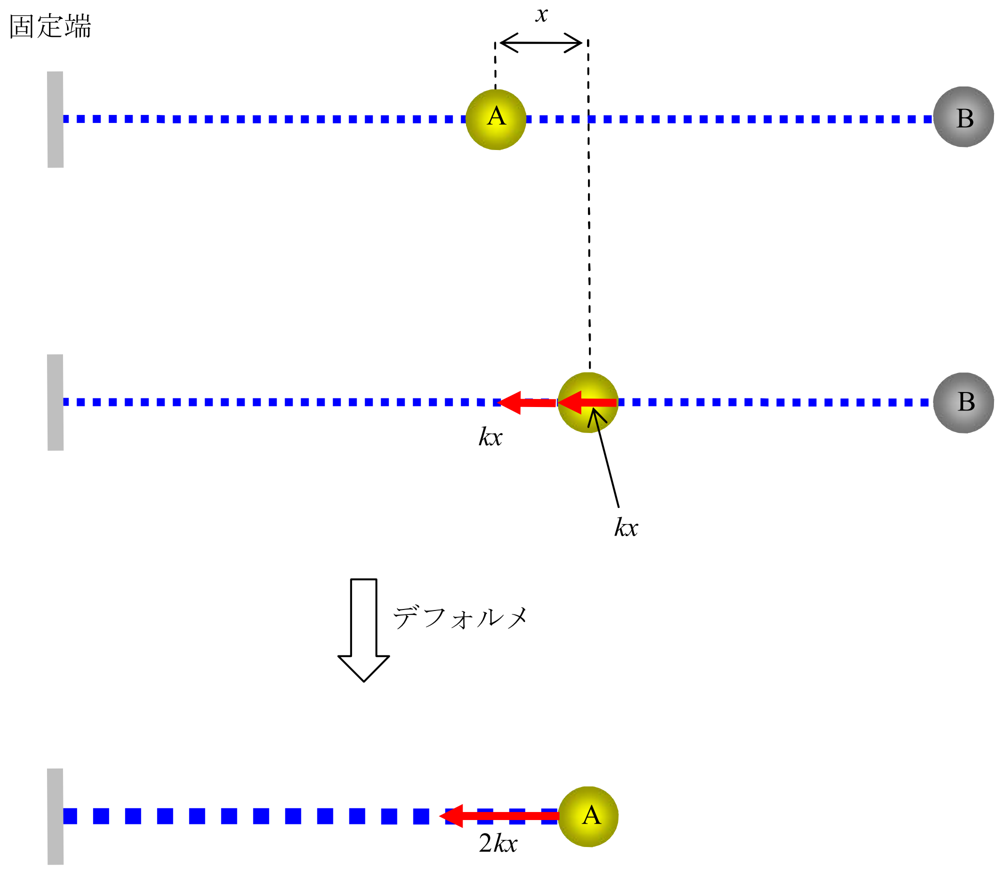
36. 単振動

(2)



A の単振動運動は，自然長 l，ばね定数 $2k$ のばねに結ばれた場合と同じ

よって，

A の振動の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ ・・・(答)

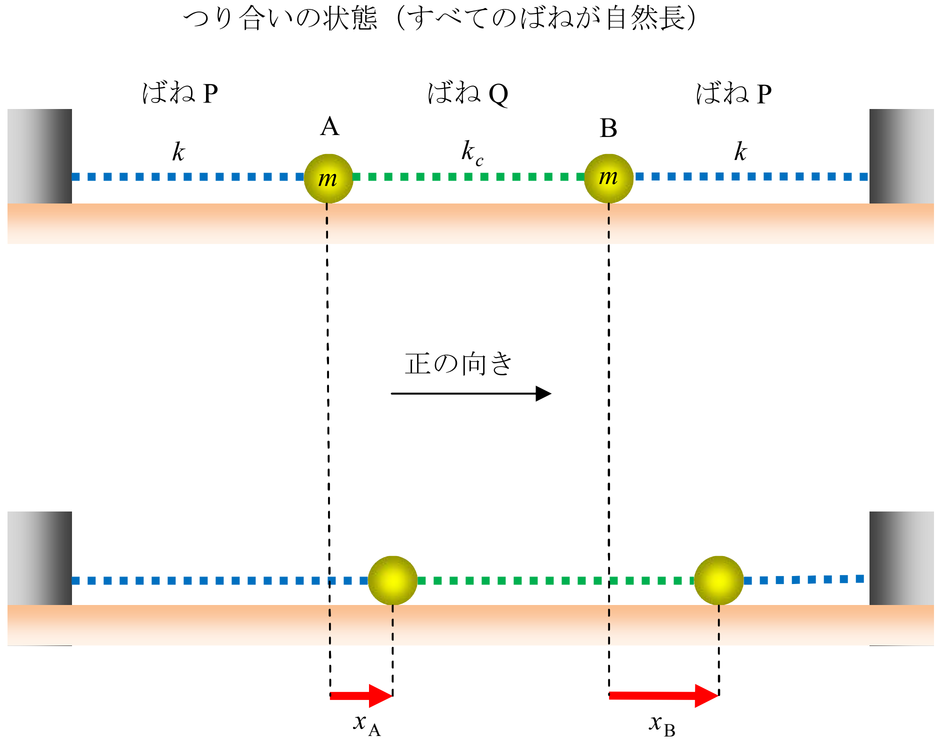
(3)

AB 間のばねを取り除き,
同じ向きに等しい大きさ d の変位を与えてから同時に静かに放した場合で考えると,
A と B は同振幅 (d)，同位相，同周期 $\left(2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}\right)$ の単振動運動を行う。
したがって，AB 間の距離は l のままである。

具体的には,
左端の固定端を 0 とする x 軸を右向きにとり，A の位置を x_A，B の位置を x_B，
A と B を同時に放した時刻を $t=0$ とすると,
$x_A = l + d\cos\omega t$，$x_B = 2l + d\cos\omega t$ $\left(\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$ より,
$AB = x_B - x_A = l$

つまり，A と B をばねで結んだところで，そのばねから受ける外力は 0,
すなわち AB 間のばねは単振動に影響を及ぼさない。
よって,
A の振動の周期は $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ ・・・(答)

連結振動



質量mの等しい 2 つの球 A と B が，図のように，
ばね P（ばね定数k）とばね Q（ばね定数k_c）の 3 個のばねに直線状に結ばれて，
摩擦のない水平面上に置かれている。
また，A と B の（変位，速度，加速度）をそれぞれ(x_A, v_A, a_A)，(x_B, v_B, a_B)とする。

A の運動方程式

$$ma_A = -kx_A + k_c(x_B - x_A) \quad ・・・①$$

補足

$x_A > 0$のとき，ばね P は自然長より長いから，ばね P から受ける力は負
逆に$x_A < 0$のときは正
$x_B - x_A > 0$のとき，ばね Q は自然長より長いから，ばね Q から受ける力は正
逆に，$x_B - x_A < 0$のときは負

B の運動方程式

$$ma_B = -kx_B - k_c(x_B - x_A) \quad ・・・②$$

①＋②

$m(a_{\mathrm{A}}+a_{\mathrm{B}})=-k(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})$ より，$m\dfrac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})=-k(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})=-\frac{k}{m}(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})$$

これは A と B の変位の和 $x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}$ も，角振動数を ω_1 とすると，

$\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ の単振動であることを示している。

したがって，初期位相を φ_1，振幅を A_1 とすると，

$x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$ ・・・③

または，周期を T_1 とすると，

$$x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=A_2\sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t+\varphi_1\right)$$

と表せる。

①－②

$$m(a_{\mathrm{A}}-a_{\mathrm{B}})=-k(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})+2k_c(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})$$

$$\therefore m(a_{\mathrm{A}}-a_{\mathrm{B}})=-(k+2k_c)(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})$$

$$\therefore \frac{d^2}{dt^2}(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})=-\frac{k+2k_c}{m}(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})$$

これは A と B の変位の差も，角振動数を ω_2 とすると，

$\omega_2=\sqrt{\dfrac{k+2k_c}{m}}$ の単振動であることを示している。

したがって，初期位相を φ_2，振幅を A_2 とすると，

$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$ ・・・④

または，周期を T_2 とすると，

$$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=A_2\sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t+\varphi_2\right)$$

と表せる。

以上より，

変位について

A と **B** の変位の和

$$x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$$

A と **B** の変位の差

$$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

また，これら 2 つの式より，

$$x_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\{A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\{A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)-A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

速度について

A と **B** の速度の和

$$v_{\mathrm{A}}+v_{\mathrm{B}}=\omega_1 A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$

A と **B** の速度の差

$$v_{\mathrm{A}}-v_{\mathrm{B}}=\omega_2 A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

また，これら 2 つの式より，

$$v_{\mathrm{A}}=\frac{dx_{\mathrm{A}}}{dt}=\frac{1}{2}\{\omega_1 A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+\omega_2 A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

$$v_{\mathrm{B}}=\frac{dx_{\mathrm{B}}}{dt}=\frac{1}{2}\{\omega_1 A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-\omega_2 A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

加速度について

A と **B** の加速度の和

$$a_{\mathrm{A}}+a_{\mathrm{B}}=-\omega_1{}^2 A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)=-\omega_1{}^2(x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}})$$

A と **B** の加速度の差

$$a_{\mathrm{A}}-a_{\mathrm{B}}=-\omega_2{}^2 A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)=-\omega_2{}^2(x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}})$$

また，これら 2 つの式より，

$$a_{\mathrm{A}}=\frac{d^2x_{\mathrm{A}}}{dt^2}=-\frac{1}{2}\{\omega_1{}^2 A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+\omega_2{}^2 A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

$$a_{\mathrm{B}}=\frac{d^2x_{\mathrm{B}}}{dt^2}=-\frac{1}{2}\{\omega_1{}^2 A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)-\omega_2{}^2 A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

ただし，$\omega_1=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，$\omega_2=\sqrt{\dfrac{k+2k_c}{m}}$

$\mathbf{A_1}$ と $\mathbf{A_2}$ について

$t=0$ のとき $x_\mathrm{A}=d_\mathrm{A}$, $x_\mathrm{B}=d_\mathrm{B}$ の位置でAとBを放し,単振動運動を開始したとすると,

このとき $v_\mathrm{A}=v_\mathrm{B}=0$ より，運動エネルギーは0だから,

単振動の力学的エネルギー保存則より,

$|d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}|=A_1$，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$ が成り立つ。

実際,

$t=0$ のとき

$x_\mathrm{A}=d_\mathrm{A}$，$x_\mathrm{B}=d_\mathrm{B}$ より,

$$d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}=A_1\sin\varphi_1$$

$$d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}=A_2\sin\varphi_2$$

が成り立つ。

また,

$v_\mathrm{A}=v_\mathrm{B}=0$ より,

$$0+0=\omega_1A_1\cos\varphi_1,\quad 0-0=\omega_2A_2\cos\varphi_2$$

$$\therefore A_1\cos\varphi_1=A_2\cos\varphi_2=0\qquad(\because \omega_1\neq 0,\omega_2\neq 0)$$

ここで,

$d_\mathrm{A}\neq\pm d_\mathrm{B}$ のとき

$d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}=A_1\sin\varphi_1\neq 0$，$d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}=A_2\sin\varphi_2\neq 0$ より,

$A_1\neq 0$，$A_2\neq 0$

これと $A_1\cos\varphi_1=A_2\cos\varphi_2=0$ より，$\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=0$

$\therefore \sin\varphi_1=\pm 1$，$\sin\varphi_2=\pm 1$

$\therefore d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}=\pm A_1$，$d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}=\pm A_2$

$\therefore |d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}|=A_1$，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$

$d_\mathrm{A}=d_\mathrm{B}$ のとき

$d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}=A_1\sin\varphi_1\neq 0$，$d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}=A_2\sin\varphi_2=0$

$d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}=A_1\sin\varphi_1$ については,

上と同様にして，$|d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}|=A_1$ が成り立つことがわかる。

$d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}=A_2\sin\varphi_2=0$ については,

$A_2=0$ または $\sin\varphi_2=0$

$A_2=0$ とすると，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$ が成り立つ。

$\sin\varphi_2=0$ とすると，$\cos\varphi_2=\pm 1$

これと $A_2\cos\varphi_2=0$ より，$A_2=0$

よって，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$ が成り立つ。

$\therefore |d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}|=A_1$，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$

同様に，$d_\mathrm{A}=-d_\mathrm{B}$ のときも $|d_\mathrm{A}+d_\mathrm{B}|=A_1$，$|d_\mathrm{A}-d_\mathrm{B}|=A_2$ が成り立つ。

問題 36 における A と B の振動の式

A と B の変位を表す式

$$x_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\{A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\{A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)-A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\}$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{k}{m}}\,,\quad \omega_2=\sqrt{\frac{3k}{m}}\qquad (\because k_c=k)$$

(1)の場合の A と B の変位を表す式

$A_1=\dfrac{d}{2}+d=\dfrac{3}{2}d$ ， $A_2=\left|\dfrac{d}{2}-d\right|=\dfrac{d}{2}$ より，

$$x_{\mathrm{A}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}d\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{d}{2}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\right\}=\frac{3}{4}d\sin(\omega_1 t+\varphi_1)+\frac{d}{4}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}d\sin(\omega_1 t+\varphi_1)-\frac{d}{2}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\right\}=\frac{3}{4}d\sin(\omega_1 t+\varphi_1)-\frac{d}{4}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$$

また， $t=0$ のとき， $x_{\mathrm{A}}=\dfrac{d}{2}$， $x_{\mathrm{B}}=d$ だから，

$$\frac{d}{2}=\frac{3}{4}d\sin\varphi_1+\frac{d}{4}\sin\varphi_2\,,\quad d=\frac{3}{4}d\sin\varphi_1-\frac{d}{4}\sin\varphi_2$$

よって，

$3\sin\varphi_1+\sin\varphi_2=2$ ， $3\sin\varphi_1-\sin\varphi_2=4$

$\therefore \sin\varphi_1=1$ ， $\sin\varphi_2=-1$

よって， $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$， $\varphi_2=-\dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$$x_{\mathrm{A}}=\frac{3}{4}d\cos\omega_1 t-\frac{d}{4}\cos\omega_2 t$$

$$x_{\mathrm{B}}=\frac{3}{4}d\cos\omega_1 t+\frac{d}{4}\cos\omega_2 t$$

$$x_{\mathrm{A}}+x_{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}d\cos\omega_1 t$$

$$x_{\mathrm{A}}-x_{\mathrm{B}}=-\frac{d}{2}\cos\omega_2 t$$

(2)の場合の **A** と **B** のの変位を表す式

$A_1 = d + 0 = d$， $A_2 = d - 0 = d$ より，

$$x_A = \frac{1}{2}\{d\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

$$x_B = \frac{1}{2}\{d\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\}$$

また， $t = 0$ のとき， $x_A = d$， $x_B = 0$ だから，

$$d = \frac{1}{2}d\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}d\sin\varphi_2, \quad 0 = \frac{1}{2}d\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}d\sin\varphi_2$$

$\therefore \sin\varphi_1 = 1$， $\sin\varphi_2 = 1$

よって， $\varphi_1 = \varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$$x_A = \frac{1}{2}d(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = d\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \cdot \cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$$

$$x_B = \frac{1}{2}d(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) = d\sin\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t \cdot \sin\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$$

$$x_A + x_B = d\cos\omega_1 t$$

$$x_A - x_B = d\cos\omega_2 t$$

(3)の場合の A と B の変位を表す式

$A_1 = d + d = 2d$， $A_2 = d - d = 0$ より，

$$x_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\{2d\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + 0\} = d\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\{2d\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - 0\} = d\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$$

また， $t = 0$ のとき， $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} = d$ だから， $d = d\sin\varphi_1$

$\therefore \sin\varphi_1 = 1$

よって， $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} = d\cos\omega_1 t$

ただし， $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

よって，A と B は AB 間の距離 l を保ったまま，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ の単振動運動を行う。

(4)の場合の A と B の変位を表す式

$A_1 = d + (-d) = 0$， $A_2 = d - (-d) = 2d$ より，

$$x_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}\{0 + 2d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\} = d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$x_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\{0 - 2d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\} = -d\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

また， $t = 0$ のとき， $x_{\mathrm{A}} = d$， $x_{\mathrm{B}} = -d$ だから， $d = d\sin\varphi_2$， $-d = -d\sin\varphi_2$

$\therefore \sin\varphi_2 = 1$

よって， $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ とすると，

$x_{\mathrm{A}} = d\cos\omega_2 t$， $x_{\mathrm{B}} = -d\cos\omega_2 t$

ただし， $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

よって，互いに A と B は逆位相の関係で，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{3k}}$ の単振動運動を行う。

ばねのつなぎ方と合成ばね定数

弾性力

ばねなど弾性体が外力により変形すると，弾性体には元に戻ろうとする力が生じる。

この力を「弾性力」または単に「弾力」という。

ばねの弾性力の大きさ（フックの法則）

ばねの弾性力の大きさ$|F|$は，

ばねの自然長からの変位の大きさ（伸びや縮みの長さ）$|x|$に比例し，

比例定数をkとすると，

$|F|=k|x|$ （比例定数$\boldsymbol{k}$をばね定数という）

と表される。

これをフックの法則という。

ちなみにフックはコルクの軽さと強さに興味をもち，自ら作った顕微鏡でコルクを観察し，発見した空洞を cell（細胞）と名付けたことで，どの高校生物教科書にも取り上げられている。

弾性力$\boldsymbol{F}$と変位$\boldsymbol{x}$の関係式

ばねが伸びたときの弾性力の向きは縮む向き，

ばねが縮んだときの弾性力の向きは伸びる向き

より，

変位xと弾性力Fの向きは互いに逆向きである。

よって，

弾性力と変位の関係式は，$F=-kx$と表される。

ばねのつなぎ方と合成ばね定数

複数つないだばねを 1 つのばねと見なしたときのばね定数を合成ばね定数という。

ばねを直列につないだときの合成ばね定数

ばね定数がk_1（青），k_2（茶），k_3（赤）のばねを直列につなぎ（図 1 上段），

大きさFの外力で引くと，それぞれのばねの伸びがx_1，x_2，x_3となって力がつり合ったとすると（図 1 中段），各接触点では作用反作用の力により力の大きさがつり合うから，

$F=k_3x_3$，$k_3x_3=k_2x_2$，$k_2x_2=k_1x_1$，$k_1x_1=F'$より，

$F=k_3x_3=k_2x_2=k_1x_1=F'$

よって，$x_1=\dfrac{F}{k_1}$，$x_2=\dfrac{F}{k_2}$，$x_3=\dfrac{F}{k_3}$　・・・①

次に，これを 1 本のばねとみなし（図 1 下段），そのばね定数を k_T とすると，
ばねの伸びは $x_1+x_2+x_3$ だから，
$k_T(x_1+x_2+x_3)=F$ より，

$$x_1+x_2+x_3=\frac{F}{k_T} \quad \cdots ②$$

①，②より，

$$\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2}+\frac{F}{k_3}=\frac{F}{k_T}$$

よって，

$$\frac{1}{k_T}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}$$

これを一般化すると，

$$\frac{1}{k_T}=\sum_{i=1}\frac{1}{k_i}$$

とくに，ばね定数が同じばねを n 本直列につないだ場合，ばね定数を k とすると，

$\dfrac{1}{k_T}=\dfrac{n}{k}$ より，$k_T=\dfrac{k}{n}$

つまり，直列につなぐばねの数を 2,3,4,… 本としていくと，

合成ばね定数 k_T は，$\dfrac{k}{2},\dfrac{k}{3},\dfrac{k}{4},\cdots$ と本数の逆数に比例して小さくなっていく。

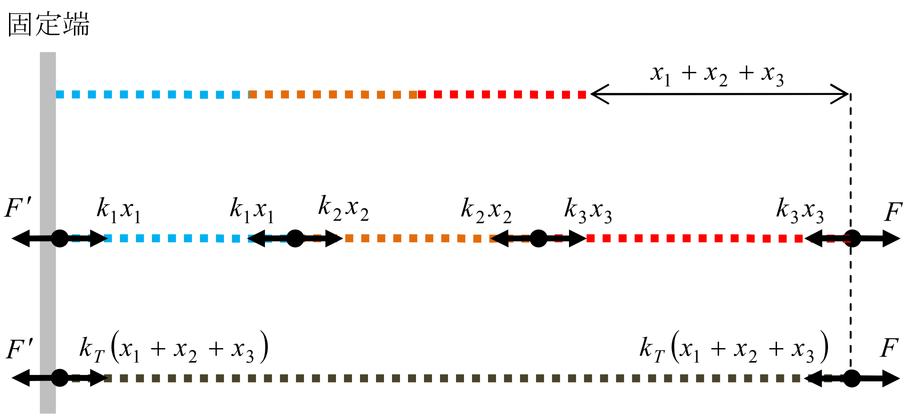


図 1

ばねを並列につないだときの合成ばね定数

ばね定数がk_1（青），k_2（茶），k_3（赤）のばねを束ねて，大きさFの外力で引くと，伸びがxのとき，力がつり合ったとする（図 2）。

このとき，

$k_1x + k_2x + k_3x = F$　・・・③

が成り立つ。

束ねたばねを 1 本のばねと見なし，そのばね定数をk_Tとすると，

$k_Tx = F$　・・・④

③，④より，

$k_Tx = k_1x + k_2x + k_3x$

よって，

$k_T = k_1 + k_2 + k_3$

これを一般化すると，

$$k_T = \sum_{i=1} k_i$$

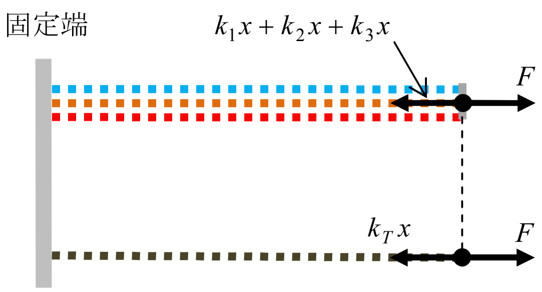


図 2

間に物体をはさんだときの合成ばね定数

自然長の状態の 2 つのばねが，間に物体をはさんで，つながっている（図 3-1）。

（ばね定数：k_1（青），k_2（茶））

この物体をばねの向きに大きさ F の外力で引いたときの変位の大きさを x とする（図 3-2）。

このときの力のつり合いは，

$k_1 x + k_2 x = F$　・・・⑤

このばねを 1 本のばねと見なし，そのばね定数 k_T とすると（図 3-3 あるいは図 3-4），

$k_T x = F$　・・・⑥

⑤，⑥より，

$k_T x = k_1 x + k_2 x$

よって，

$k_T = k_1 + k_2$

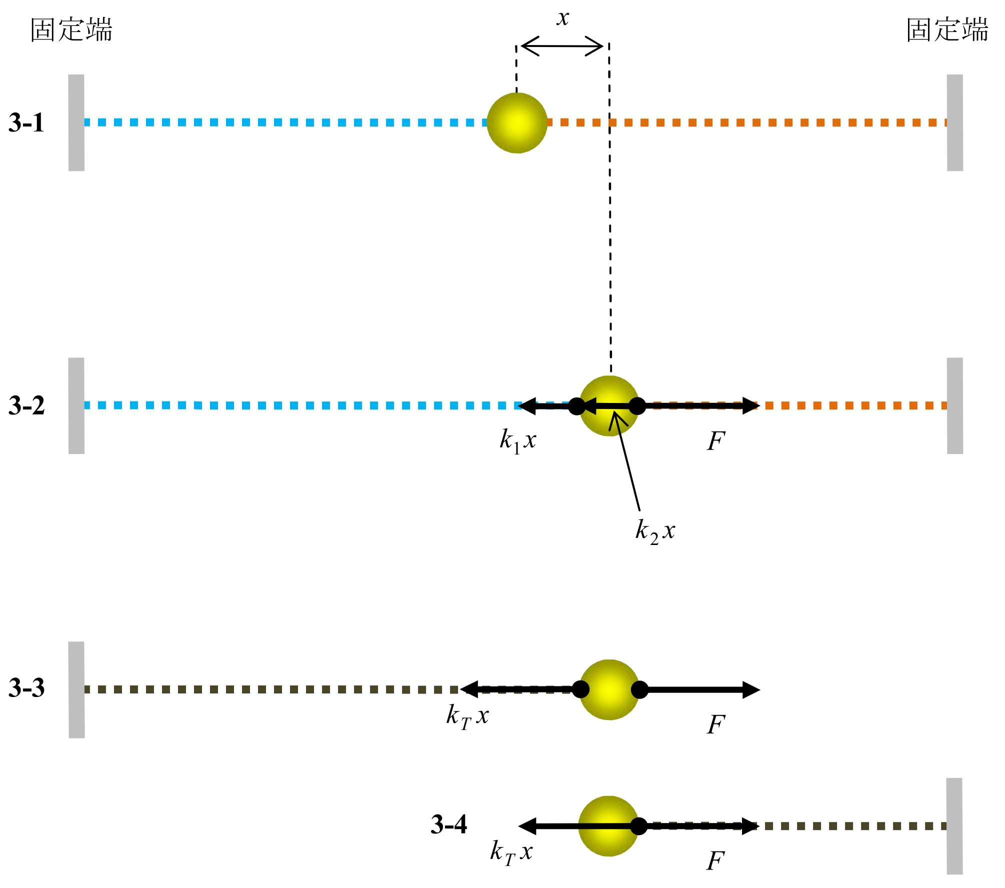


図 3

図 3-1 は単振動問題でよく見かけるタイプの図であるが，

図 3-3 あるいは図 3-4 のようにデフォルメするとわかりやすくなる。