

## 70. ドップラー効果

(1)

イ

音源が出した1個の波を位置Aで観測する時間は、

$$\text{アより, } \frac{1}{f_0} + \frac{1}{V} \left\{ \sqrt{d^2 + \left(\frac{v}{f_0}\right)^2} - 2d \frac{v}{f_0} \cos \theta - d \right\} \text{だから,}$$

位置Aで1秒間あたりに観測する波数、すなわち観測する振動数 $f$ は、

$$f = \frac{1}{\frac{1}{f_0} + \frac{1}{V} \left\{ \sqrt{d^2 + \left(\frac{v}{f_0}\right)^2} - 2d \frac{v}{f_0} \cos \theta - d \right\}}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v}{f_0}\right)^2} - 2d \frac{v}{f_0} \cos \theta &= d \sqrt{1 + \left(\frac{\frac{v}{f_0}}{d}\right)^2 - 2 \frac{\frac{v}{f_0}}{d} \cos \theta} \\ &\approx d \sqrt{1 + 0 - \frac{2v \cos \theta}{df_0}} \\ &= d \left\{ 1 + \left( -\frac{2v \cos \theta}{df_0} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\approx d \left\{ 1 + \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{2v \cos \theta}{df_0} \right) \right\} \\ &= d - \frac{v \cos \theta}{f_0} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{1}{\frac{1}{f_0} + \frac{1}{V} \left\{ \sqrt{d^2 + \left(\frac{v}{f_0}\right)^2} - 2d \frac{v}{f_0} \cos \theta - d \right\}} \\
 &\approx \frac{1}{\frac{1}{f_0} + \frac{1}{V} \left( d - \frac{v \cos \theta}{f_0} - d \right)} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{f_0} - \frac{v \cos \theta}{V f_0}} \\
 &= \frac{1}{\frac{V - v \cos \theta}{V f_0}} \\
 &= \frac{V}{V - v \cos \theta} f_0
 \end{aligned}$$

補足

$$0 < \frac{v}{f_0} \ll d \text{ より, } 0 < \frac{f_0}{d} \ll 1 \text{ よって, } 0 < \left( \frac{v}{f_0} \right)^2 \ll \frac{f_0}{d} \ll 1$$

$$\text{したがって, } \left( \frac{v}{f_0} \right)^2 \approx 0 \text{ としてよい。}$$

また,

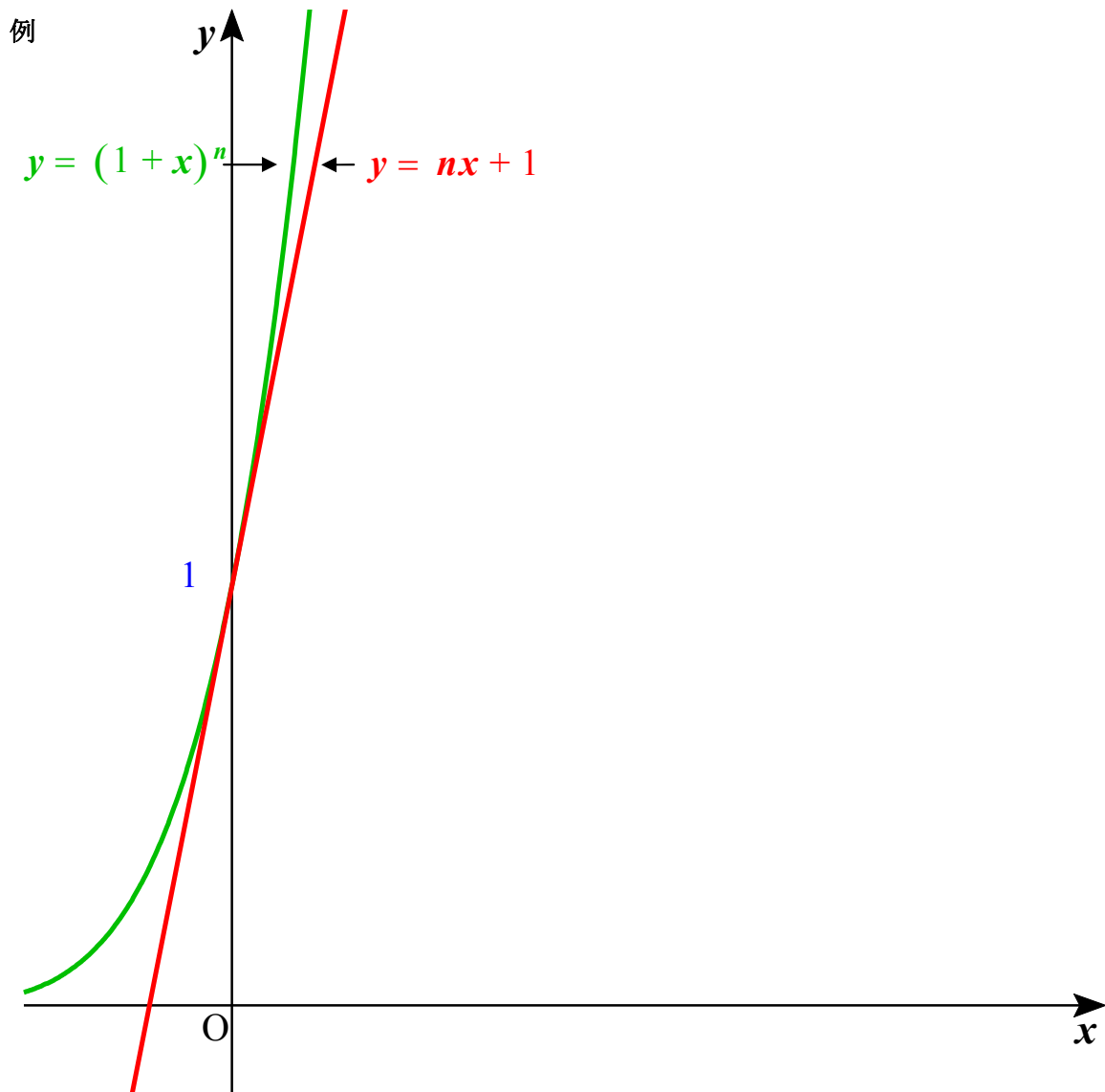
$$f(x) = (1+x)^n \text{ のとき, } f'(x) = n(1+x)^{n-1} \text{ より,}$$

$$\text{接点 } (0, f(0)) \text{ における接線の方程式は, } y = f'(0)(x-0) + f(0) = nx + 1 \quad \therefore y = 1 + nx$$

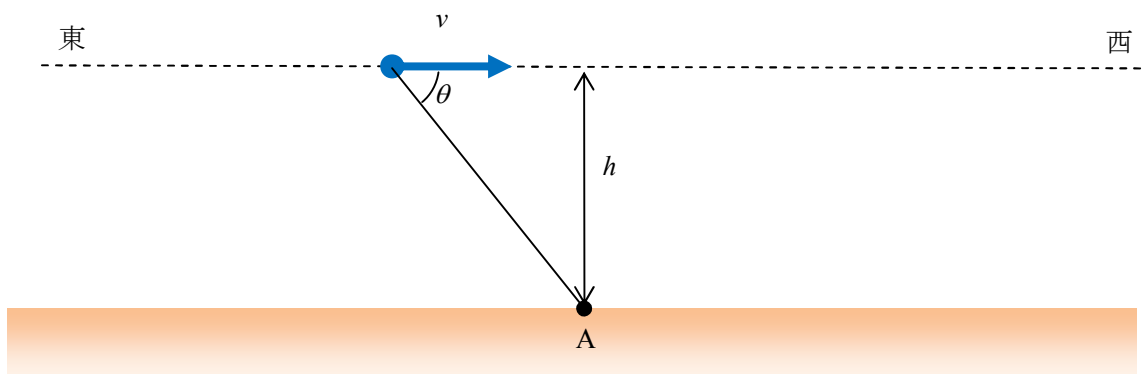
$$\text{ゆえに, } |x| \ll 1 \text{ において, } (1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$\left\{ 1 + \left( -\frac{2v \cos \theta}{df_0} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \text{ では, } -\frac{2v \cos \theta}{df_0} = x \text{ とおくと, } |x| \ll 1 \text{ だから, } (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$$

$$\therefore \left\{ 1 + \left( -\frac{2v \cos \theta}{df_0} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{2v \cos \theta}{df_0} \right) = 1 - \frac{v \cos \theta}{df_0}$$



(2)



**飛行機の速度  $v$**

「遠く」は無限遠のことだから、  
 遠く東（極東）なら  $\theta = 0$ ，遠く西（極西）なら  $\theta = \pi$  としてよい。  
 よって、

$$\text{極東から聞こえ始めた音の振動数 } f_E \text{ は, } f_E = \frac{V}{V - v \cos 0} f_0 = \frac{V}{V - v} f_0$$

$$\text{極西へ遠く飛び去っていく際の音の振動数 } f_W \text{ は, } f_W = \frac{V}{V - v \cos \pi} f_0 = \frac{V}{V + v} f_0$$

$$\text{これと } f_W = \frac{1}{3} f_E \text{ より, } \frac{V}{V + v} f_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{V}{V - v} f_0 \text{ すなわち } \frac{1}{V + v} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{V - v} \quad \therefore v = \frac{V}{2}$$

ゆえに、  $v = 1.7 \times 10^2 \text{ m/s}$

高度  $h$ 

振動数  $f_E \left( = \frac{V}{V-v} f_0 \right)$  の  $\frac{2}{3}$  になるときの  $\theta$  を  $\theta_1$ ,  $\frac{1}{2}$  になるときの  $\theta$  を  $\theta_2$  とする。

$\theta_1$  を求める

$$\frac{V}{V-v \cos \theta_1} f_0 = \frac{2}{3} \frac{V}{V-v} f_0 \text{ より, } \frac{1}{V-v \cos \theta_1} = \frac{2}{3V-3v}$$

$$V=2v \text{ より, } \frac{1}{2v-v \cos \theta_1} = \frac{2}{6v-3v} \quad \therefore \cos \theta_1 = \frac{1}{2}$$

$$0 < \theta < 180^\circ \text{ だから, } \theta_1 = 60^\circ$$

$\theta_2$  を求める

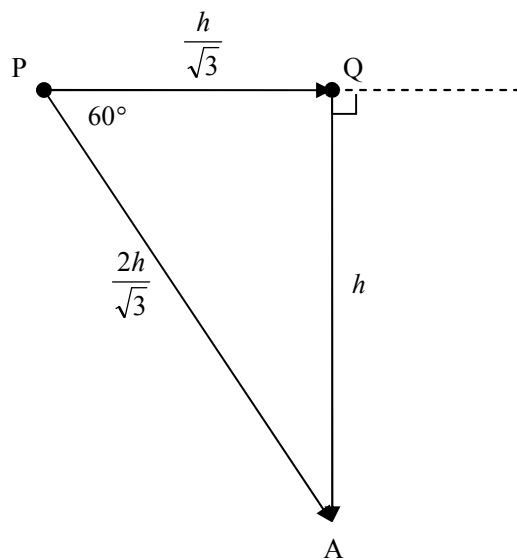
$$\frac{V}{V-v \cos \theta_2} f_0 = \frac{1}{2} \frac{V}{V-v} f_0 \text{ より, } \frac{1}{V-v \cos \theta_2} = \frac{1}{2V-2v}$$

$$V=2v \text{ より, } \frac{1}{2v-v \cos \theta_2} = \frac{1}{4v-2v} \quad \therefore \cos \theta_2 = 0$$

$$0 < \theta < 180^\circ \text{ だから, } \theta_2 = 90^\circ$$

高度  $h$  を求める

$\theta_1, \theta_2$  となる位置をそれぞれ P, Q とすると, 位置関係は次図のようになる。



「振動数が最初の振動数の  $\frac{2}{3}$  から  $\frac{1}{2}$  まで変化する時間が 3.0 秒であった」

とは,

「位置 A で P からの音を観測してから Q からの音を観測するまで 3.0 秒かかった」

ということだから,

音源が P の位置に着いたときの時刻を 0 とすると、  
P からの音を観測した時刻  $t_1$

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{PA}{V} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{3}V} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{3}V} \end{aligned}$$

Q の音を観測した時刻  $t_2$

$t_2 =$  音源が Q に到着した時刻 + Q の音が A に到達するのにかかった時間

$$\begin{aligned} &= \frac{PQ}{v} + \frac{QA}{V} \\ &= \frac{h}{v} + \frac{h}{V} \\ &= \frac{\sqrt{3}h}{V} + \frac{h}{V} \\ &= \frac{2h}{\sqrt{3}V} + \frac{h}{V} \end{aligned}$$

$3.0 = t_2 - t_1$  より、

$$\begin{aligned} 3.0 &= \left( \frac{2h}{\sqrt{3}V} + \frac{h}{V} \right) - \frac{2h}{\sqrt{3}V} \\ &= \frac{h}{V} \end{aligned}$$

$$\therefore h = 3.0V = 3.0 \times 3.4 \times 10^2 = 1.02 \times 10^3 \approx 1.0 \times 10^3 \text{ m}$$

**重要**

とくに波動の問題では、時間処理で混乱することがよくある。  
そのような場合、時刻で考え、時間は時刻差として処理すればよい。  
時刻の数直線を使って考えるのも有効である。

