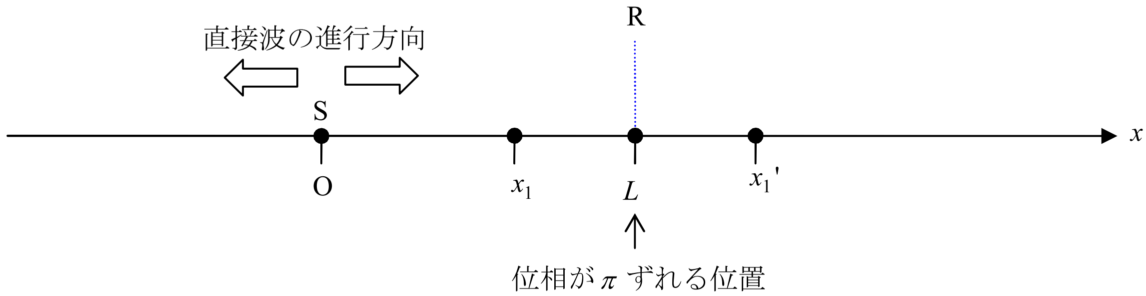
66. 波の式

(1)



点 O における変位が座標 x_1 まで伝わるのに $\dfrac{|x_1|}{v}$ かかることから，

座標 x_1 に点 O の変位が到達する時刻を t_1 とすると，$t_1 = t + \dfrac{|x_1|}{v}$　$\therefore t = t_1 - \dfrac{|x_1|}{v}$

これを $y = A\sin 2\pi ft$ に代入することにより，

$$y_1 = A\sin 2\pi f\left(t_1 - \frac{|x_1|}{v}\right)$$
$$= A\sin 2\pi f\left(t_1 - \frac{x_1}{f\lambda}\right)$$
$$= A\sin 2\pi\left(ft_1 - \frac{x_1}{\lambda}\right)$$

t_1 を t に，x_1 を x に書き改めることにより，$y_1 = A\sin 2\pi\left(ft - \dfrac{x}{\lambda}\right)$

(2)

壁 R に関して x_1 と対称な座標を x_1' とすると，$x_1' = L + (L - x_1) = 2L - x_1$

よって，x_1 における反射波の変位は，

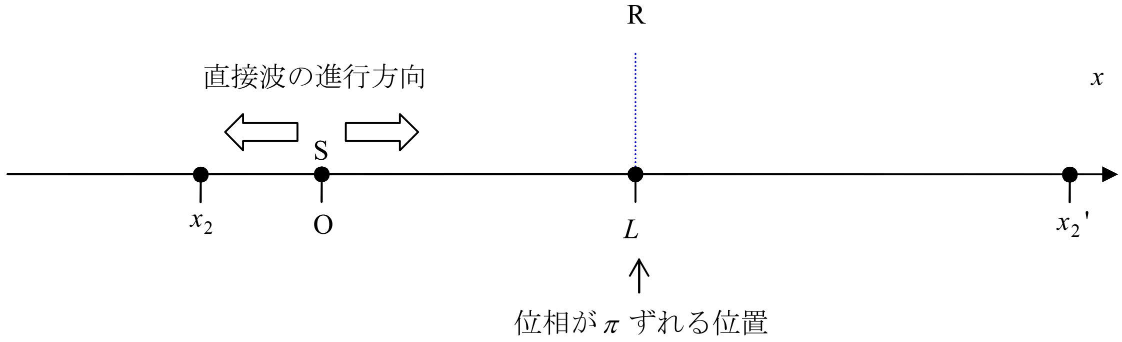
壁がないと仮定したときの直接波の x_1' における位相を π ずらしたときの変位と等しい。

ゆえに，座標 x_1' に点 O の変位が到達する時刻を t_1' とすると

$$y_2 = A\sin\left\{2\pi\left(ft_1' - \frac{|x_1'|}{\lambda}\right) + \pi\right\}$$
$$= -A\sin 2\pi\left(ft_1' - \frac{2L - x_1}{\lambda}\right)$$
$$= -A\sin 2\pi\left(ft_1' + \frac{x_1 - 2L}{\lambda}\right)$$

t_1' を t に，x_1 を x に書き改めることにより，$y_2 = -A\sin 2\pi\left(ft + \dfrac{x - 2L}{\lambda}\right)$

(4)



(2)と同様に，壁 R に関して x_2 と対称な座標を x_2' とすると，$x_2' = L + (L - x_2) = 2L - x_2$

よって，x_2 における反射波の変位は，$y_2 = -A\sin 2\pi\left(ft + \dfrac{x_2 - 2L}{\lambda}\right)$

$$\therefore y_2 = -A\sin 2\pi\left(ft + \frac{x - 2L}{\lambda}\right)$$

また，x_2 における直接波の変位は，

$$y_1 = A\sin 2\pi f\left(t - \frac{|x_2|}{v}\right)$$

$$= A\sin 2\pi f\left(t - \frac{-x_2}{f\lambda}\right)$$

$$= A\sin 2\pi\left(ft + \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$\therefore y_1 = A\sin 2\pi\left(ft + \frac{x}{\lambda}\right)$$

よって，$y_1 + y_2 = A\sin 2\pi\left(ft + \dfrac{x}{\lambda}\right) - A\sin 2\pi\left(ft + \dfrac{x - 2L}{\lambda}\right)$

ここで，$2\pi\left(ft + \dfrac{x}{\lambda}\right) = \alpha + \beta$，$2\pi\left(ft + \dfrac{x - 2L}{\lambda}\right) = \alpha - \beta$ とおくと，

$\alpha = 2\pi\left(ft + \dfrac{x - L}{\lambda}\right)$，$\beta = \dfrac{2\pi L}{\lambda}$，$A\sin(\alpha + \beta) - A\sin(\alpha - \beta) = 2A\sin\beta\cos\alpha$ より，

$$y_1 + y_2 = 2A\sin\frac{2\pi L}{\lambda}\cos 2\pi\left(ft + \frac{x - L}{\lambda}\right)$$

よって，合成波の振幅＝$2A\left|\sin\dfrac{2\pi L}{\lambda}\right|$

ゆえに，$\dfrac{2\pi L}{\lambda} = \dfrac{2n+1}{2}\pi$ のとき，すなわち $L = \dfrac{2n+1}{4}\lambda$ のとき振幅が最大となる。

入射波と反射波の干渉

1．自由端反射波と入射波の干渉

自由端とは

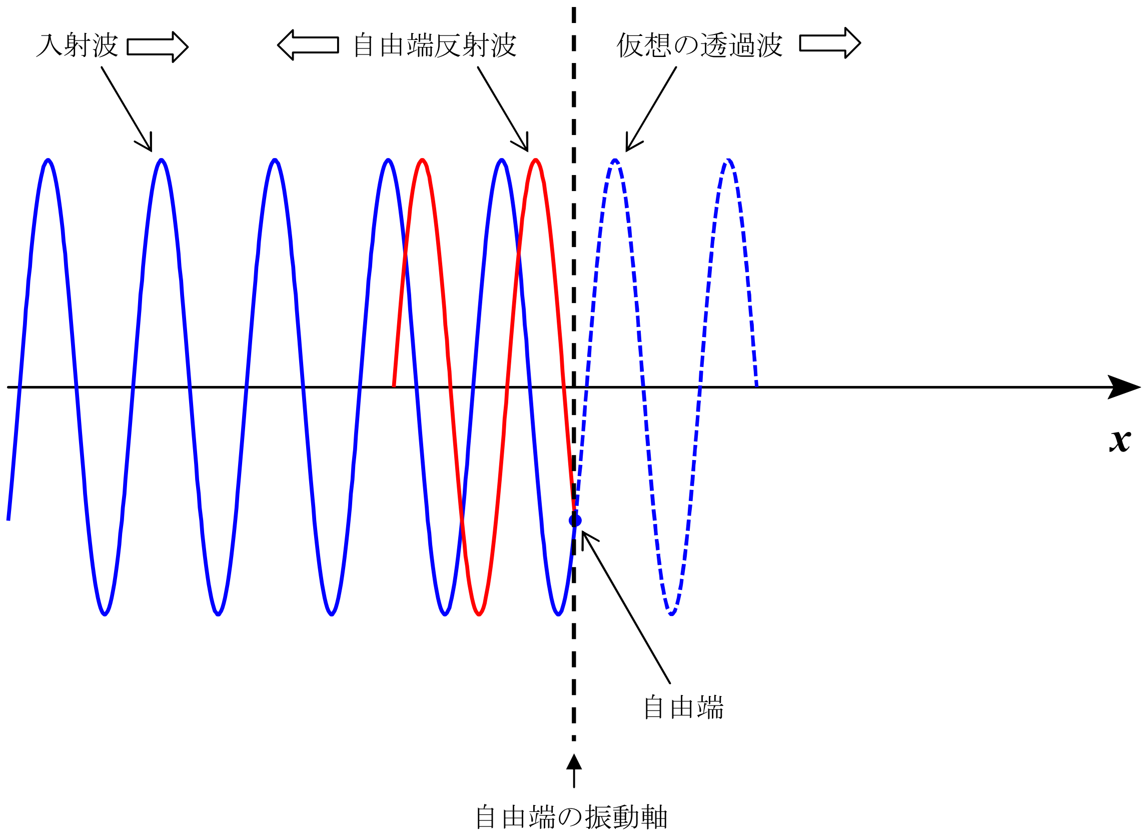
振動体または媒質の変位が媒質の一端に伝わると，
その一端が抵抗を受けることなく自由に単振動できるとき，その一端を自由端という。
例えば，管内の空気の振動が管外に伝わるときの菅の開口部は縦波の自由端である。

自由端の振幅

ロープの一端を固定しないで自由に単振動できるようにしておき，そこに横波（入射波）を送ると，その一端（自由端）の振幅は入射波の振幅の 2 倍になる。
これは，自由端がそのまま反射波の波源となることと，当然のことながら自由端での入射波の変位と反射波の変位が常に同じであること，すなわち同位相であることによる。

自由端反射波の式

入射波が自由端をそのまま透過した仮想の波を考えると，
自由端反射波は仮想の透過波の進行方向を逆にした波である。



よって，仮想の透過波と自由端反射波は自由端の振動軸に関して対称である。

ここで，波源を原点とする xy 直交座標系をとり，自由端の軸を $x=L$ とする。

また，x 軸上の点 x と x' は $x=L$ に関して対称な点とすると，

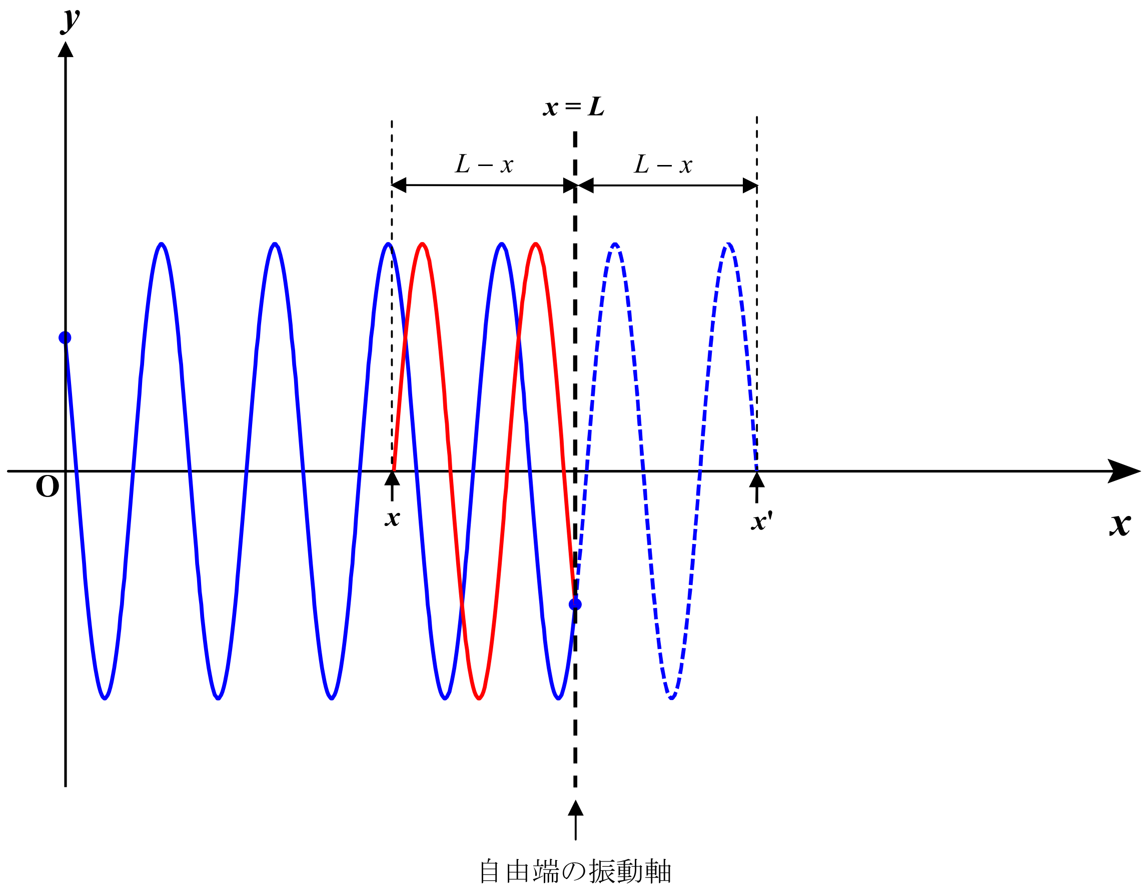
$x=L$ からの距離はいずれも $L-x$ であるから，$x'=L+(L-x)=2L-x$

したがって，入射波の x における変位を $y_i=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right\}$ $(0\le x\le L)$ とすると，

仮想の透過波の x' における変位は，$y_s=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x'}{v}\right)\right\}=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\right\}$ となる。

自由端反射波の x における変位 y_r と仮想の透過波の x' における変位 y_s は同じだから，

自由端反射波の x における変位は，$y_r=A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\right\}$ $(x\le L)$



自由端反射波と入射波の合成波

入射波の x における変位を $y_i = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$ $(0 \le x \le L)$ とすると，

自由端反射波の x における変位は，$y_r = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)\right\}$ $(x \le L)$ だから，

波源と自由端軸の間の合成波は,

$$
\begin{aligned}
Y &= y_i + y_r \\
&= A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\} + A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\right\}\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

よって，

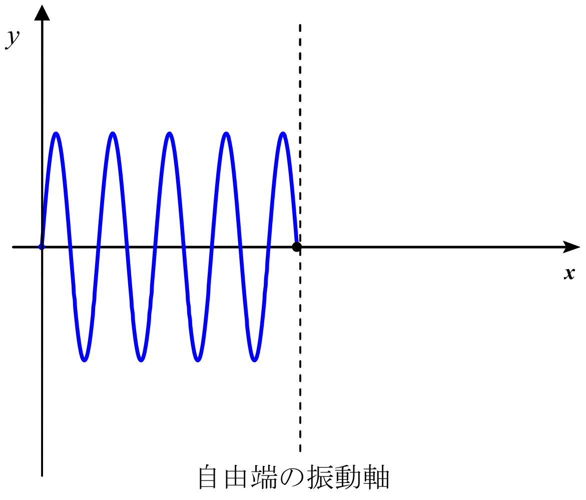
合成波 Y は，振幅 $\left|2A\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\right\}\right|$，周期 T の定常波である。

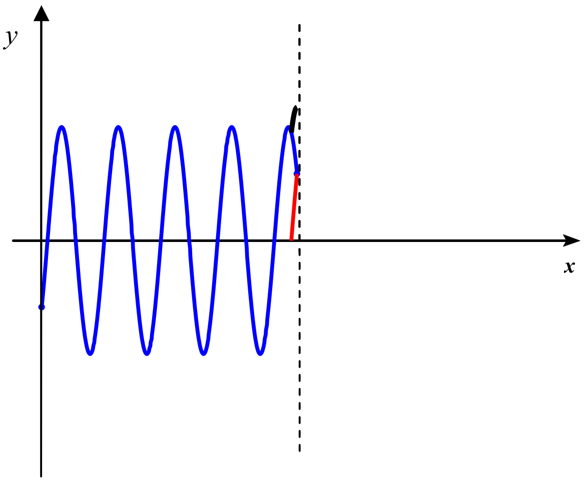
また，自由端は $x = L$ より，その振幅は $2A$，すなわち定常波の腹となる。

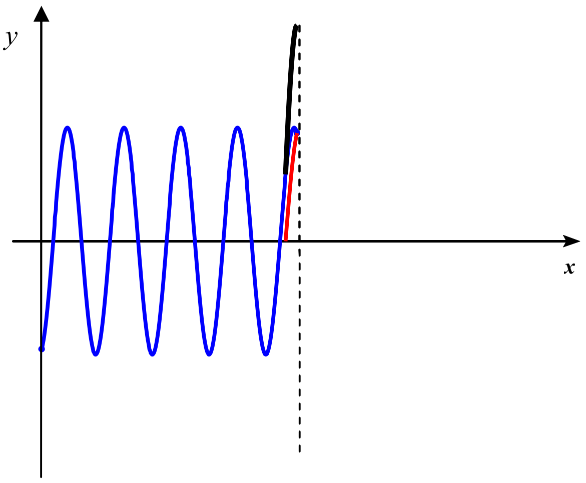
尚，波源より左側の合成波は,

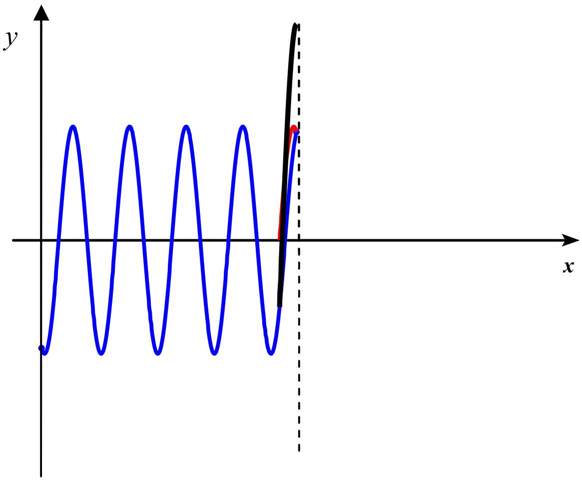
物理小ネタ「波の式の応用　その 1　定常波」で解説したように，定常波ではない。

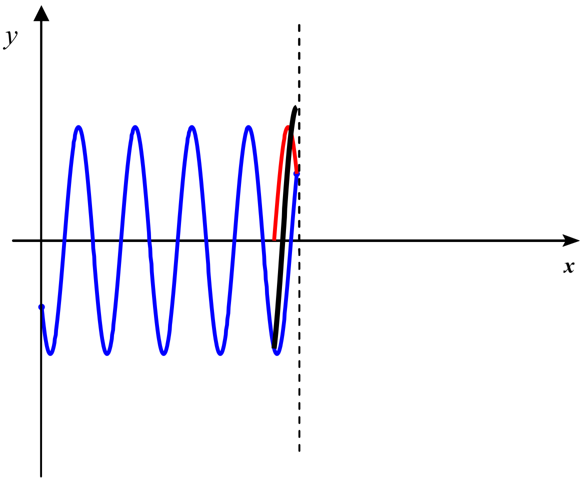
では，恒例のコマ送りを，青色が入射波，赤色が反射波，黒色が合成波です。

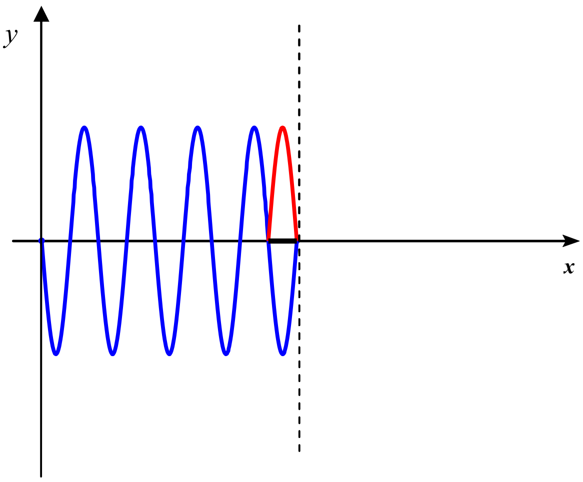


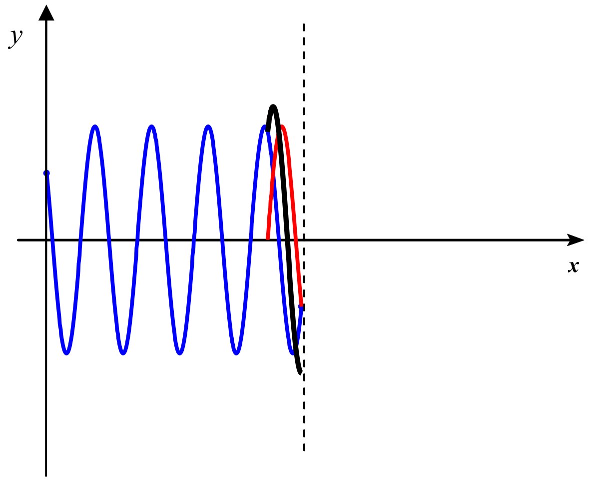


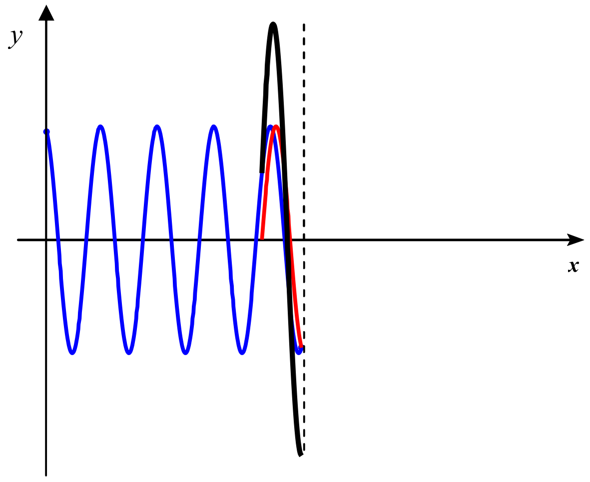


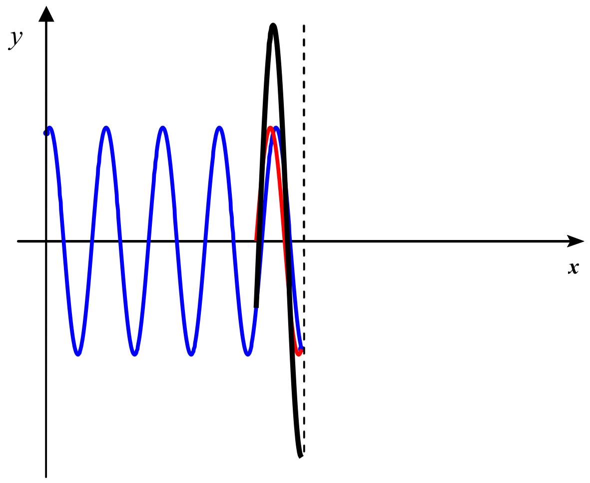

y
x

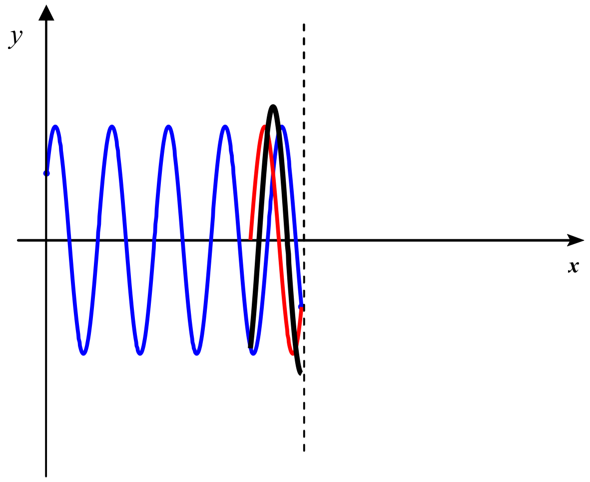

y
x

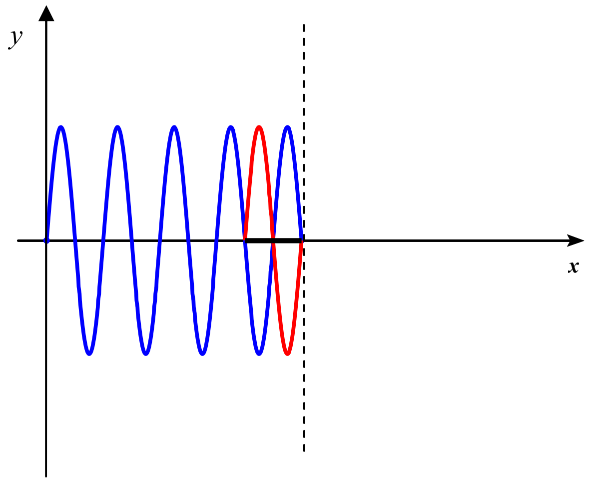

y
x

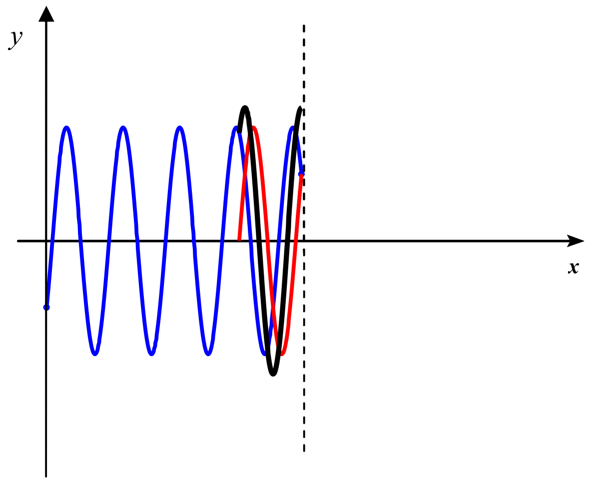

y
x

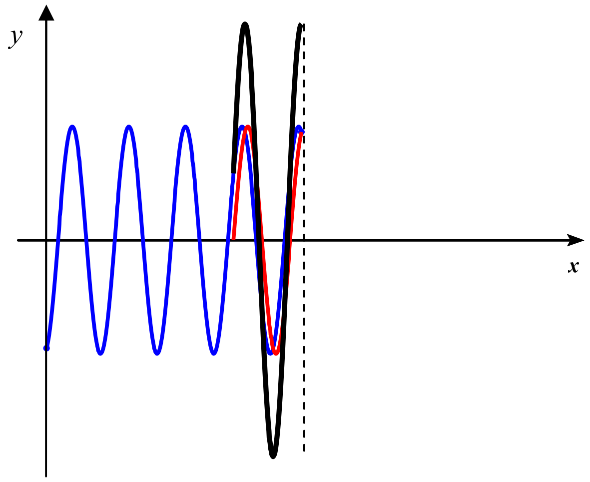

y
x

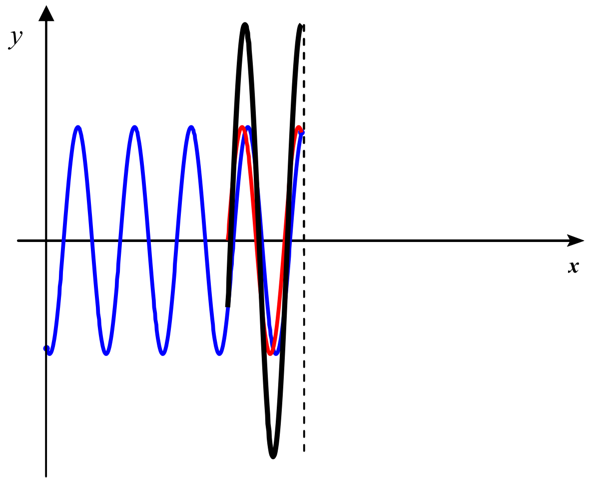

y
x

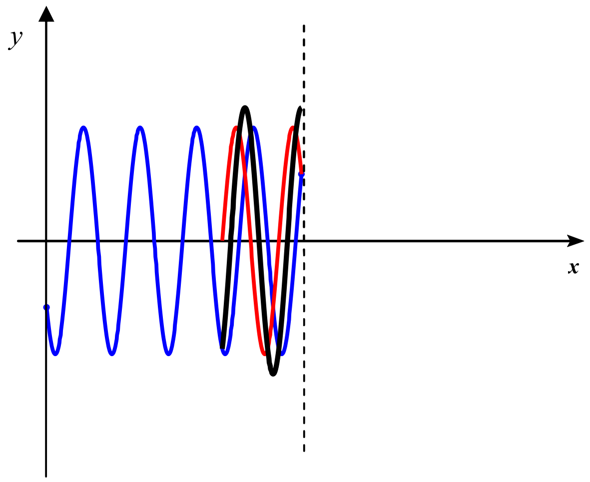

y
x

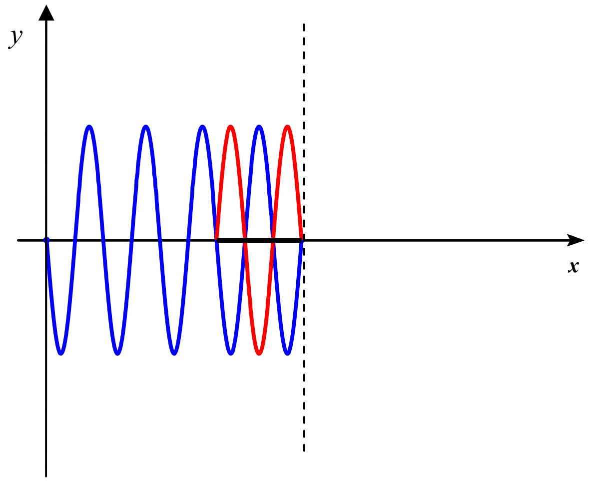

y
x

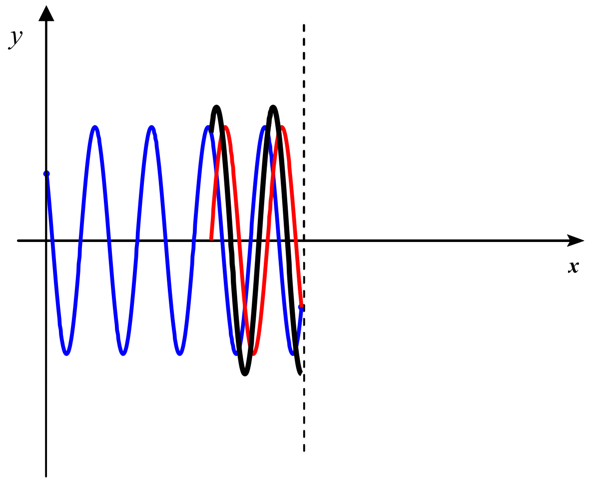

y
x

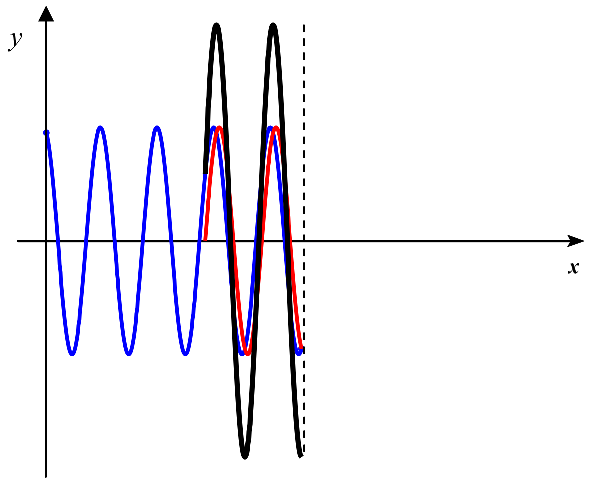

y
x


y
x

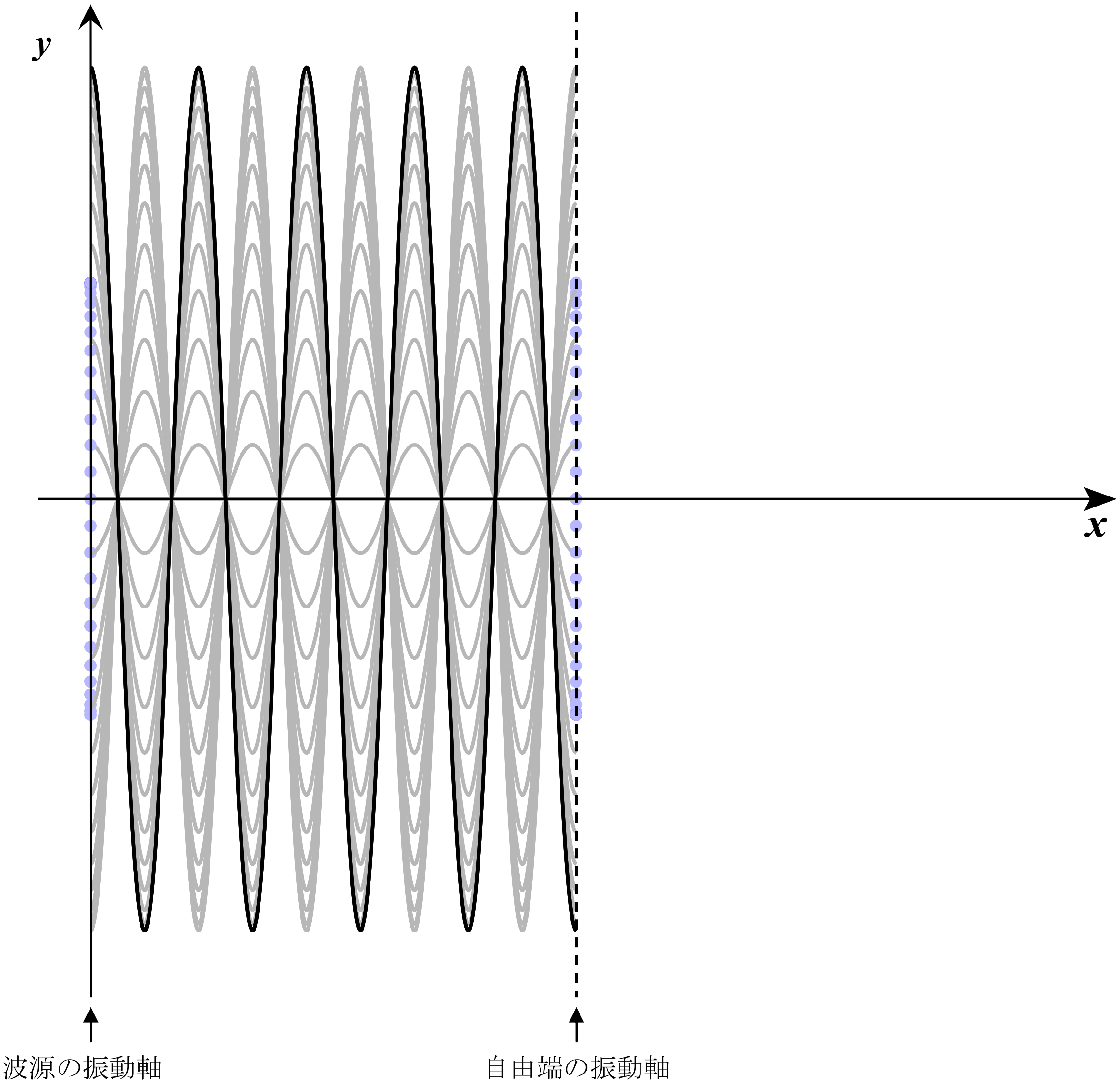

y
x


y
x


y
x


y
x

定常波のみを残像付きで



波源より左側の合成波の式

波源の波は左進行波だから，　$y_i' = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t+\dfrac{x}{v}\right)\right\}$

これと自由端反射 $y_r = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\right\}$ から

$$
\begin{aligned}
Y' &= y_i' + y_r \\
&= 2A\cos\left(\frac{2\pi L}{Tv}\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\} \\
&= 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\} \qquad \left(\because v=\frac{\lambda}{T}\right)
\end{aligned}
$$

これは，波源より左側の各点の媒質の運動は，

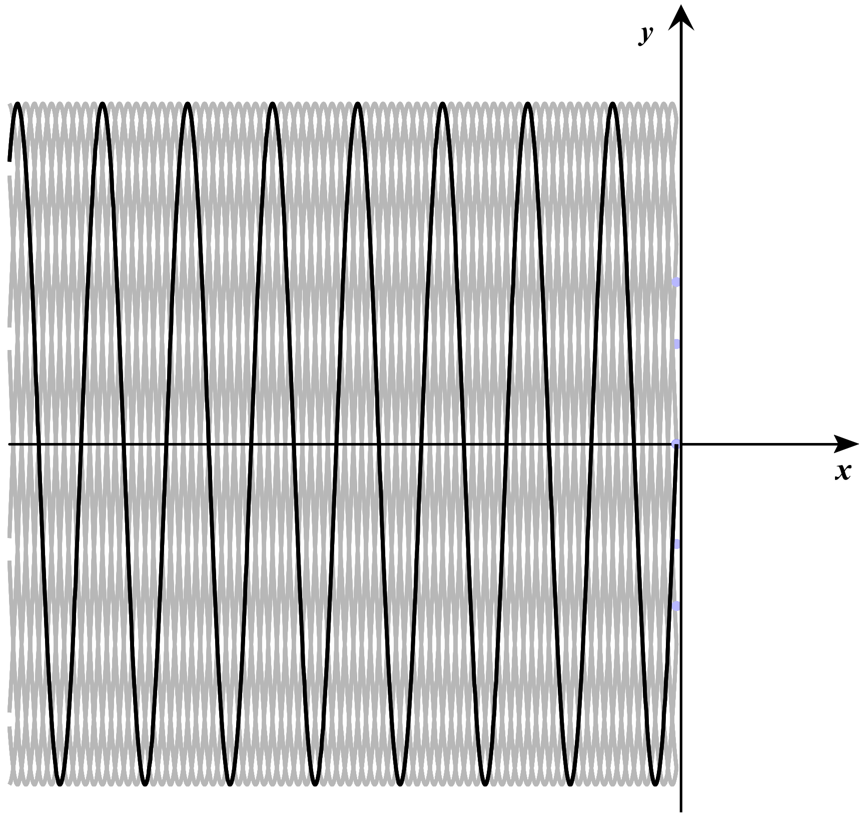
振幅$\left|2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$，周期$T$の単振動運動であることを示している。

つまり，定常波ではない。

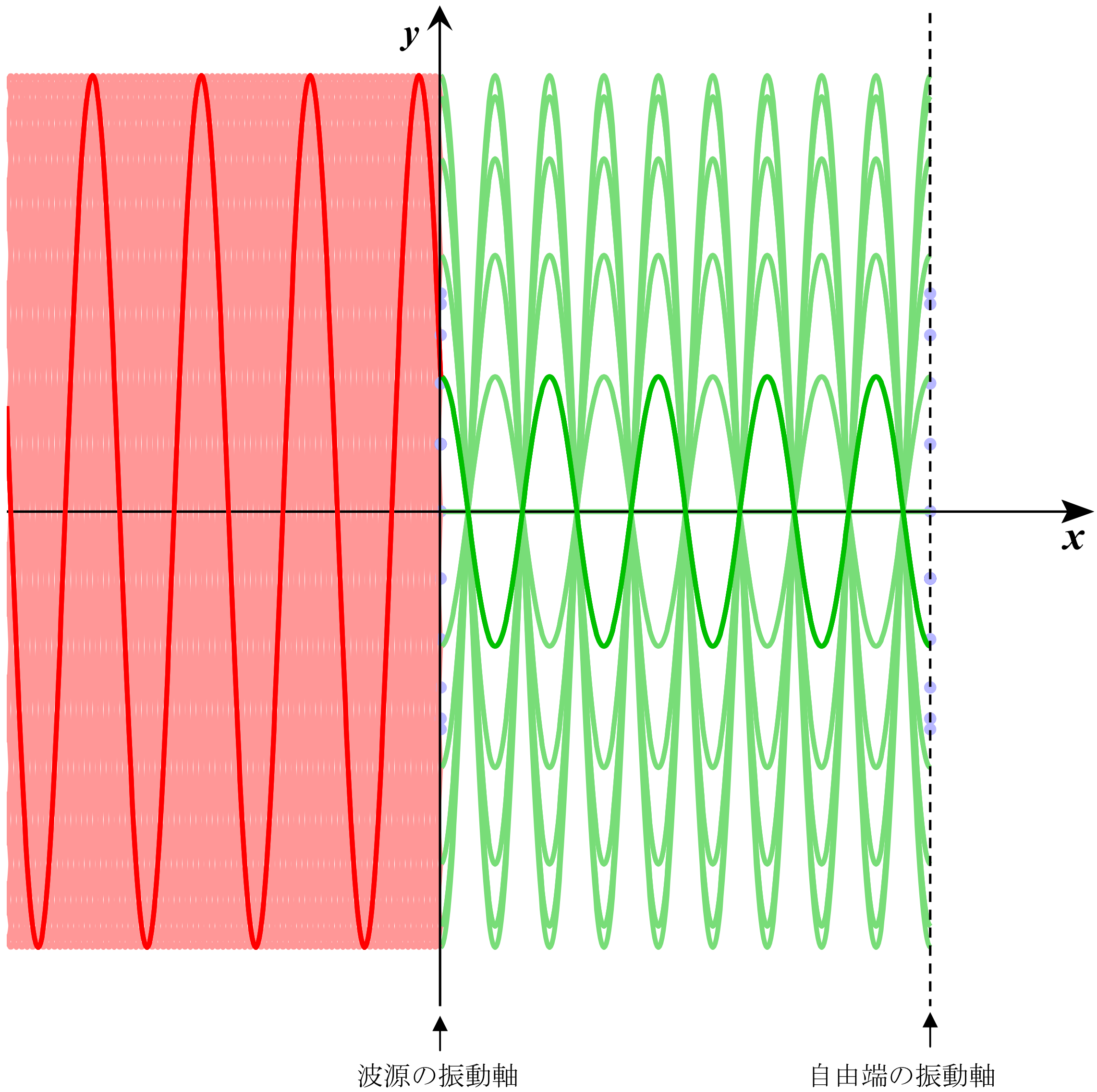
また，振幅$\left|2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$については，定常波の振幅＝$\left|2A\cos\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{L-x}{v}\right)\right\}\right|$より，

波源$(x=0)$の振幅＝$\left|2A\cos\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{L-0}{v}\right)\right\}\right| = \left|2A\cos\left(\dfrac{2\pi L}{Tv}\right)\right| = \left|2A\cos\left(\dfrac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$

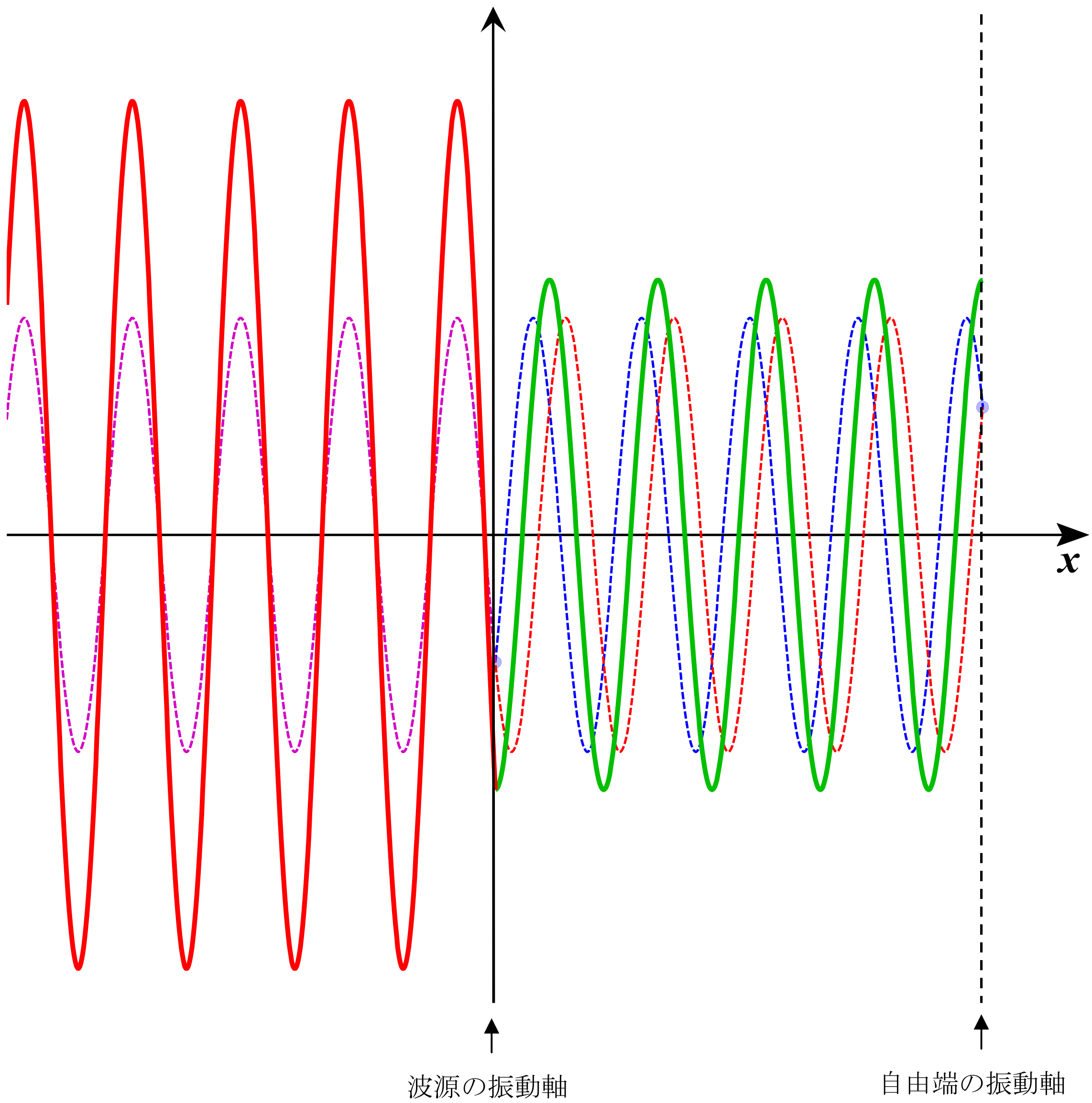
よって，定常波の波源の振幅と一致する。



では，全合成波をまとめると，



波形の 1 つを抽出すると



青色破線：波源からの右進行波

赤色破線：自由端反射波

赤紫色破線：波源からの左進行波を紫色にしたのですが，
自由端反射波の赤色と位相が一致してしまったため，
色の重ねあわせにより赤紫色になりました。

2．固定端反射波と入射波の干渉

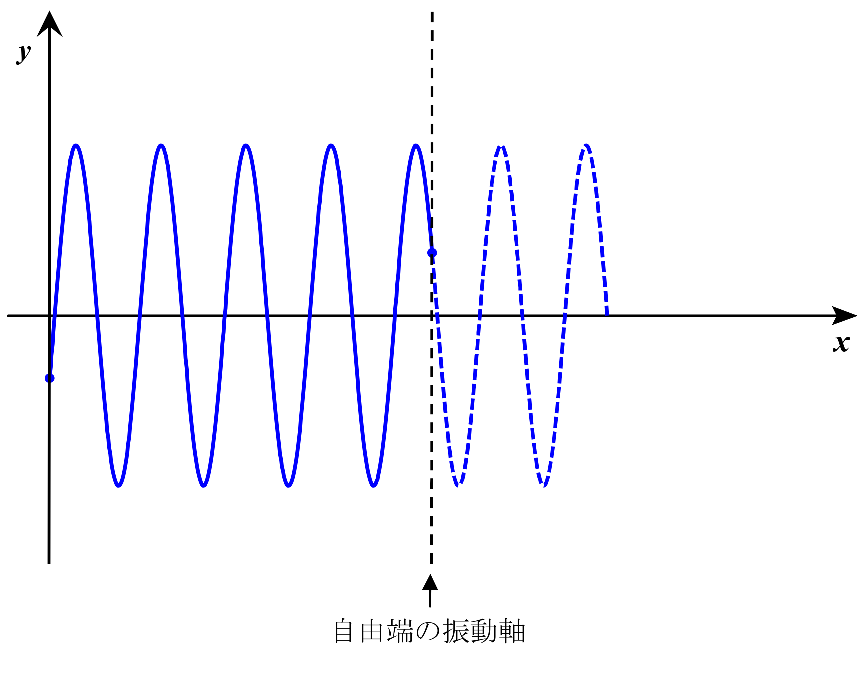
振動体または媒質の一端が固定され，振動できないとき，その一端を固定端という。

固定端の振幅と反射波について

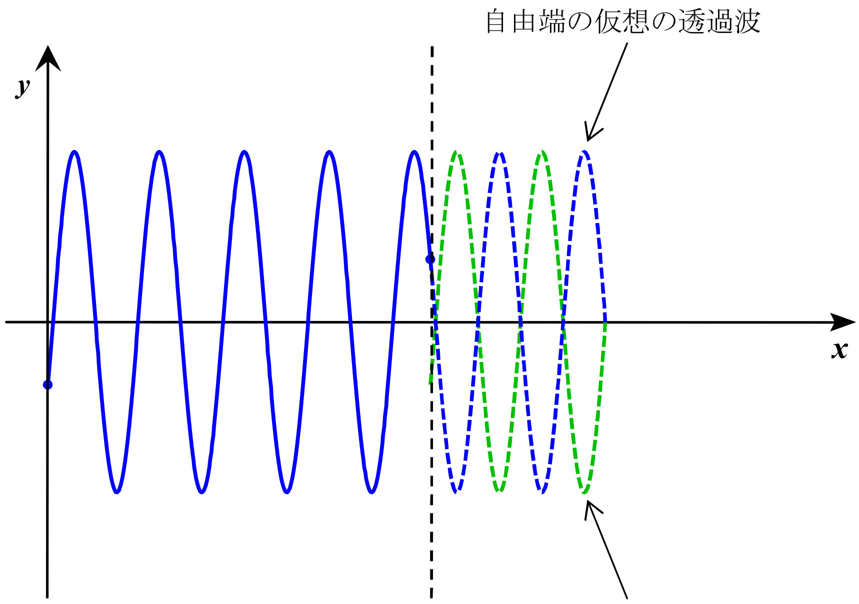
ロープの一端を固定し単振動できないようにしておき，そこに横波（入射波）を送ると，
固定端には，固定端を変位させようとする力とそれに抗する力の 2 力が働く。
これら 2 力は作用・反作用の関係にあるから，
固定端を変位させようとする力を F とすると，それに抗する力は $-F$ となる。
よって，それぞれの力による変位の加速度は，大きさが等しく向きが逆の関係になる。
つまり，2 つの加速度の位相差は π である。ということは，変位の位相差も π となる。
また，固定端を変位させようとする力は入射波によるものであり，
それに抗する力は固定端反射波によるものである。
よって，固定端反射における入射波と固定端反射波の波動関数の位相差は π となる。

固定端反射波の描き方

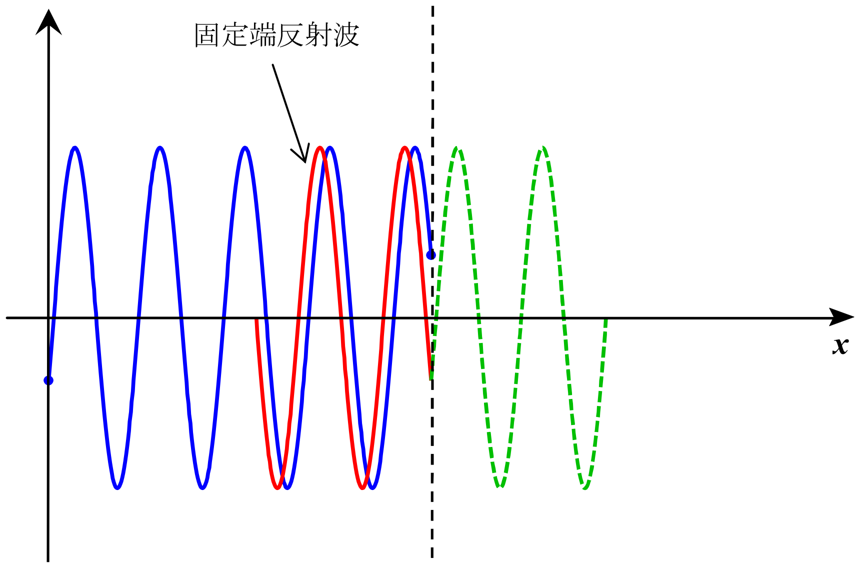
1．自由端の仮想の透過波（破線）を描く。



2. 仮想の透過波の位相をπずらし，固定端の仮想の透過波（緑色破線）とする。
$y=f(\theta)=\sin\theta$とすると，$f(\theta+\pi)=-\sin\theta=-f(\theta)=-y$
または，$y=g(\theta)=\cos\theta$とすると，$g(\theta+\pi)=-\cos\theta=-g(\theta)=-y$だから，
自由端の仮想の透過波をx軸に関して対称に移動，
つまりx軸のまわりに半回転させればよい。



3. 固定端の仮想の透過波を固定端の軸に関して対称移動すると，
固定端反射波（赤色実線）になる。



固定端反射波の式

自由端反射波の式の求め方と同じようにすればよい。

固定端の仮想の透過波は，自由端の仮想の透過波の位相を π だけずらしたものだから，

入射波の x における変位を $y_i = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x}{v}\right)\right\}$ $(0 \le x \le L)$ とすると，

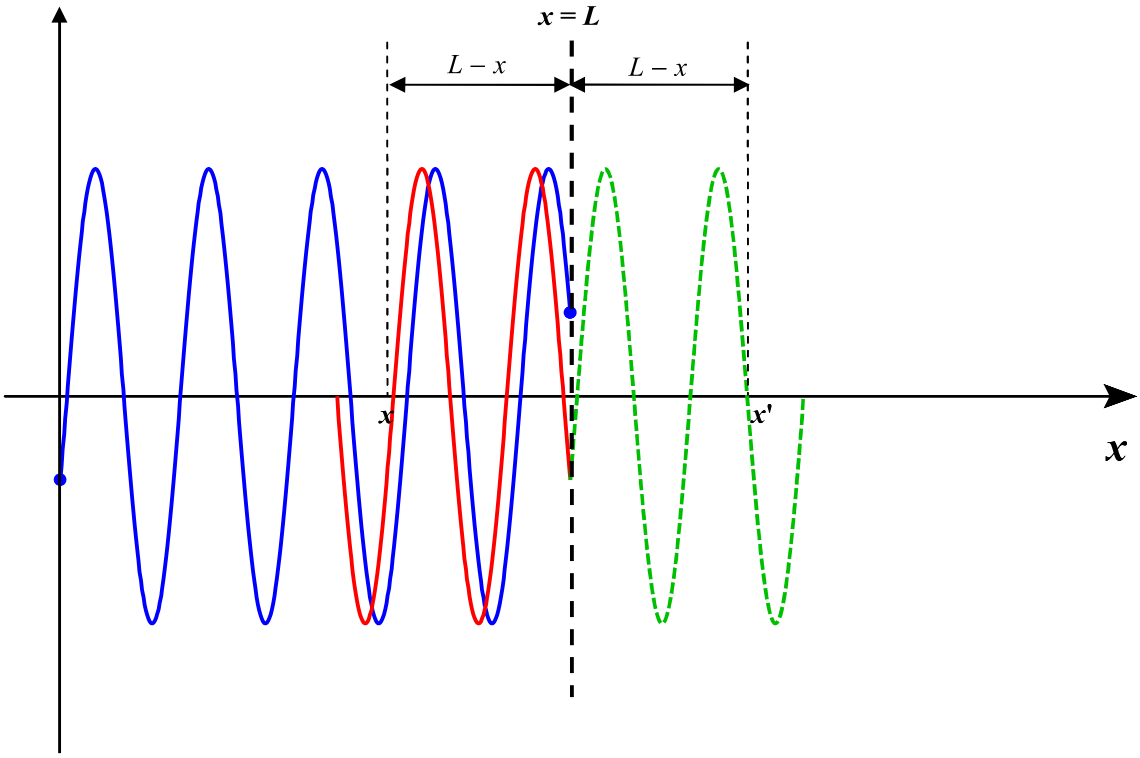
仮想の透過波の x' における変位は，　$y_s = A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\pm\pi\right\}$ となる。

よって，　$y_s = -A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\right\}$

固定端反射波と固定端の仮想の透過波は固定端の軸に関して対称だから，

固定端反射波の x における変位 y_r と仮想の透過波の x' における変位 y_s は同じである。

よって，固定端反射波 $y_r = -A\sin\left\{\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{2L-x}{v}\right)\right\}$



固定端反射波と入射波の合成波

入射波の x における変位を $y_i = A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right\}$ $(0 \le x \le L)$ とすると，

固定端反射波の x における変位は， $y_r = -A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)\right\}$ $(x \le L)$ だから，

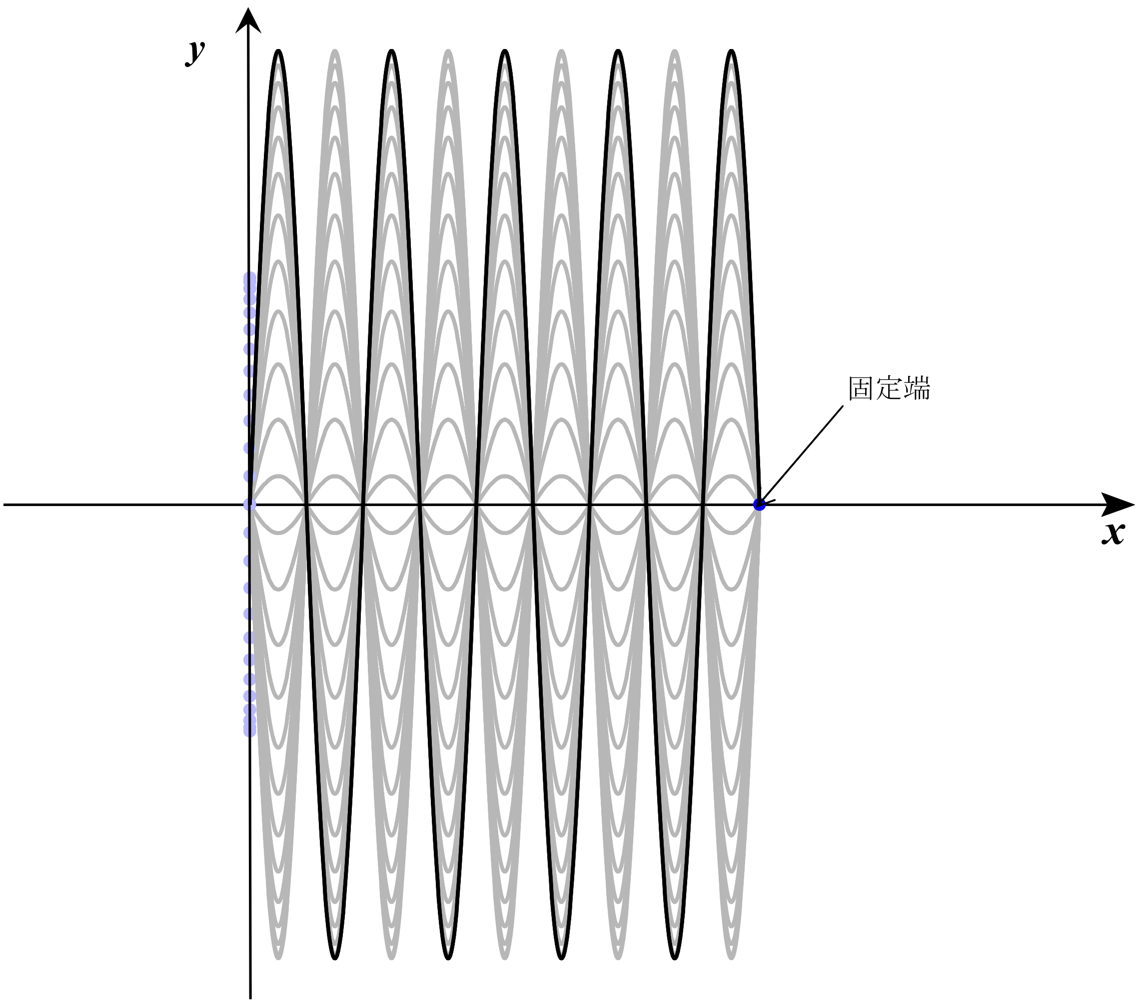
波源と固定端の間の合成波は，

$$
\begin{aligned}
Y &= y_i + y_r \\
&= 2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\right\}\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

よって，合成波 Y は，振幅 $\left|2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\right\}\right|$，周期 T の定常波である。

また，固定端は $x = L$ より，その振幅は 0，すなわち定常波の節となる。

定常波のみを残像付きで



波源より左側の合成波の式

波源の波は左進行波だから， $y_i{}'=A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}\right)\right\}$

これと固定端反射 $y_r=-A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right)\right\}$ から

$$\begin{aligned} Y' &= y_i{}'+y_r \\ &= 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\cos\left\{\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x-L}{v}\right)\right\} \qquad \left(\because v=\frac{\lambda}{T}\right) \end{aligned}$$

これは，波源より左側の各点の媒質の運動は,

振幅 $\left|2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$，周期 T の単振動運動であることを示している。

つまり，定常波ではない。

また，振幅 $\left|2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$ については，定常波の振幅＝ $\left|2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-x}{v}\right)\right\}\right|$ より，

波源 $(x=0)$ の振幅＝ $\left|2A\sin\left\{\frac{2\pi}{T}\left(\frac{L-0}{v}\right)\right\}\right|=\left|2A\sin\left(\frac{2\pi L}{Tv}\right)\right|=\left|2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right)\right|$

よって，定常波の波源の振幅と一致する。