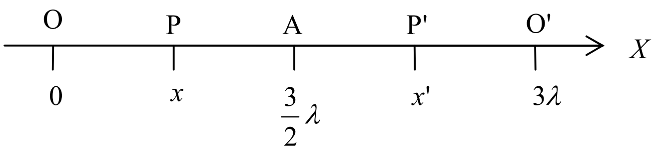
1　波の干渉

(3)

合成波（定常波）の方程式を求めてみる。



点 O, P と A に関して対称な点を O', P' とし，

波源 O を原点とする X 軸を上図のようにとる。

波源 O の単振動の方程式を $y_{\mathrm{O}} = a\sin\omega t$ とする。

点 P における直接波の方程式

波源の時刻 t の変位が点 P に伝わる時刻を t_{P} , 変位が伝わる速さ（波の速さ）を v とすると，

$t_{\mathrm{P}} = t + \dfrac{|x|}{v}$ より， $t = t_{\mathrm{P}} - \dfrac{|x|}{v}$

よって，点 P における変位を y_{P} とすると， $y_{\mathrm{P}} = a\sin\omega\left(t_{\mathrm{P}} - \dfrac{|x|}{v}\right)$

$x > 0$ より， $y_{\mathrm{P}} = a\sin\omega\left(t_{\mathrm{P}} - \dfrac{x}{v}\right)$

さらに t_{P} を t に書き改めることにより， $y_{\mathrm{P}} = a\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$　・・・①

点 P における反射波の方程式

反射波の位相が A で変化しないということは，点 P における反射波の位相と点 A で反射することなく通過した仮想波の点 P' における位相が同じということである。

したがって，点 P' における波の方程式を求めればよい。

$\mathrm{O'P'} = \mathrm{OP} = |x|$ より， $x' = \mathrm{OO'} - \mathrm{O'P'} = 3\lambda - |x|$

これと $x > 0$ より， $x' = 3\lambda - x$

よって，反射波の点 P における変位を $y_{\mathrm{P'}}$ とすると，①と同様にして，

$y_{\mathrm{P'}} = a\sin\omega\left(t - \dfrac{x'}{v}\right) = a\sin\omega\left(t - \dfrac{3\lambda - x}{v}\right)$　・・・②

合成波（定常波）の方程式

①＋②より，

$$
\begin{aligned}
y_{\mathrm{P}} + y_{\mathrm{P'}} &= a\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+a\sin\omega\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)\\
&=2a\cos\omega\cdot\frac{t-\frac{x}{v}-\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)}{2}\sin\omega\cdot\frac{t-\frac{x}{v}+\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)}{2}\\
&=2a\cos\omega\cdot\frac{3\lambda-2x}{2v}\sin\omega\left(t-\frac{3\lambda}{2v}\right)\\
&=2a\cos 2\pi f\cdot\frac{3\lambda-2x}{2f\lambda}\sin 2\pi f\left(t-\frac{3\lambda}{2f\lambda}\right)\\
&=2a\cos 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\lambda}\right)\sin 2\pi\left(ft-\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}
$$

腹の位置

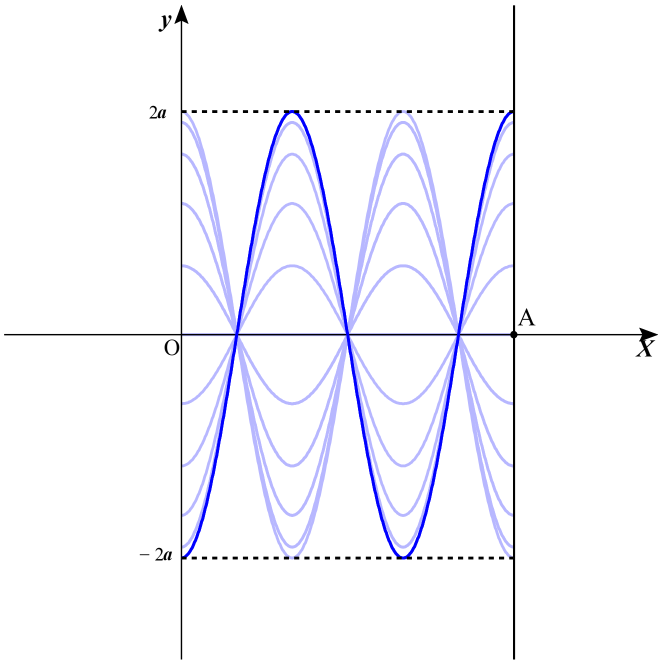
$\cos 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\lambda}\right)=\pm 1$ を満たすから，$2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\lambda}\right)=n\pi \quad \therefore x=\frac{\lambda}{2}(3-n)$

これと $0\leq x\leq\frac{3}{2}\lambda$ より，$x=0,\ \frac{\lambda}{2},\ \lambda,\ \frac{3}{2}\lambda$

節の位置

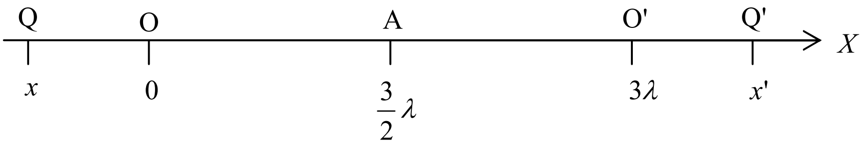
$\cos 2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\lambda}\right)=0$ を満たすから，$2\pi\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{\lambda}\right)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad \therefore x=\frac{\lambda}{4}(5-2n)$

これと $0\leq x\leq\frac{3}{2}\lambda$ より，$x=\frac{\lambda}{4},\ \frac{3}{4}\lambda,\ \frac{5}{4}\lambda$



(4)

合成波の方程式を求めてみる。



点 Q における直接波の方程式

波源の時刻 t の変位が点 P に伝わる時刻を t_Q，変位が伝わる速さ（波の速さ）を v とすると，

$t_Q = t + \frac{|x|}{v}$ より，$t = t_Q - \frac{|x|}{v}$

よって，点 Q における変位を y_Q とすると，$y_Q = a\sin\omega\left(t_Q - \frac{|x|}{v}\right)$

$x < 0$ より，$y_Q = a\sin\omega\left(t_Q + \frac{x}{v}\right)$

さらに t_Q を t に書き改めることにより，$y_Q = a\sin\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$　・・・③

点 Q における反射波の方程式

反射波の位相が A で変化しないということは，点 Q における反射波の位相と点 A で反射することなく通過した仮想波の点 Q' における位相が同じということである。

したがって，点 Q' における波の方程式を求めればよい。

$O'P' = OP = |x|$ より，$x' = OO' + O'Q' = 3\lambda + |x|$

これと $x < 0$ より，$x' = 3\lambda - x$

よって，反射波の点 Q における変位を y_Q とすると，③と同様にして，

$y_{Q'} = a\sin\omega\left(t - \frac{x'}{v}\right) = a\sin\omega\left(t - \frac{3\lambda - x}{v}\right)$　・・・④

合成波の方程式

③＋④より，

$$y_{\mathrm{Q}} + y_{\mathrm{Q'}} = a\sin\omega\left(t+\frac{x}{v}\right) + a\sin\omega\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)$$

$$= 2a\cos\omega\cdot\frac{t+\frac{x}{v}-\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)}{2}\sin\omega\cdot\frac{t+\frac{x}{v}+\left(t-\frac{3\lambda-x}{v}\right)}{2}$$

$$= 2a\cos\omega\cdot\frac{3\lambda}{2v}\sin\omega\left(t+\frac{2x-3\lambda}{2v}\right)$$

$$= 2a\cos 2\pi f\cdot\frac{3\lambda}{2f\lambda}\sin 2\pi f\left(t+\frac{2x-3\lambda}{2f\lambda}\right)$$

$$= 2a\cos 3\pi\sin 2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}-\frac{3}{2}\right)$$

これより，振幅＝$|2a\cos 3\pi| = 2a$

ゆえに，点 Q における単振動の方程式は $y = 2a\sin 2\pi\left(ft+\frac{x}{\lambda}-\frac{3}{2}\right)$