55. 熱力学

(1)

ピストンDとピストンEを固定した状態つまり体積を一定のままCを全開にするから，AとBから成る断熱系は外部に対して仕事をしない。すなわち$W=0$

したがって，断熱系の熱力学第一法則の式：$0=\Delta U+W$ において，$0=\Delta U$ が成り立つ。

これと $\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ より，$\Delta T=0$

ゆえに，求める温度はT　・・・(答)

あるいは，

Aの気体は真空に対して仕事をするが，真空の圧力は0だから，系Aの気体が系Bにする仕事W'は0である。また，系Bが真空であることと円筒とピストンが断熱材でできていることから，系Aに出入りする熱も0である。

よって，系Aについての熱力学第一法則の式：$0=\Delta U+W'$ より，$0=\Delta U$ が成り立つ。

これと $\Delta U=\dfrac{3}{2}nR\Delta T$ より，$\Delta T=0$

ゆえに，求める温度はT　・・・(答)

(2)

$(P,\ V,\ T)$から$(P+dP,\ V+dV,\ T+dT)$に微小変化した場合を考える。

内部エネルギーの微小変化をdU，このとき気体がする微小の仕事をdWとすると，

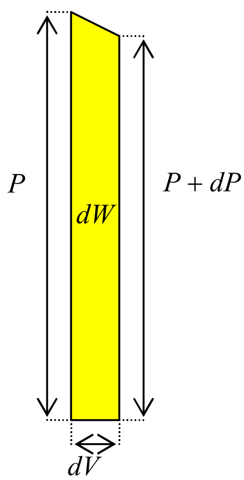
断熱変化だから，$0=dU+dW$

内部エネルギーの微小変化dU

$$\begin{aligned} dU &= nC_v(T+dT)-nC_vT \\ &= nC_v dT \end{aligned}$$

微小の仕事dW

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{2}\{(P+dP)+P\}\{(V+dV)-V\} \\ &= PdV+\frac{1}{2}dPdV \end{aligned}$$



ここで，$dPdV$ は無視してよいから，

$dW=PdV$

また，理想気体の状態方程式より，

$$P=\frac{nRT}{V}$$

よって，$dW=\dfrac{nRT}{V}dV$

ゆえに，$0=dU+dW$ は $0=nC_{\mathrm{v}}dT+\dfrac{nRT}{V}dV$ と表せる。

これを整理し，$\dfrac{dT}{T}=-\dfrac{R}{C_{\mathrm{v}}}\cdot\dfrac{dV}{V}$ とし，両辺を不定積分すると，

$\displaystyle\int\frac{dT}{T}=-\frac{R}{C_{\mathrm{v}}}\int\frac{dV}{V}$ より，$\log T=-\dfrac{R}{C_{\mathrm{v}}}\log V+A$ （A は積分定数） $\therefore \log T\cdot V^{\frac{R}{C_{\mathrm{v}}}}=A$

ゆえに，$T\cdot V^{\frac{R}{C_{\mathrm{v}}}}=T\cdot V^{\frac{C_{\mathrm{p}}-C_{\mathrm{v}}}{C_{\mathrm{v}}}}=T\cdot V^{\frac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{v}}}-1}=TV^{\gamma-1}=$ 一定

これと $T=\dfrac{PV}{nR}$ より，$\dfrac{PV}{nR}\cdot V^{\gamma-1}=\dfrac{PV^{\gamma}}{nR}$ $\therefore PV^{\gamma}=$ 一定

E を動かす前の系の体積と圧力はそれぞれ V と $\dfrac{nRT}{V}$

B の体積が V になったとき，系の体積は $2V$，また圧力を P' とすると，

$PV^{\gamma}=$ 一定より，$\dfrac{nRT}{V}\cdot V^{\gamma}=P'(2V)^{\gamma}$ $\therefore P'=\dfrac{nRT}{2^{\gamma}V}$ ・・・(答)

求める温度を T' とすると，$T'=\dfrac{P'\cdot 2V}{nR}=\dfrac{\dfrac{nRT}{2^{\gamma}V}\cdot 2V}{nR}=\dfrac{T}{2^{\gamma-1}}$ ・・・(答)

あるいは，$TV^{\gamma-1}=$ 一定より，$T'(2V)^{\gamma-1}=TV^{\gamma-1}$ $\therefore T'=\dfrac{T}{2^{\gamma-1}}$

まとめ

断熱系の圧力と体積の両方が変化するとき

$\dfrac{C_{\mathrm{p}}}{C_{\mathrm{v}}}=\gamma$ とすると，$PV^{\gamma}=$ 一定，$TV^{\gamma-1}=$ 一定

(3)

熱力学第一法則の式

実験条件より，外力は初めの A の圧力 $\dfrac{nRT}{V}$ で外力と同じ向きに ΔV 仕事をするから，

外力が系に対してする仕事 $=\dfrac{nRT}{V}\cdot\Delta V$

よって，系が外部に対してした仕事は $-\dfrac{nRT}{V}\cdot\Delta V$

これより，熱力学第一法則の式は，内部エネルギー変化を $\Delta U'$ とすると，

$0=\Delta U'+\left(-\dfrac{nRT}{V}\cdot\Delta V\right)$ $\therefore \Delta U'=\dfrac{nRT}{V}\Delta V$ ・・・①

A の体積が $V-\Delta V$ になったときの温度と内部エネルギー変化

系の体積＝$V-\Delta V+V=2V-\Delta V$

B の圧力も $\dfrac{nRT}{V}$ となるから，系の圧力＝$\dfrac{nRT}{V}$

よって，系の温度を T'' とすると，$T''=\dfrac{\dfrac{nRT}{V}(2V-\Delta V)}{nR}=\dfrac{2V-\Delta V}{V}\cdot T$　・・・②

よって，$\Delta U'=\dfrac{3}{2}nR(T''-T)=\dfrac{3}{2}nR\left(\dfrac{2V-\Delta V}{V}\cdot T-T\right)=\dfrac{3nRT(V-\Delta V)}{2V}$　・・・③

①，③より，$\dfrac{3nRT(V-\Delta V)}{2V}=\dfrac{nRT}{V}\Delta V$　$\therefore \Delta V=\dfrac{3}{5}V$　・・・(答)

これと②より，$T''=\dfrac{2V-\dfrac{3}{5}V}{V}\cdot T=\dfrac{7}{5}T$　・・・(答)