

## 72. レンズ

(3)

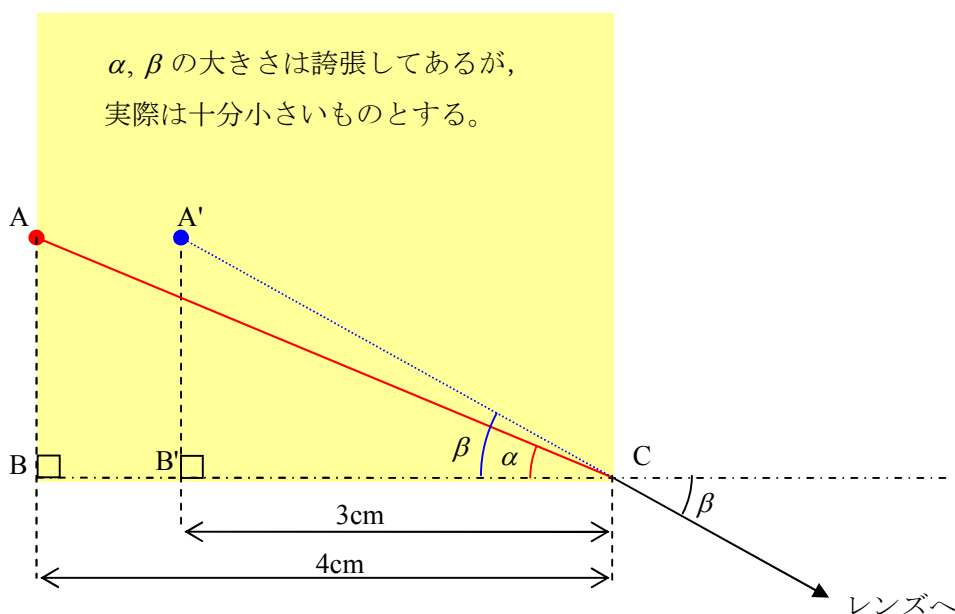
光源とレンズのみかけの距離を  $a'$  とすると、

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{72} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore a' = 9$$

よって、実際の光源より 1cm 上方にある光源の光がレンズに入ることになる。

したがって、見かけの光源の位置は真の光源の上方 1cm の位置にある。



すると、

直角三角形 ABC について、

$$\sin \alpha \approx \tan \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

直角三角形 A'B'C について、

$$\angle A'CB' = \beta \text{ (対頂角) より, } \sin \beta \approx \tan \beta = \frac{A'B'}{B'C} = \frac{A'B'}{3}$$

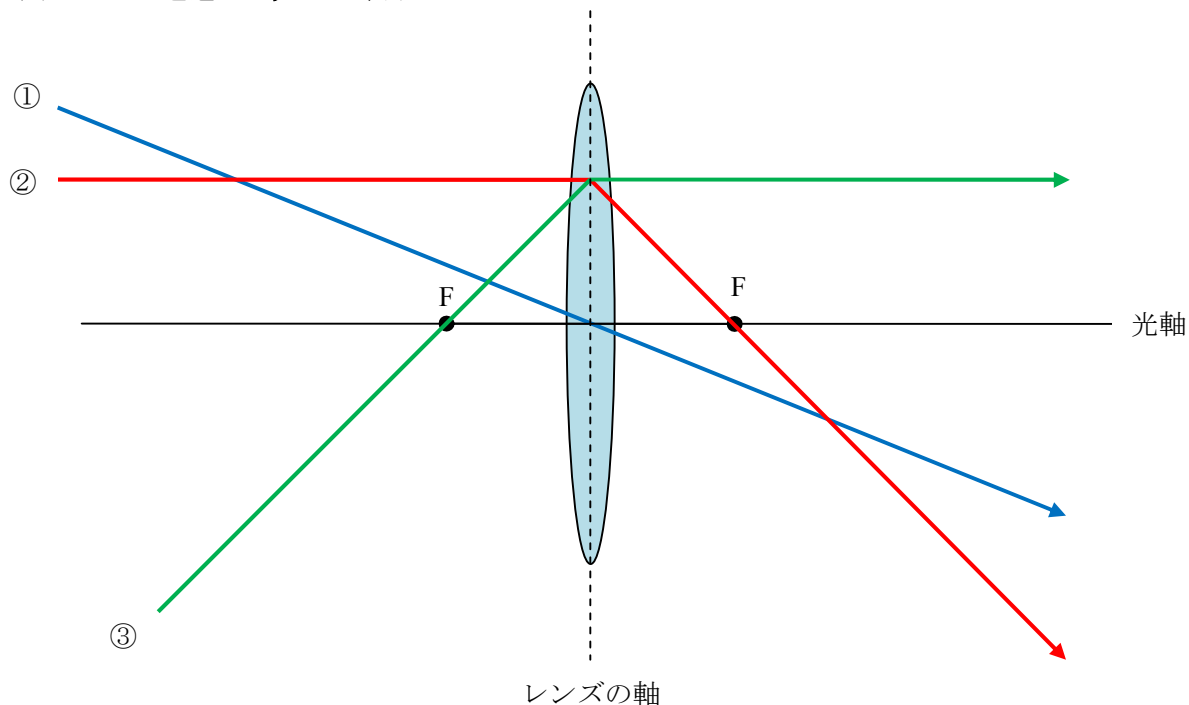
$$\text{これと } AB = A'B' \text{ より, } \sin \beta \approx \frac{AB}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ および } n \sin \alpha = \sin \beta \text{ より, } n = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\frac{AB}{3}}{\frac{AB}{4}} = \frac{4}{3} \approx 1.3$$

## 凸レンズと凹レンズ（実像・虚像・実光源・虚光源とレンズの公式）

### A. 凸レンズ

凸レンズを通過した光の進み方



光軸：レンズ面に垂直な軸

① レンズの中心を通る光は直進する。

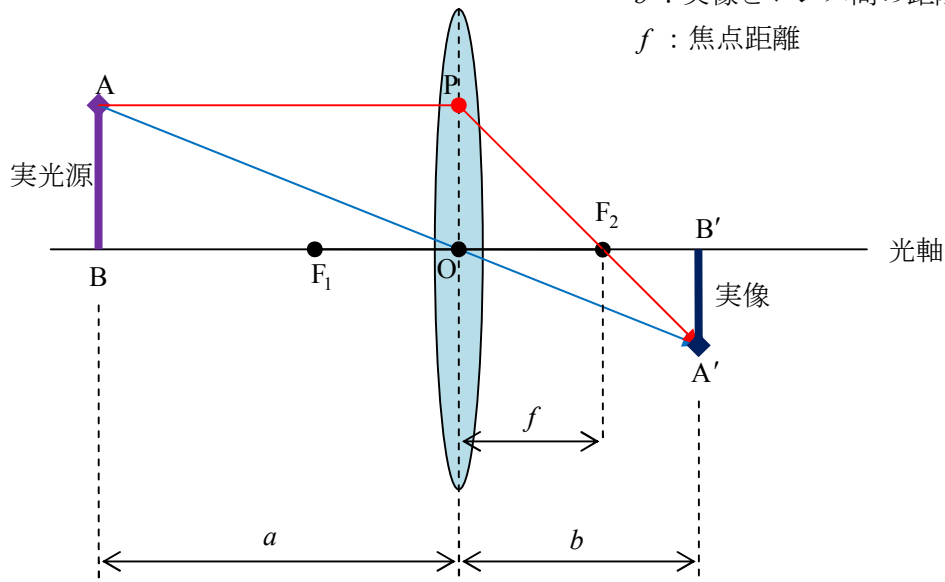
② 光軸に平行にレンズに入った光は、レンズを後方の焦点を通る

③ レンズ前方の焦点を通過してレンズに入った光は、レンズ後方で光軸に平行に進む。

②と③は上図のように描くと、レンズの軸について対称の関係になるから覚えやすい。

凸レンズの公式：実像の場合

$a$  : 実光源（実物体）とレンズ間の距離  
 $b$  : 実像とレンズ間の距離  
 $f$  : 焦点距離



$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$  より,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{a}{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$\triangle POF_2 \sim \triangle A'B'F_2$  より,

$$\frac{PO}{A'B'} = \frac{F_2O}{B'F_2} = \frac{f}{b-f}$$

$PO = AB$  より,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{PO}{A'B'} = \frac{f}{b-f} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より,  $\frac{a}{b} = \frac{f}{b-f}$

$$\therefore ab - af = bf$$

$$\therefore af + bf = ab$$

よって,

実像ができるときの凸レンズの公式:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \dots \textcircled{3}$

凸レンズの公式：虚像の場合

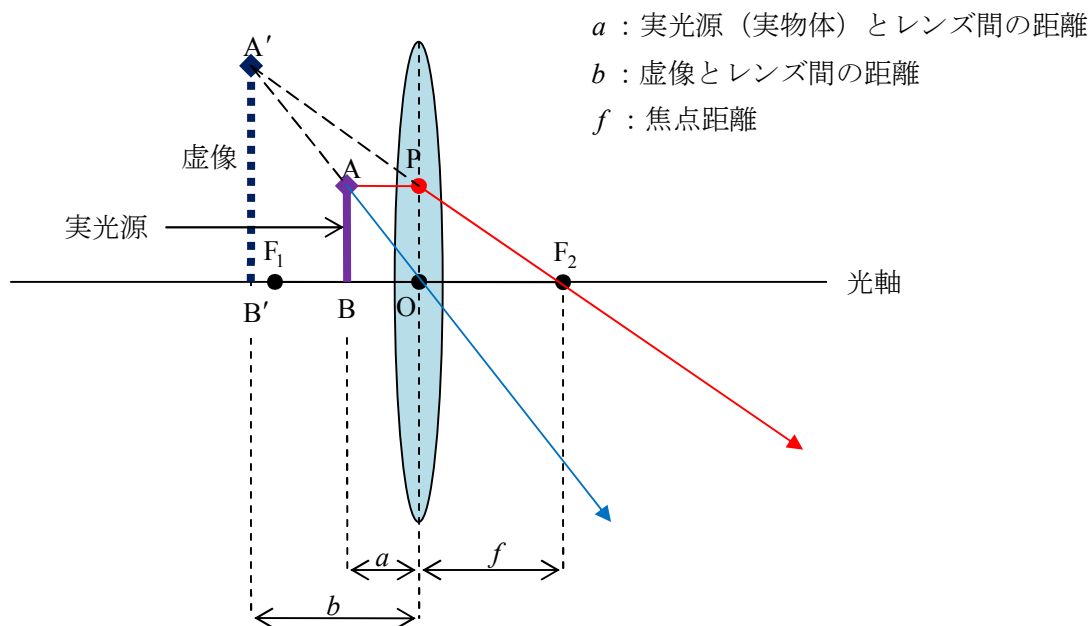
虚像とは

レンズを通過した光線が交わってできる像（実像）ではなく、

その光線を逆方向に延長してはじめて交わる像のこと。

実像は、実際に光線が交わるので、スクリーン上に映すことができるが、

虚像は、光線が交わらないので、スクリーン上に映すことができない。



$\triangle ABO \sim \triangle A'B'O$  より、

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{a}{b} \quad \dots \textcircled{4}$$

$\triangle POF_2 \sim \triangle A'B'F_2$  より、

$$\frac{PO}{A'B'} = \frac{F_2O}{F_2B'} = \frac{f}{b+f}$$

$PO = AB$  より、

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{f}{b+f} \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より}, \frac{a}{b} = \frac{f}{b+f}$$

$$\therefore ab + af = bf$$

$$\therefore bf - af = ab$$

よって、

$$\text{虚像ができるときの凸レンズの公式: } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \dots \textcircled{6}$$

## 凸レンズの公式のまとめ

実像ができるとき

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (a : \text{実光源とレンズの距離}, b : \text{レンズと像の距離}, f : \text{焦点距離})$$

虚像ができるとき

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (a : \text{実光源とレンズの距離}, b : \text{レンズと像の距離}, f : \text{焦点距離})$$

## 虚光源（仮想光源・虚物体）も含めた凸レンズの公式

実像に対し虚像があるように、実光源（実物体）に対し虚光源（仮想光源・虚物体）と呼ばれるものがある。

虚光源（仮想光源・虚物体）とは、実際はそこに光源（実物体）があるわけではないのに、光線を延長すると、延長した光線がそこで収束し、さもそこに光源があるかのように見える仮想の光源のことをいう。

たとえば、実光源（実物体）が凸レンズとその焦点の間にあると虚像ができる。

虚像は、凸レンズを出た光線を逆向きに延長するとできる像なので、

これを凸レンズを通して観察すると、その虚像は実光源（実物体）として目に映る。

よって、凸レンズの虚像を虚光源（仮想光源・虚物体）と見なすこともできる。

虚光源と凸レンズがつくる像を、光は虚光源に向かって進むものとして、つまり虚光源は光を吸収する光源であると見なして作図すると、凸レンズを通過した光線が交わってできる像（実像）と実光源（実物体）が、当然ながら、ぴたりと一致する。

極論すれば、光源と像の関係が入れかわる。

すると、 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ において、

$a$ がレンズと像の距離、 $b$ が虚光源とレンズの距離にあたるので、

虚光源とレンズの距離を $a'$ 、レンズと像の距離を $b'$ とおくと、

$$a = b', \quad b = a' \text{ より, } -\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f} \text{ と変形できる。}$$

そこで、

虚光源も含めて凸レンズの公式をまとめると、

$$\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (a : \text{光源とレンズの距離}, b : \text{レンズと像の距離}, f : \text{焦点距離})$$

ただし、

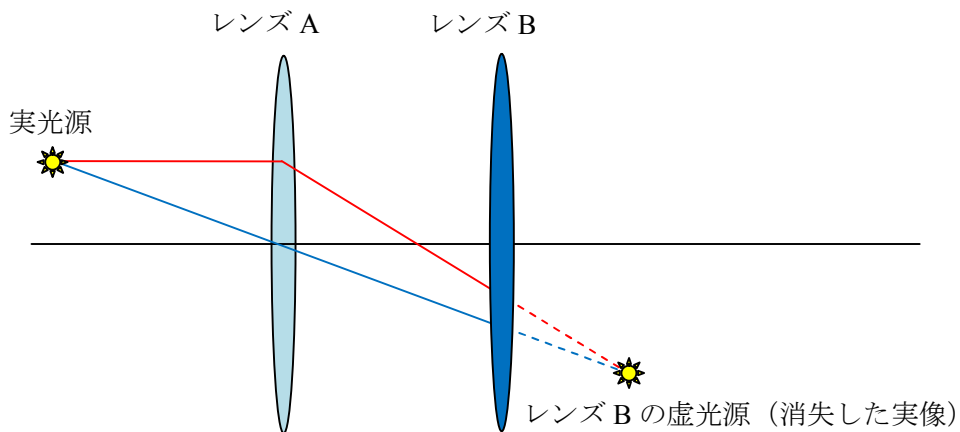
$a$ については、実光源の場合 $a$ 、虚光源の場合 $-a$

$b$ については、実像の場合 $b$ 、虚像の場合 $-b$

となる。

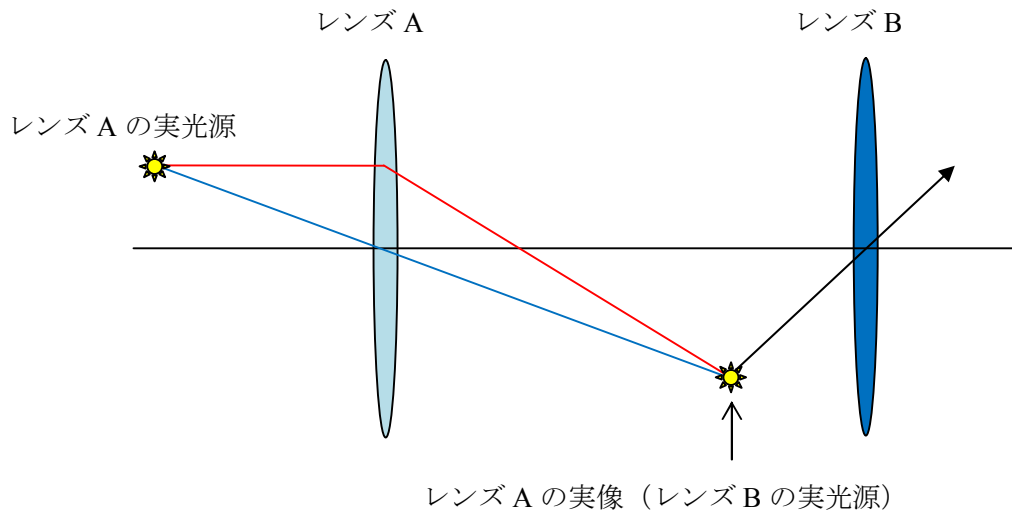
### 2枚の凸レンズがつくる像と虚光源

レンズ A とそれを通過した光がつくる実像の間にレンズ B をいれると、  
レンズ A がつくる実像は消失するが、その消失した実像をレンズ B の虚光源とすると、  
2枚のレンズがつくる実像を作図することができる。

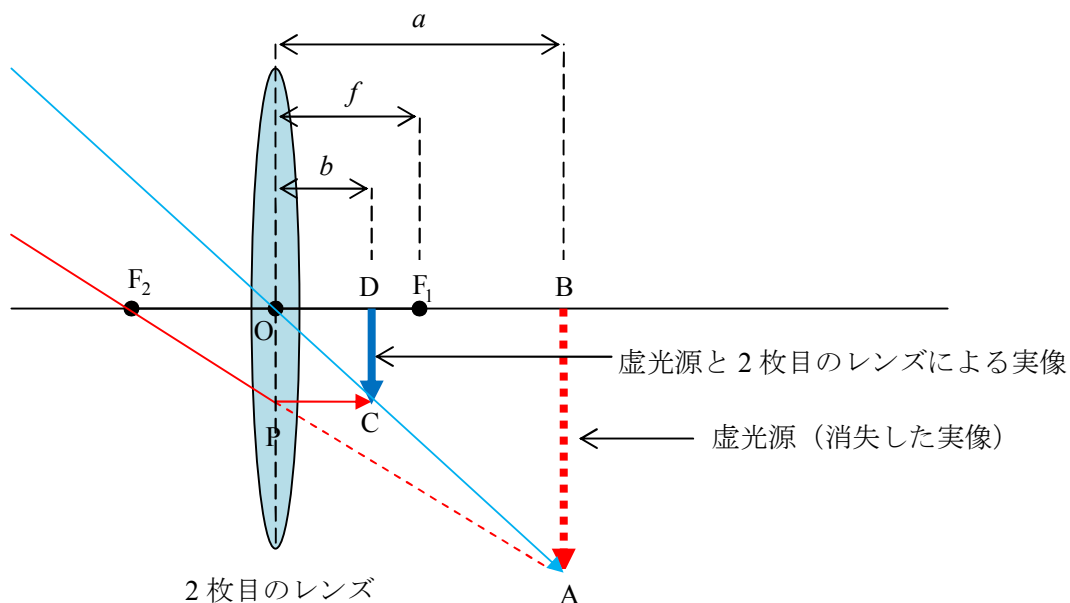


### 注意

実像は実際に光線が交わってできた像であり、スクリーン上に映すことができるから、  
実光源 (実物体) と見なせる。よって、レンズ A の実像がレンズ B の前方にできた場合、  
その実像はレンズ B の「実光源 (実物体)」である。



では、虚光源とレンズの距離を  $a$ 、レンズと実像の距離を  $b$ 、焦点距離を  $f$  とおいて、  
虚光源と実像の間に  $-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  の関係が成り立つことを作図により確かめてみよう。



作図の仕方

1枚目のレンズのみの場合の実像 AB を作図後、点 A に向かって直進する光線のうち、  
2枚目のレンズの中心 O を通るものと、2枚目のレンズの焦点  $F_2$  を通るものを使う。  
中心 O を通るものはそのまま直進し、  
焦点  $F_2$  を通るものは、2枚目のレンズを通過後、光軸と平行に進むので、  
これらの光線が交わり、実像 CD ができる。

証明

$$\triangle CDO \sim \triangle ABO \text{ より, } \frac{CD}{AB} = \frac{DO}{BO} = \frac{b}{a} \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\triangle F_2AB \sim \triangle F_2PO \text{ より, } \frac{PO}{AB} = \frac{F_2O}{F_2B} = \frac{f}{a+f}$$

$$\text{これと } PO = CD \text{ より, } \frac{CD}{AB} = \frac{f}{a+f} \quad \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{ より, } \frac{b}{a} = \frac{f}{a+f}$$

$$\therefore -bf + af = ab$$

$$\text{両辺を } \frac{1}{abf} \text{ 倍すると, } -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

## 凸レンズのまとめ

### 凸レンズの公式の表し方 1

$$\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad (a : \text{光源とレンズの距離}, b : \text{レンズと像の距離}, f : \text{焦点距離})$$

ただし,

$a$  については,

実光源 (光を放出する光源) の場合 :  $a$

虚光源 (光を吸収する光源) の場合 :  $-a$

$b$  については,

実像 (スクリーン上に映せる像) の場合 :  $b$

虚像 (スクリーン上に映せない) の場合 :  $-b$

### 凸レンズの公式の表し方 2

$a$  と  $b$  を距離ではなく, 凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ただし,

$a$  については,

実光源の場合 :  $a > 0$

虚光源の場合 :  $a < 0$

$b$  については,

実像の場合 :  $b > 0$

虚像の場合 :  $b < 0$



凸レンズの公式のグラフ化

$a$  と  $b$  を凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とする式

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  を用い、変数  $a$  を横軸、変数  $b$  を縦軸とするグラフを描くことにする。

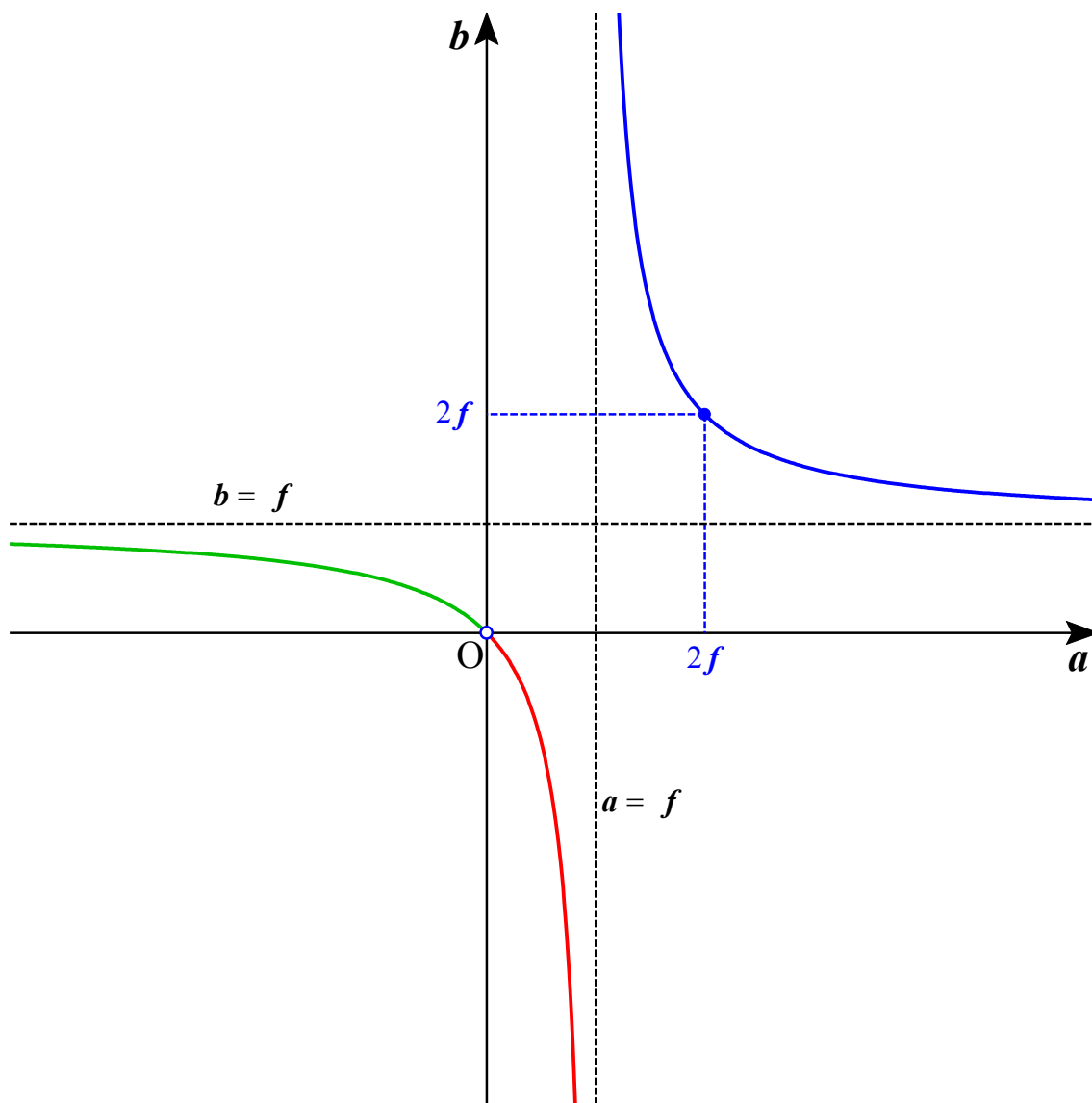
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \text{ より, } bf + af = ab \quad \therefore b = \frac{af}{a-f} = \frac{f(a-f) + f^2}{a-f}$$

$$\therefore b = f + \frac{f^2}{a-f}$$

実光源と実像： $a > f$  (青色曲線)

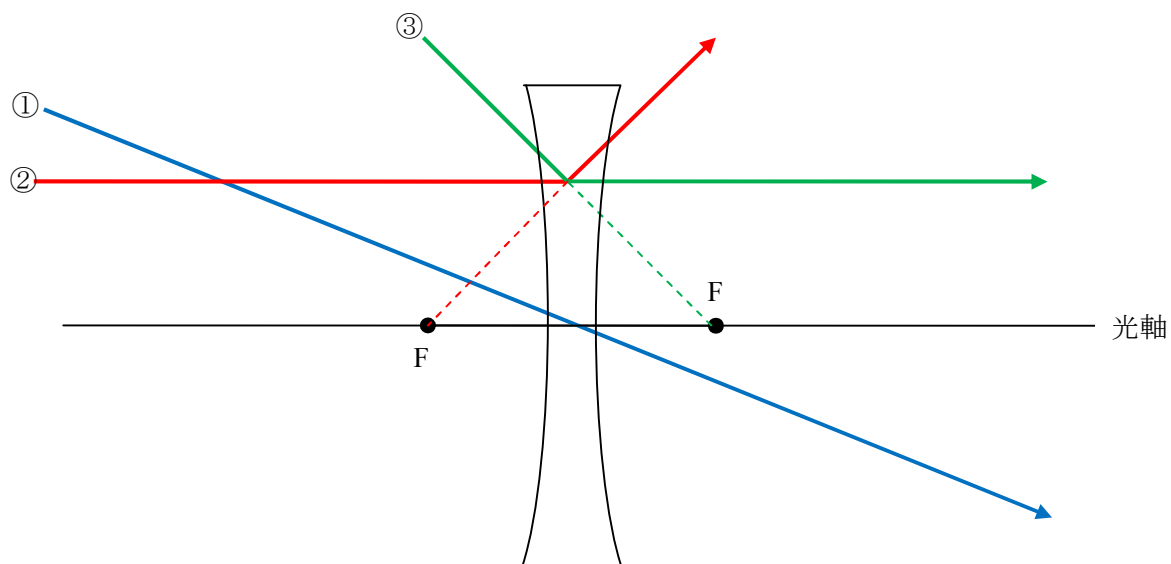
実光源と虚像： $0 < a < f$  (赤色曲線)

虚光源と実像： $a < 0$  (緑色曲線)



## B. 凹レンズ

凹レンズを通過した光の進み方



光軸：レンズ面に垂直な軸

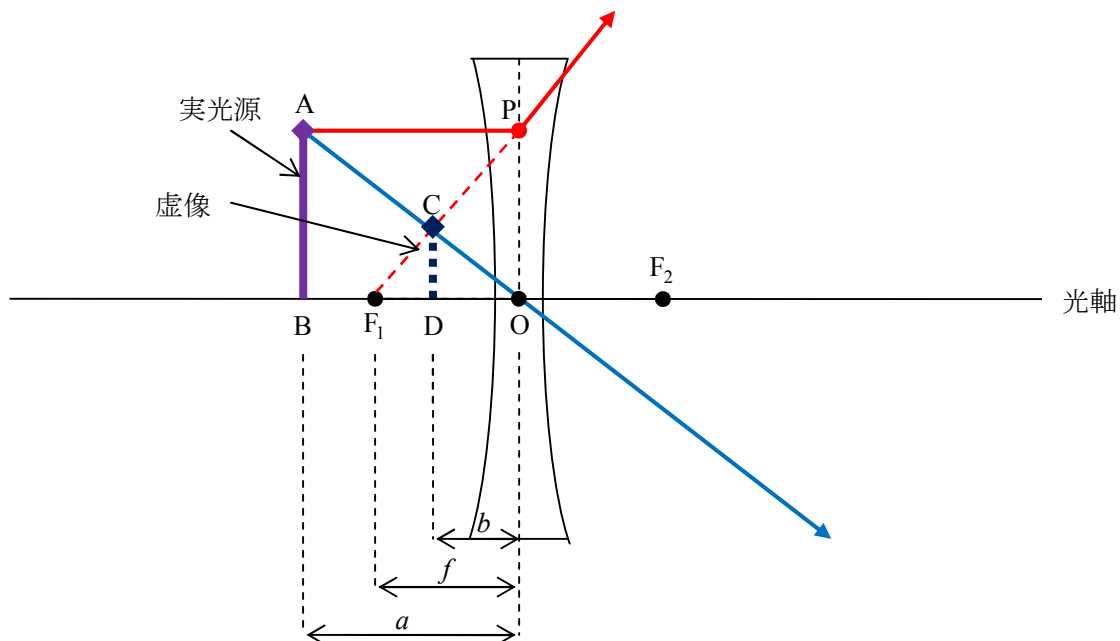
- ① レンズの中心を通る光は直進する。
  - ② 光軸に平行にレンズに入った光は、レンズ前方の焦点を虚光源とする向きに進む。
  - ③ レンズ後方の焦点方向にレンズに入った光は、光軸に平行に進む。
- ②と③は上図のように描くと、レンズについて対称の関係になるから覚えやすい。

### 凹レンズの公式

光源とレンズの距離を  $a$ 、像とレンズの距離を  $b$ 、焦点距離を  $f$  とする。

#### 実光源と虚像の場合

凸レンズの実光源の虚像の作図と同じく、  
実光源を出て凹レンズを通過した光線を逆向きに延長すると、  
スクリーン上に映せない像、すなわち虚像ができる。



$$\triangle ABO \sim \triangle CDO \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO} = \frac{a}{b} \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\triangle POF_1 \sim \triangle CDF_1 \text{ より, } \frac{PO}{CD} = \frac{F_1O}{F_1D} = \frac{f}{f-b}$$

$$\text{これと } PO = AB \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{f}{f-b} \quad \dots \textcircled{10}$$

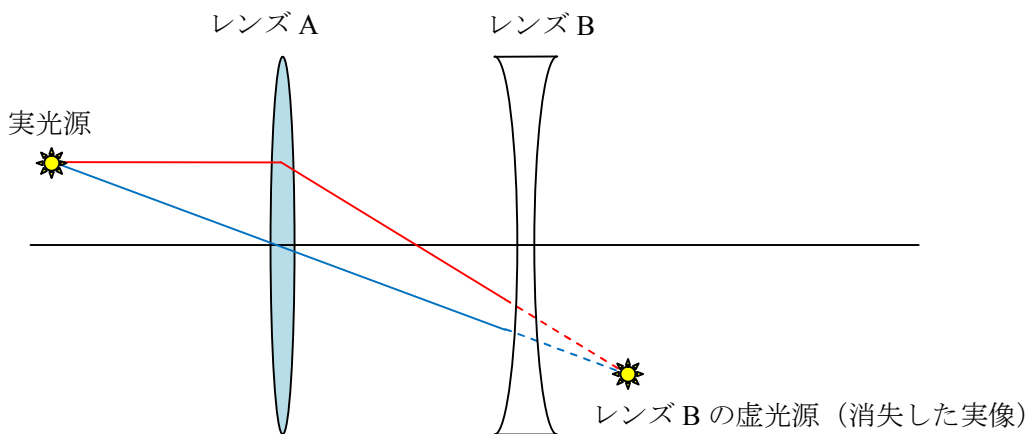
$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } \frac{a}{b} = \frac{f}{f-b} \quad \therefore bf - af = -ab$$

$$\text{両辺を } \frac{1}{abf} \text{ 倍することにより, } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \dots \textcircled{11}$$

こうすることで、凸レンズの公式と同じく、実光源の場合  $a$ 、虚像の場合  $-b$  となるので、  
凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

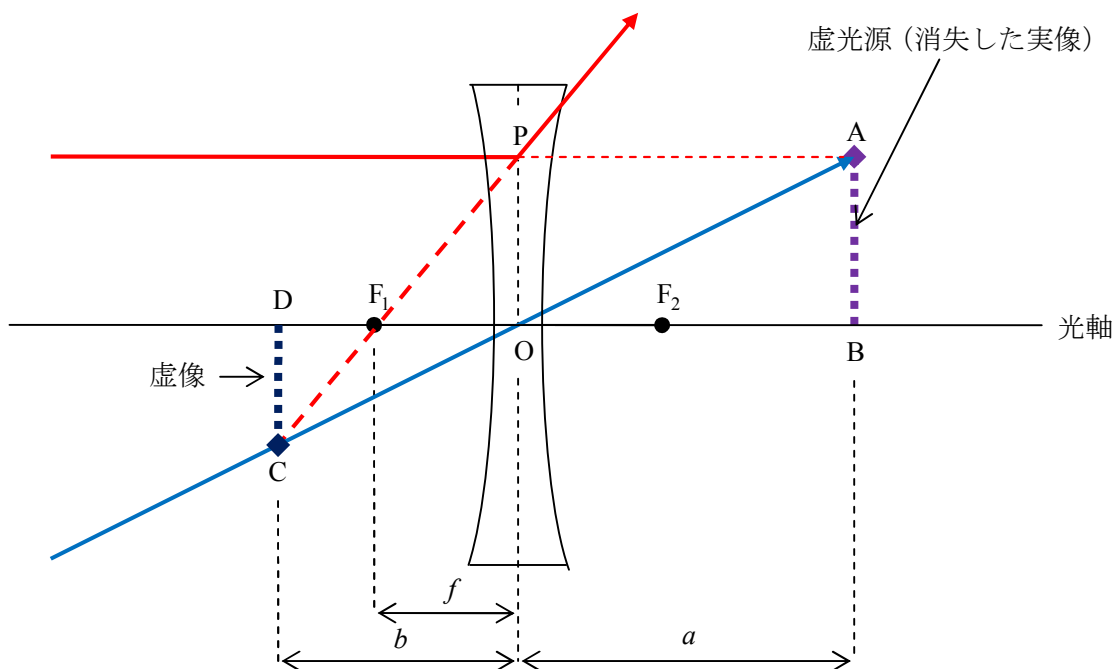
凸レンズと凹レンズがつくる像と虚光源

凸レンズ A とそれを通過した光がつくる実像の間に凹レンズ B をいれると、凸レンズ A がつくる実像は消失するが、消失した実像を凹レンズ B の虚光源とすると、2 枚のレンズがつくる像（実像と虚像）を作図することができる。



虚光源が凹レンズの焦点の外側にあるとき、虚像ができる。

虚光源に向かって凹レンズに入射、屈折した光線（赤色の矢印と青色の矢印）を逆向きに延長すると、虚像ができる。



$$\triangle ABO \sim \triangle CDO \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO} = \frac{a}{b} \quad \dots \textcircled{12}$$

$$\triangle POF_1 \sim \triangle CDF_1 \text{ より, } \frac{PO}{CD} = \frac{F_1O}{F_1D} = \frac{f}{b-f}$$

$$\text{これと } PO = AB \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{f}{b-f} \quad \dots \textcircled{13}$$

$$\textcircled{12}, \textcircled{13} \text{ より, } \frac{a}{b} = \frac{f}{b-f}$$

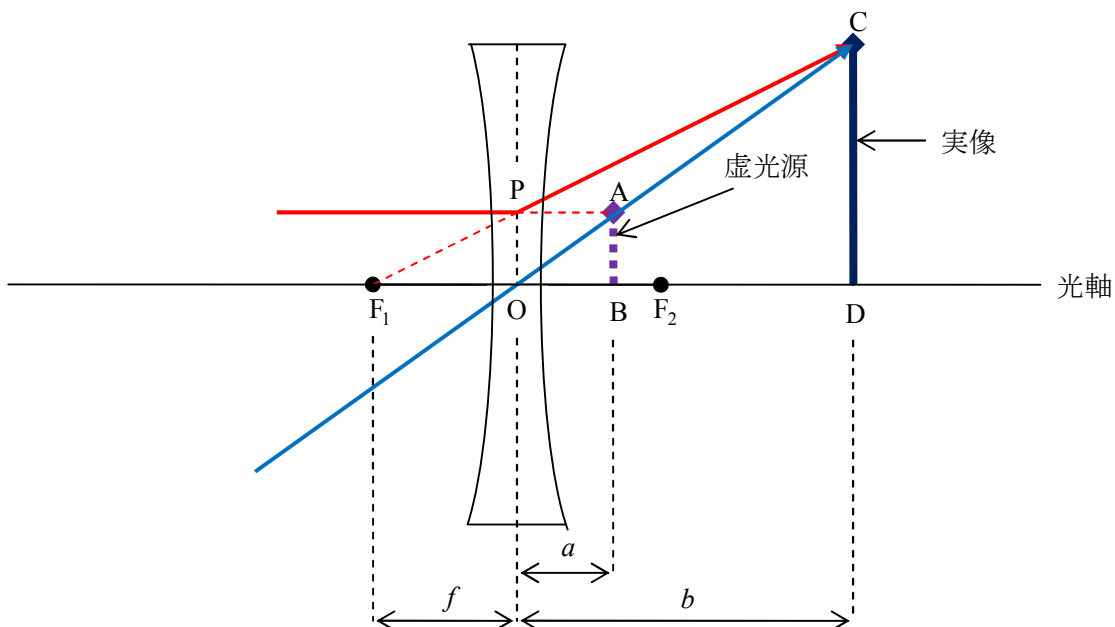
$$\therefore -bf - af = -ab$$

$$\therefore -\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \dots \textcircled{14}$$

こうすることで、凸レンズの公式と同じく、虚光源の場合  $-a$ 、虚像の場合  $-b$  となるので、凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

虚光源が凹レンズと凹レンズの焦点の間にあるとき、実像ができる。

虚光源に向かって凹レンズに入射、屈折した光線（赤色の矢印と青色の矢印）が交わり、実像ができる。



$$\triangle ABO \sim \triangle CDO \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{BO}{DO} = \frac{a}{b} \quad \dots \textcircled{15}$$

$$\triangle POF_1 \sim \triangle CDF_1 \text{ より, } \frac{PO}{CD} = \frac{F_1O}{F_1D} = \frac{f}{f+b}$$

$$\text{これと } PO = AB \text{ より, } \frac{AB}{CD} = \frac{f}{f+b} \quad \dots \textcircled{16}$$

$$\textcircled{15}, \textcircled{16} \text{ より, } \frac{a}{b} = \frac{f}{f+b}$$

$$\therefore -bf + af = -ab$$

$$\therefore -\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad \dots \textcircled{17}$$

こうすることで、凸レンズの公式と同じく、虚光源の場合  $-a$ 、実像の場合  $b$  となるので、凸レンズの公式と凹レンズの公式をまとめることが可能になる。

## 凹レンズのまとめ

### 凹レンズの公式の表し方 1

$$\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \quad (a : \text{光源とレンズの距離, } b : \text{レンズと像の距離, } f : \text{焦点距離})$$

ただし、

$a$  については、

実光源（光を放出する光源）の場合： $a$

虚光源（光を吸収する光源）の場合： $-a$

$b$  については、

実像（スクリーン上に映せる像）の場合： $b$

虚像（スクリーン上に映せない）の場合： $-b$

### 凹レンズの公式の表し方 2

$a$  と  $b$  を距離ではなく、凹レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$$

ただし、

$a$  については、

実光源の場合： $a > 0$

虚光源の場合： $a < 0$

$b$  については、

実像の場合： $b > 0$

虚像の場合： $b < 0$

凹レンズの公式のグラフ化

$a$  と  $b$  を凸レンズの中心を原点とする光軸上の位置とする式

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$  を用い、変数  $a$  を横軸、変数  $b$  を縦軸とするグラフを描くことにする。

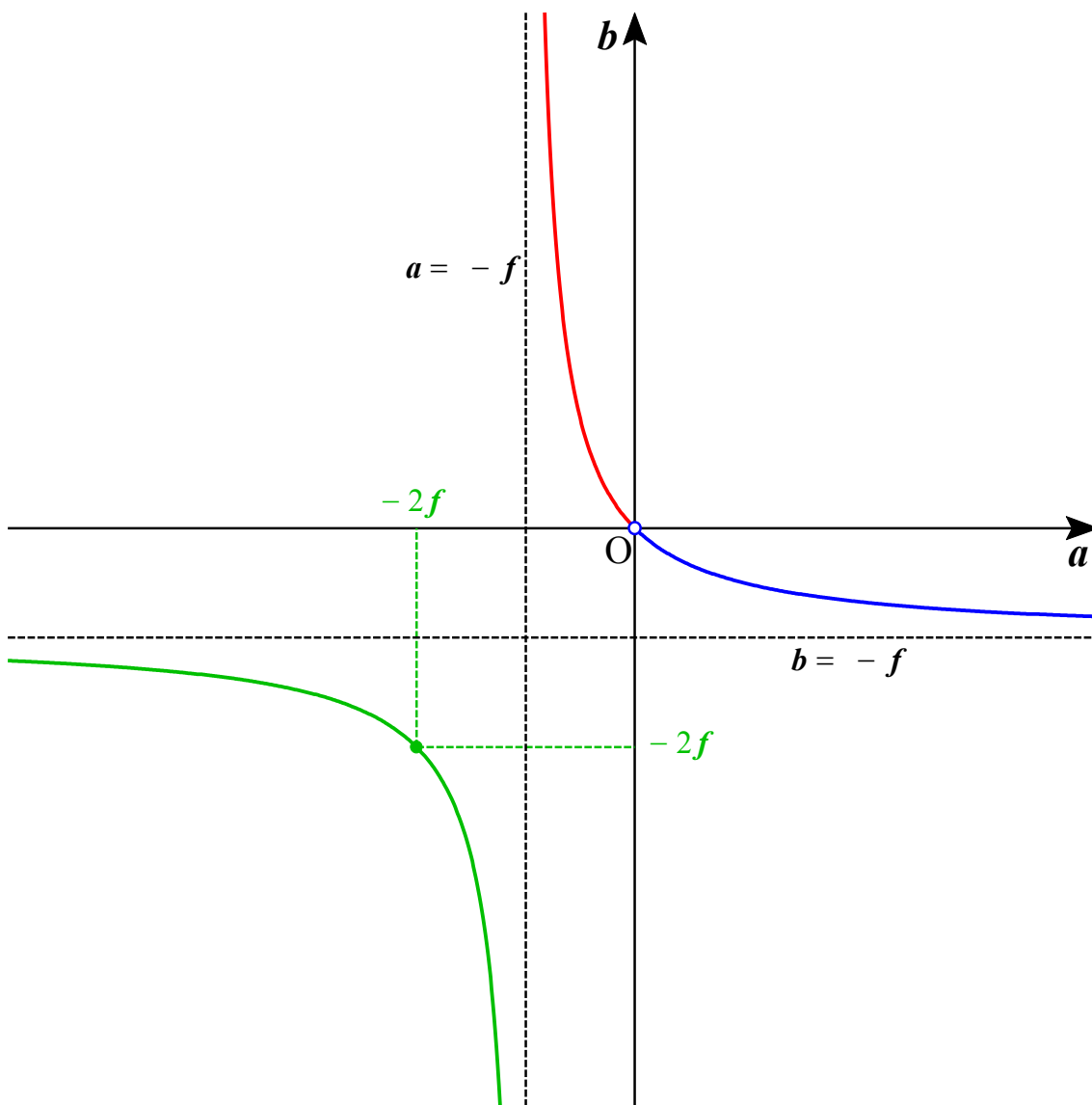
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f} \text{ より, } bf + af = -ab \quad \therefore b = \frac{-af}{a+f} = \frac{-f(a+f) + f^2}{a+f}$$

$$\therefore b = -f + \frac{f^2}{a+f}$$

実光源と虚像： $a > 0$  (青色曲線)

虚光源と実像： $-f < a < 0$  (赤色曲線)

虚光源と虚像： $a < -f$  (緑色曲線)



## 凸レンズと凹レンズのまとめ

### レンズの公式の表し方 1

$$\pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b} = \pm \frac{1}{f} \quad (a : \text{光源とレンズの距離}, b : \text{レンズと像の距離}, f : \text{焦点距離})$$

ただし,

$a$  については,

実光源 (光を放出する光源) の場合 :  $a$

虚光源 (光を吸収する光源) の場合 :  $-a$

$b$  については,

実像 (スクリーン上に映せる像) の場合 :  $b$

虚像 (スクリーン上に映せない) の場合 :  $-b$

$f$  については,

凸レンズの場合 :  $f$

凹レンズの場合 :  $-f$

### レンズの公式の表し方 2

$a$  と  $b$  を距離ではなく, レンズの中心を原点とする光軸上の位置とすると,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \pm \frac{1}{f}$$

ただし,

$a$  については,

実光源の場合 :  $a > 0$

虚光源の場合 :  $a < 0$

$b$  については,

実像の場合 :  $b > 0$

虚像の場合 :  $b < 0$

$f$  については,

凸レンズの場合 :  $f$

凹レンズの場合 :  $-f$