69. ドップラー効果

(2)

A と M の相対的な位置関係は変わらないから，

A から出た音を M が観測するのにかかる時間は，常に $\dfrac{d}{V+u}$ である。

よって，

時刻 $t=0$ に A から出た音を M が観測する時刻は，$\dfrac{d}{V+u}$

時刻 $t=T$ に A から出た音を M が観測する時刻は，$T+\dfrac{d}{V+u}$

より，観測した時間は，$\left(T+\dfrac{d}{V+u}\right)-\dfrac{d}{V+u}=T$

風が吹くときの音の伝わる速さと観測者の位置の関係

無風のときの音が伝わる速さをV_0，一定方向に速さwの風が吹いているとする。

音（波面）は，媒質（空気）という乗り物（風）に速さw運ばれながら，

その媒質（空気）中を速さV_0で伝わる（広がる）。

「風が吹く・吹かない」とは，「媒質という乗り物が動く・動かない」ということである。

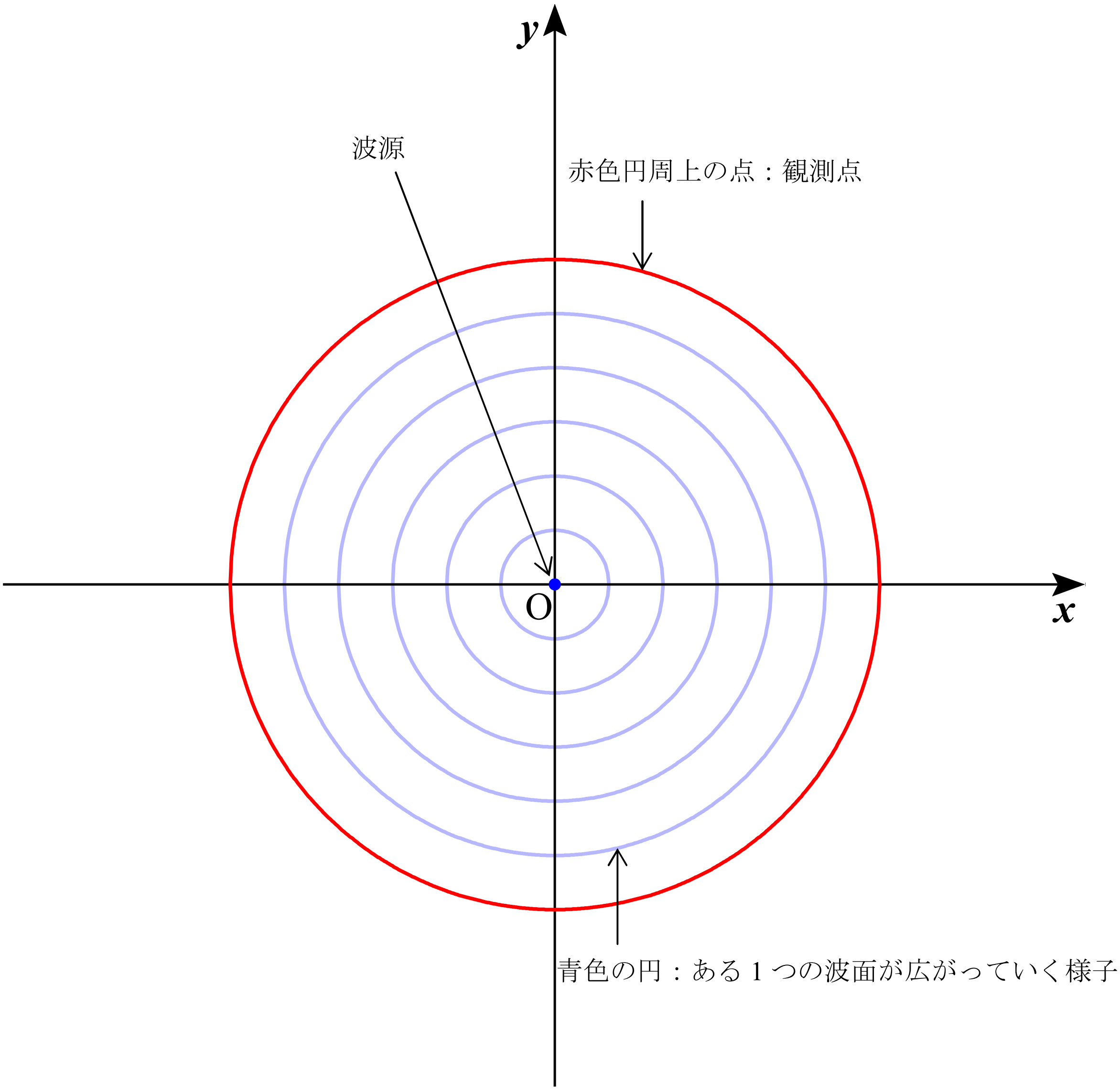
よって，音が観測者に伝わる速さをVとすると，

Vは媒質中を音が伝わる速さ（波面が広がる速さ）V_0と媒質の運動（風）の速度で決まる。

そこで, 音が風で運ばれる様子をある1つの波面が風に運ばれ広がっていく場合で考える。

無風のとき

赤色の円周上の任意の観測者に到達する波面の半径は同じである。



一定方向に速さ w の風が吹いているとき

x 軸方向に速さ w の風が吹いている中，
時刻 $t=0$ のとき原点 O に固定された波源が 1 つの波面を出したとする。
媒質は x 軸方向に速さ w で移動しているから，
その波面中心は x 軸方向に速さ w で移動し，波面は波面中心に対し速さ V_0 で広がっていく。
小さな球体が風に運ばれながら膨張していく様子をイメージし，
その球面を波面に例えるとわかりやすいと思う。
波面の xy 平面断面で考えると，
時刻 t における波面中心の座標 $(wt,\ 0)$，波面の半径 $=V_0t$ であるから，
その方程式は，$(x-wt)^2+y^2=(V_0t)^2$ ・・・①
よって，観測点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ まで波面が到達するのにかかる時間 t を求めるには，
①に $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を代入し，この方程式を解けばよい。
$(r\cos\theta-wt)^2+(r\sin\theta)^2=(V_0t)^2$ より，$r^2\cos^2\theta-2rw\cos\theta\cdot t+w^2t^2+r^2\sin^2\theta=V_0{}^2t^2$
これを t について整理すると，$\left(V_0{}^2-w^2\right)t^2+2rw\cos\theta\cdot t-r^2=0 \quad (t\geq 0)$

$$\therefore t=\frac{-rw\cos\theta+\sqrt{r^2w^2\cos^2\theta+r^2\left(V_0{}^2-w^2\right)}}{V_0{}^2-w^2}$$

$$=\frac{-rw\cos\omega+r\sqrt{V_0{}^2-w^2\left(1-\cos^2\theta\right)}}{V_0{}^2-w^2}$$

これを整理すると，$t=\dfrac{r}{V_0{}^2-w^2}\left(-w\cos\theta+\sqrt{V_0{}^2-w^2\sin^2\theta}\right)$ ・・・②

また，
観測点に向かう波面の速さを V とすると $Vt=r$
無風のとき波面が観測点に到達するのにかかる時間を t_0 とすると $V_0t_0=r$ より，

$$V=\frac{t_0}{t}V_0 \quad \cdots ③$$

③に②を代入すると，

$$V=\frac{t_0}{t}V_0$$

$$=\frac{\dfrac{r}{V_0}}{\dfrac{r}{V_0{}^2-w^2}\left(-w\cos\theta+\sqrt{V_0{}^2-w^2\sin^2\theta}\right)}V_0$$

$$=\frac{V_0{}^2-w^2}{-w\cos\theta+\sqrt{V_0{}^2-w^2\sin^2\theta}}$$

以上より，

x 軸方向に速さ w の風が吹いているとき，観測点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ で観測する音速 V は，

$$V = \frac{{V_0}^2 - w^2}{-w\cos\theta + \sqrt{{V_0}^2 - w^2\sin^2\theta}}$$

である。

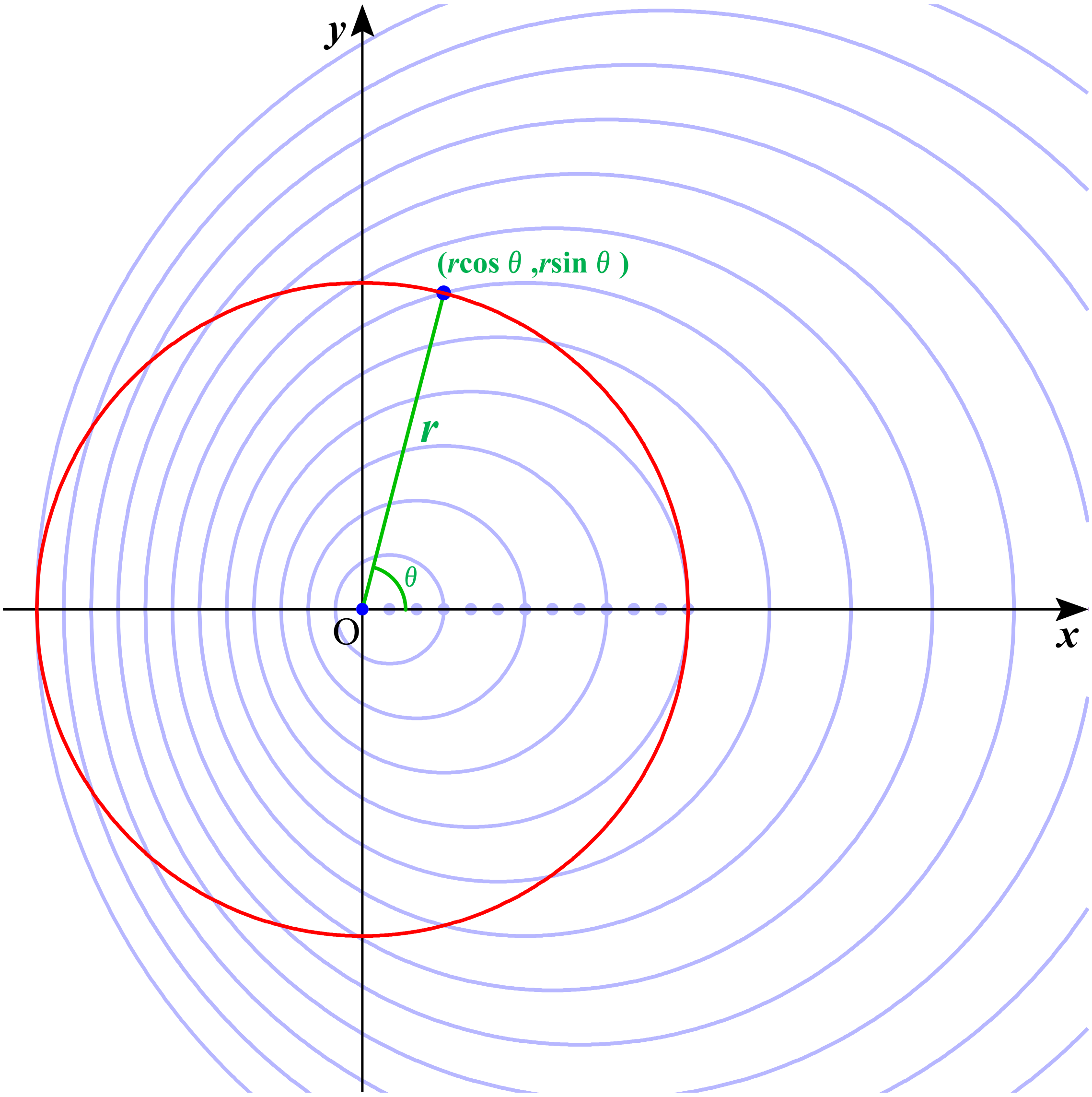
ゆえに，

$\theta = 0$ のとき，$V = \dfrac{{V_0}^2 - w^2}{-w + V_0} = V_0 + w$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$V = \dfrac{V^2 - w^2}{-\dfrac{w}{\sqrt{2}} + \sqrt{V^2 - \dfrac{w^2}{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}\left(V^2 - w^2\right)}{-w + \sqrt{2V^2 - w^2}}$

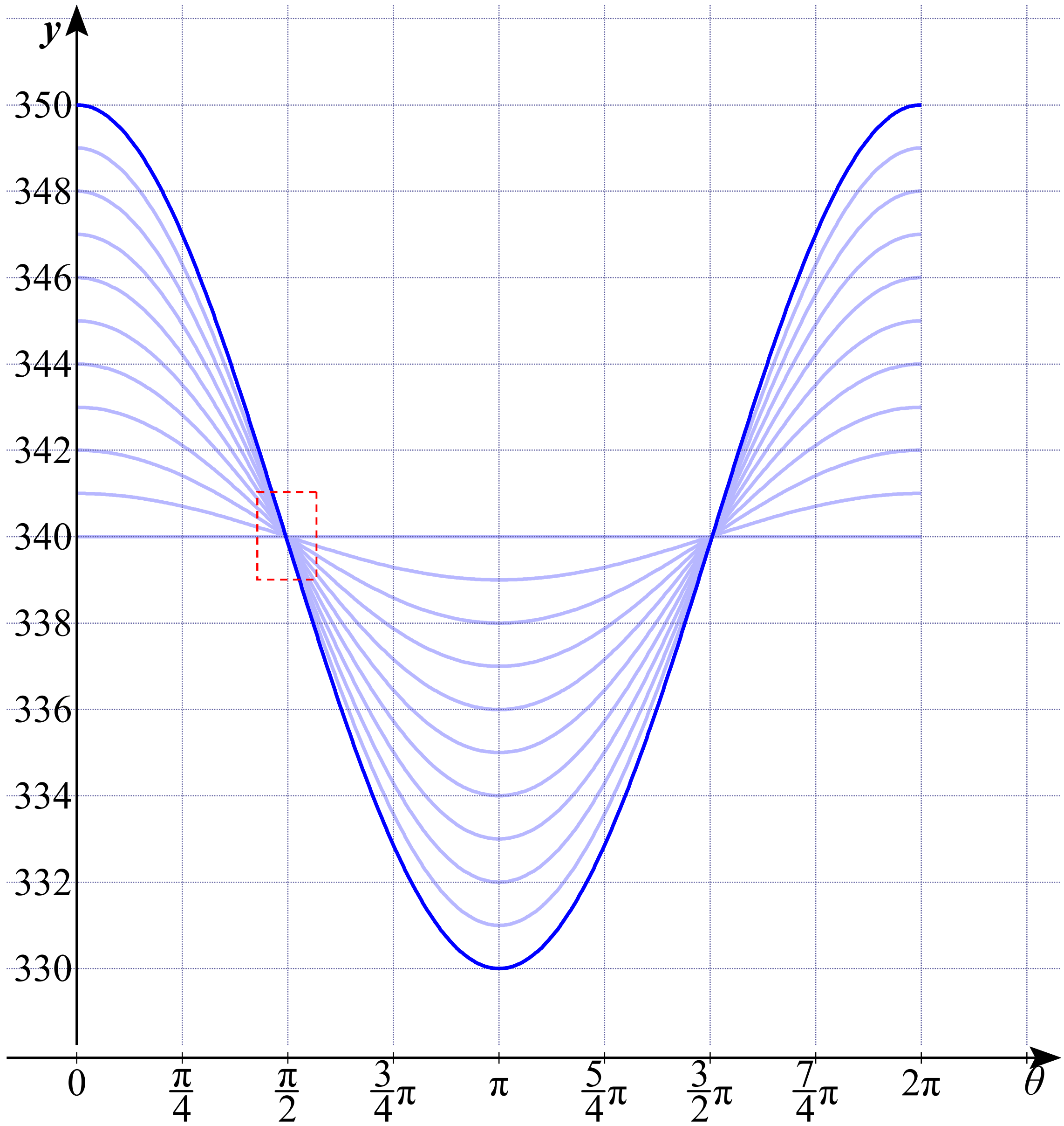
$\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$V = \dfrac{{V_0}^2 - w^2}{\sqrt{{V_0}^2 - w^2}} = \sqrt{{V_0}^2 - w^2}$

$\theta = \pi$ のとき，$V = \dfrac{{V_0}^2 - w^2}{w + V_0} = V_0 - w$

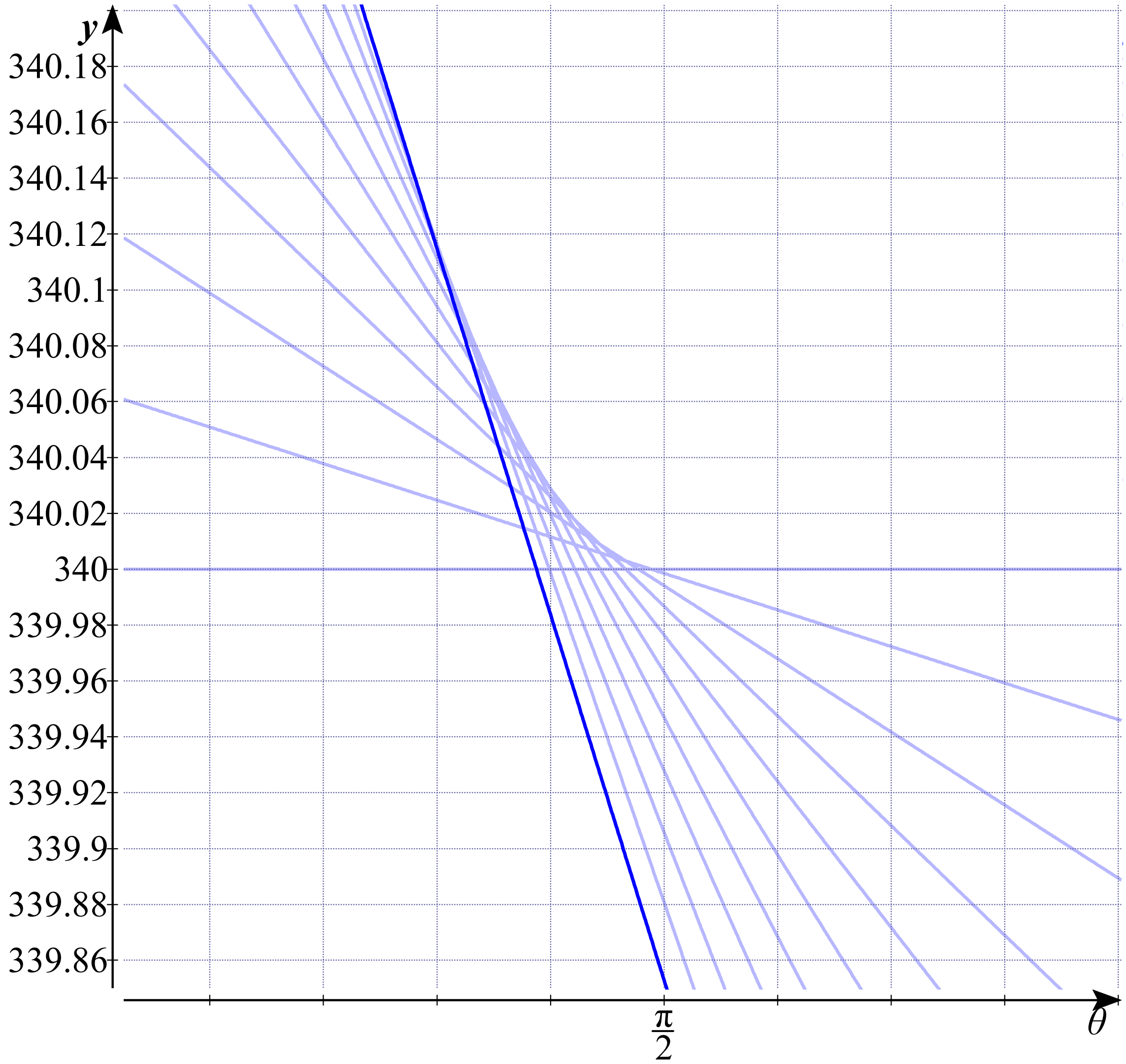


y
(rcos θ ,rsin θ)
r
θ
O
x

$V_0 = 340$ m/s とし，w を 0m/s から 10m/s まで 1m/s ずつ変化させていくと，
次図のようになる。



このグラフからだと，$\left(\frac{\pi}{2},340\right)$ と $\left(\frac{3}{2}\pi,340\right)$ が定点であるとの誤解を招きかねないので，
赤色破線で囲まれた枠内を拡大してみる。


y
340.18
340.16
340.14
340.12
340.1
340.08
340.06
340.04
340.02
340
339.98
339.96
339.94
339.92
339.9
339.88
339.86
π/2
θ