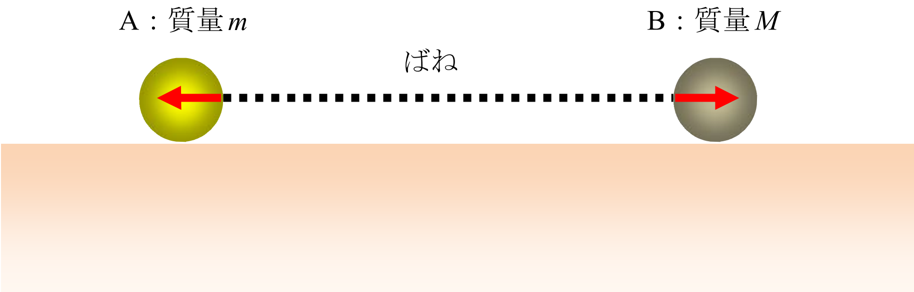
37.　単振動

(2)



たとえば，ばねが自然長より短くなったとき，

A と B それぞれはばねから大きさが同じで向きが逆の弾性力を受ける。

ばねが自然長より長くなったときも同じである。

また，自然長のときはばねから受ける弾性力は 0 である。

以上より，A がばねから受ける力積と B がばねから受ける力積の和は常に 0 である。

したがって，A と B からなる系の水平方向の運動量は常に保存され，

保存される系の運動量は，C との衝突直後の A の速度が v_0，B の速度が 0 だから，

$mv_0 + m \cdot 0 = mv_0$ である。

よって，$mv_A + mv_B = mv_0$

ゆえに，$mv_G = \dfrac{mv_A + mv_B}{m+m} = \dfrac{mv_0}{2m} = \dfrac{v_0}{2}$

(3)　別解

$mv_A + mv_B = mv_0$ より，$v_A + v_B = v_0$　・・・①

AB 間の距離が最大または最小となるとき，A（B）から見ると B（A）が静止する。

すなわち A から見た B の速度が 0 になる。

よって，$v_A = v_B$　・・・②

①，②より，$v_A = v_B = \dfrac{v_0}{2}$

このときのばねの自然長からの伸びを x とすると，

衝突直後と AB 間の距離が最大または最小になったときの力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \therefore x = \pm v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

ゆえに，$l_1 = l_0 - v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$，$l_2 = l_0 + v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

(4)

重心から見た A の運動は単振動である。

右方向を正とすると，この単振動について，

振幅

(3)より，A の変位の最大値，すなわち振幅は$\dfrac{l_0+v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}}{2}-\dfrac{l_0}{2}=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ ・・・①

角振動数

G から見ると A はばね定数$2k$のばねにつながれているから，

G から見た A のつり合いの位置（自然長）からの変位をx_{GA}とすると，

A の運動方程式は$ma=-2kx_{\mathrm{GA}}$

よって，$\omega=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ ・・・②

G から見た A の変位の式

$t=0$で振動中心を右向きに通過するから，$t=0$の位相（初期位相）は 0

これと①，②より，$x_{\mathrm{GA}}=\dfrac{v_0}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$

G から見た A の速度

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{GA}}&=\frac{dx_{\mathrm{GA}}}{dt}\\
&=\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}\sqrt{\frac{2k}{m}}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t\\
&=\frac{v_0}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t
\end{aligned}
$$

水平面上から見た A の速度

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{A}}&=V_{\mathrm{G}}+v_{\mathrm{GA}}\\
&=\frac{v_0}{2}+\frac{v_0}{2}\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t\\
&=\frac{v_0}{2}\left(1+\cos\sqrt{\frac{2k}{m}}t\right)
\end{aligned}
$$
・・・(答)

補足

この方法に慣れれば，

$t=0$で振動中心を右向きに G からみて最大速度$\dfrac{v_0}{2}$で通過するから，$v_{\mathrm{GA}}=\dfrac{v_0}{2}\cos\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$

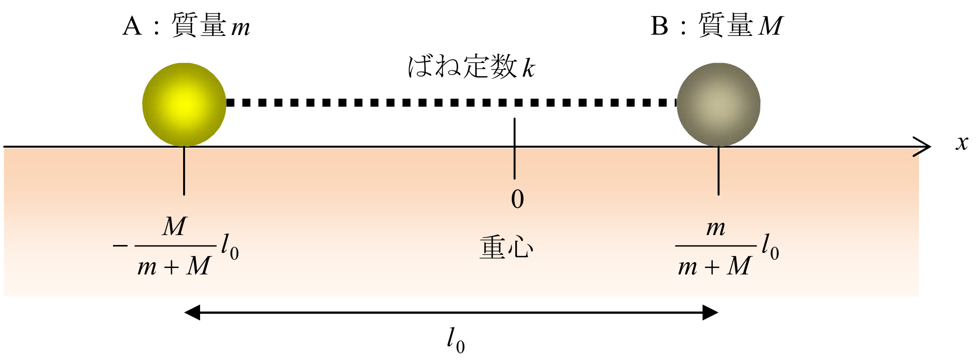
とすぐ求められるようになる。

ばねにつながれた 2 物体の重心から見た運動

質量 m の物体 A と質量 M の物体 B が自然長 l_0 , ばね定数 k のばねにつながれているとする。
尚，床は滑らかである。
また，重心の座標を 0 とする x 軸を右方向にとる。

自然長のとき

物体 A と物体 B の座標



重心からの物体の距離の比は物体の質量の逆比と等しいから，

A と重心の距離：B と重心の距離＝$\frac{1}{m}$ ： $\frac{1}{M}$ ＝ M ： m

よって，重心の x 座標を 0 とすると，

自然長のときの A と B の座標はそれぞれ $-\frac{M}{m+M}l_0$ ， $\frac{m}{m+M}l_0$

重心から見たばね定数

重心から見たときの A 側のばね定数を k_A とすると， $k_A = \frac{l_0}{\frac{M}{m+M}l_0}k = \frac{m+M}{M}k$

重心から見たときの B 側のばね定数を k_B とすると， $k_B = \frac{l_0}{\frac{m}{m+M}l_0}k = \frac{m+M}{m}k$

重心から見た単振動運動の周期

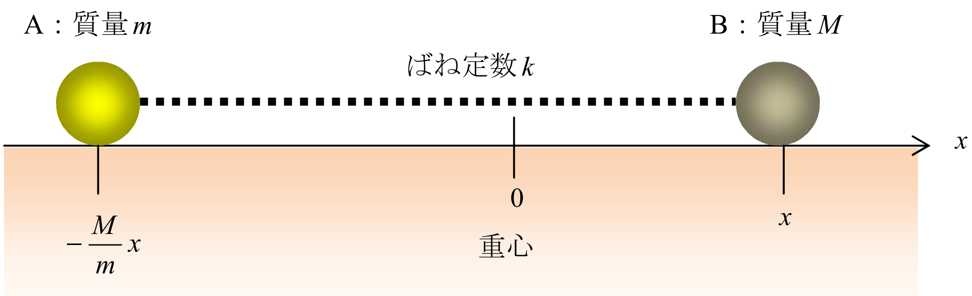
A の単振動運動の周期を T_A とすると， $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_A}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$

B の単振動運動の周期を T_B とすると， $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_B}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$

$\therefore T_A = T_B$

重心から見た A と B の運動方程式

B の変位が x のときの A と B の運動方程式



重心からの物体の距離の比は物体の質量の逆比と等しいから,

A と重心の距離：B と重心の距離$=\dfrac{1}{m}:\dfrac{1}{M}=M:m$

よって，B の座標を x とすると，A の座標は，$-\dfrac{M}{m}x$

このときの A の加速度を a_{A}，B の加速度を a_{B} とすると,

それぞれの運動方程式は,

$$ma_{\mathrm{A}}=-k_{\mathrm{A}}\left\{-\frac{M}{m}x-\left(-\frac{M}{m+M}l_0\right)\right\}\quad\cdot\cdot\cdot①$$

補足：$F=-kx$ となる理由

$$|F|=k_{\mathrm{A}}\left|-\frac{M}{m}x-\left(-\frac{M}{m+M}l_0\right)\right|$$

A が自然長の位置より左にあるとき,

すなわち $-\dfrac{M}{m}x-\left(-\dfrac{M}{m+M}l_0\right)<0$ のとき，$F>0$（力は正の向き）

A が自然長の位置より右にあるとき,

すなわち $-\dfrac{M}{m}x-\left(-\dfrac{M}{m+M}l_0\right)>0$ のとき，$F<0$（力は負の向き

より,

$$F=-k_{\mathrm{A}}\left\{-\frac{M}{m}x-\left(-\frac{M}{m+M}l_0\right)\right\}$$

$$Ma_{\mathrm{B}}=-k_{\mathrm{B}}\left(x-\frac{m}{m+M}l_0\right)\quad\cdot\cdot\cdot②$$

①，②に $k_{\mathrm{A}}=\dfrac{m+M}{M}k$，$k_{\mathrm{B}}=\dfrac{m+M}{m}k$ を代入し整理すると,

$$ma_{\mathrm{A}} = -\frac{m+M}{M}k\left(-\frac{M}{m}x + \frac{M}{m+M}l_0\right)$$

$$Ma_{\mathrm{B}} = -\frac{m+M}{m}k\left(x - \frac{m}{m+M}l_0\right)$$

よって,

$$mMa_{\mathrm{A}} = -(m+M)k\left(-\frac{M}{m}x + \frac{M}{m+M}l_0\right) \quad ・・・③$$

$$mMa_{\mathrm{B}} = -(m+M)k\left(x - \frac{m}{m+M}l_0\right) \quad ・・・④$$

A から見た B の運動方程式

④－③より,

$$mM(a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}) = -(m+M)k\left\{\left(1+\frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$$

ここで,

$\left(1+\frac{M}{m}\right)x = x + \frac{M}{m}x$ の x は重心と B の距離, $\frac{M}{m}x$ は重心と A の距離だから,

$\left(1+\frac{M}{m}\right)x$ は AB 間の距離, すなわちばねの全長である。

したがって, $\left\{\left(1+\frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$ はばね全体の伸びを表す。

ゆえに, $-k\left\{\left(1+\frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$ はばね全体の弾性力である。

これと $\frac{mM}{m+M}(a_{\mathrm{B}} - a_{\mathrm{A}}) = -k\left\{\left(1+\frac{M}{m}\right)x - l_0\right\}$ より,

A から B を見ると

質量 $\frac{mM}{m+M}$ の物体が周期 $2\pi\sqrt{\frac{\frac{mM}{m+M}}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}$ で単振動運動していることになる。

この相対運動の運動方程式から得られた質量 $\frac{mM}{m+M}$ を換算質量と呼ぶ。

重心の速度

はじめ静止していた物体 A と物体 B の単振動運動の場合

物体 A と物体 B がそれぞれ弾性力 F_0 と $-F_0$ を短時間受け，

それぞれの速度が v_{A} と v_{B} になったとすると，

それぞれの運動量変化は，

$m v_{\mathrm{A}} - 0 = F\Delta t$　・・・⑤

$M v_{\mathrm{B}} - 0 = -F\Delta t$　・・・⑥

⑤＋⑥より，

$m v_{\mathrm{A}} + M v_{\mathrm{B}} = 0$　・・・⑦

このように，物体 A が受ける力積と物体 B が受ける力積は打ち消し合う関係にあるので，

任意の時刻における物体 A と物体 B の運動量変化の和は 0 である。

つまり常に⑦のような関係式が成り立つ。

一方，重心の速度を v_{G} とすると，

$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{m v_{\mathrm{A}} + M v_{\mathrm{B}}}{m+M}$ であり，これと⑦の関係式が常に成り立つことより，$v_{\mathrm{G}} = 0$

したがって，

はじめ静止していた物体 A と物体 B が単振動運動する場合，重心は静止し続ける。

物体 A が初速度 v_0 で運動を開始した場合

物体 A と物体 B がそれぞれ弾性力 F_0 と $-F_0$ を短時間受け，

それぞれの速度が v_{A} と v_{B} になったとすると，

それぞれの運動量変化は，

$m v_{\mathrm{A}} - m v_0 = F\Delta t$　・・・⑧

$M v_{\mathrm{B}} - 0 = -F\Delta t$　・・・⑨

⑧＋⑨より，

$m v_{\mathrm{A}} + M v_{\mathrm{B}} = m v_0$　・・・⑩

このような関係式は，上述した理由により，常に成り立つ。

一方，重心の速度を v_{G} とすると，

$$v_{\mathrm{G}} = \frac{m v_{\mathrm{A}} + M v_{\mathrm{B}}}{m+M}$$

これと⑩のような関係式が常に成り立つことより，$v_{\mathrm{G}} = \dfrac{m}{m+M} v_0$

したがって，

物体 A が初速度 v_0 で運動を開始した場合，重心は $\dfrac{m}{m+M} v_0$ の等速度運動をする。