11．静電気

(1)

粒子の大きさが無視できるから，粒子 B は点電荷としてよい。

したがって，電位（単位電荷の静電気力の位置エネルギー）の基準位置を無限遠にとると，

粒子 B からの距離が r の位置の電位は $k\dfrac{Q}{r}$ [V]で与えられる。

よって，電荷が $+q$ の粒子 A の静電気力の位置エネルギーは $k\dfrac{qQ}{r}$ [J]（$\mathrm{J}=\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}$）

また，条件より，この系では，静電気力（保存力）のみが働いているから，

力学的エネルギー保存則

静電気力の位置エネルギー＋運動エネルギー＝一定

が成り立つ。

粒子 A の最初の位置の力学的エネルギー

「粒子 A が最初 B から十分離れた位置にある」は，

「粒子 A が最初 B から無限遠の位置にある」としてよいから，

最初の位置の粒子 A の静電気力の位置エネルギーは，$\displaystyle\lim_{r\to\infty} k\frac{qQ}{r}=0$

運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2$

よって，力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2$　・・・①

粒子 A が粒子 B に最接近した位置の力学的エネルギー

粒子 A の静電気力の位置エネルギーは $\dfrac{kqQ}{r_0}$

最接近したとき粒子 A は固定された粒子 B に対し静止するから，

粒子 A の速さは 0 になる。したがって，その運動エネルギーは 0

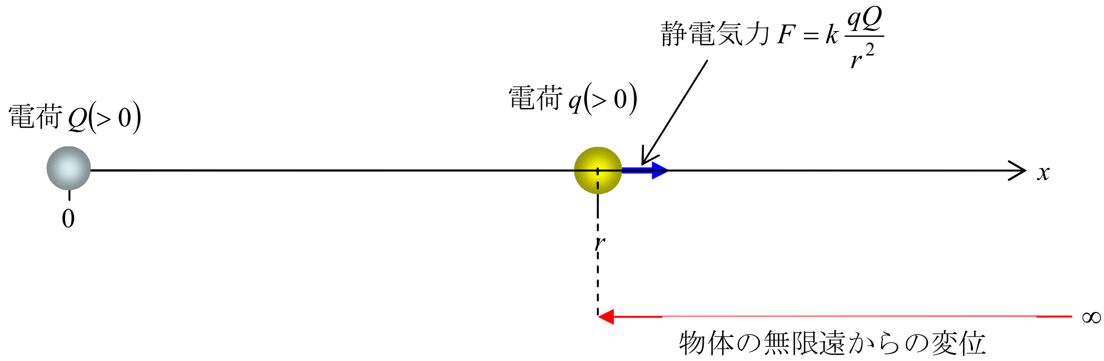
よって，力学的エネルギーは $\dfrac{kqQ}{r_0}$　・・・②

以上より，①＝②，すなわち $\dfrac{1}{2}m{v_0}^2=\dfrac{kqQ}{r_0}$ が成り立つ。

よって，$r_0=\dfrac{2kqQ}{m{v_0}^2}$　・・・(答)

補足

点電荷 Q（>0）がつくる電界中の電荷の静電気力の位置エネルギーと電位の求め方



変位の向きと静電気力（保存力）の向きのなす角は 180° だから，
電荷 q が微小変位するとき，

静電気力（保存力）がする仕事 $dW=\vec{F}\cdot d\vec{x}=\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right|\cos 180^\circ=-\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right|$

よって，電荷 q が無限遠から $x=r$ まで変位するとき，保存力がする仕事 W は，

$$
\begin{aligned}
W&=-\left|\int_r^\infty dW\right|\\
&=-\left|\int_r^\infty \frac{kqQ}{x^2}dx\right|\\
&=-\left|\left[-\frac{kqQ}{x}\right]_r^\infty\right|\\
&=-\frac{kqQ}{r}
\end{aligned}
$$

変化前の位置エネルギー－保存力がした仕事＝変化後の位置エネルギー
無限遠の静電気力の位置エネルギー＝0
より，

$x=r$ における静電気力の位置エネルギー＝$0-\left(-\dfrac{kqQ}{r}\right)=\dfrac{kqQ}{r}$

$x=r$ における電位 V

電位の定義：電界中の単位電荷（+1C の電荷）がもつ静電気力の位置エネルギー

よって，静電気力の位置エネルギー＝$\dfrac{kqQ}{r}$ に $q=1$ を代入することにより，$V=\dfrac{kQ}{r}$

参考

静電気力（クーロン力）空間

何もない空間に電荷（＝電気量）をもつ物体をおいたとき，その空間の性質が変化し，
電荷をもつ物体に対し力をおよぼす空間ができる。
この空間が静電気力空間（電界・電場）である。

対象となる物体

電荷を持った物体

保存力

静電気力（クーロン力）

静電気力

電荷qが強さEの電界から受ける静電気力$=qE$

電荷 q の位置エネルギー

強さEの一様な電界の場合

電界の発生源へ距離d接近したときの位置エネルギー変化はqEd

$+Q$ C の点電荷がつくる電界の場合

点電荷の方へ距離r接近したときの電位変化は$k\dfrac{Qq}{r}$

電界の強さ E について

電界は空間に電荷Qを置くことで生じ，
$Q>0$ならば正電荷をもつ物体に対し反発力が，負電荷をもつ物体に対しては引力が働き，
$Q<0$ならばその逆となるが，これは直感的に理解できると思う。
問題は，電荷Qがつくる電界の強さEの表し方であるが，
これは，光源の明るさと光源の形状に例えるとわかりやすい。
つまり，光源の光の強さが電荷Qの大きさに，光源の形状が電荷の形状にあたり，
光源に照らされた部分の明るさが電界の強さEにあたる。

電荷 Q が点電荷のとき

・電荷Qと対応する光源は豆電球であり，光源の光の強さをQとする。
・豆電球から出た光線は放射状に広がっていくから，
光源からの距離がrの領域の明るさは同じである。
・光源からの距離がrの領域の面積Sは半径rの球面の面積と同じだから，$S=4\pi r^2$
・誘電率εは，ちりなどによる光阻止率にあたり，これをεとする。

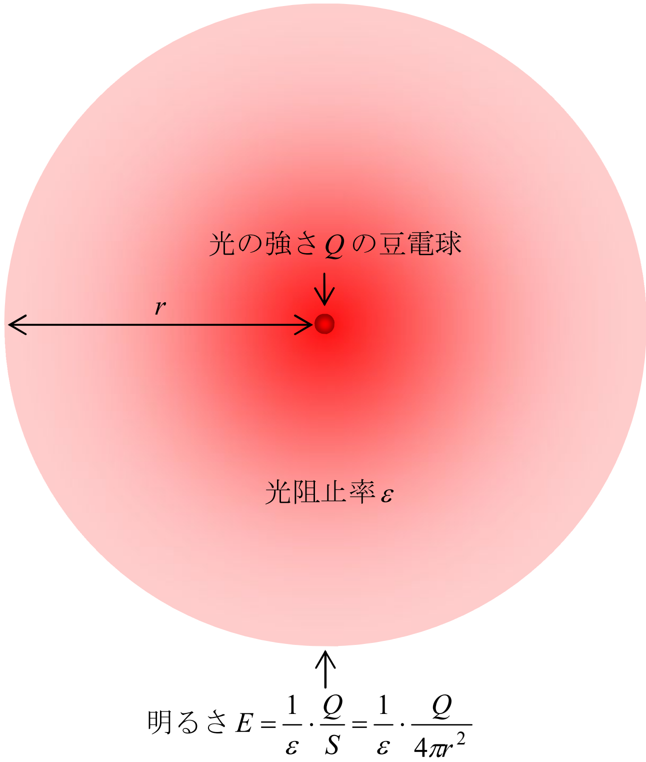
電界の強さEは光源からの距離がrの領域が単位面積当たりに受ける光の強さ，
つまりその領域の明るさであり，これをEとすると，

$$E=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{S}=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{Q}{4\pi r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}$ とおくと，教科書に記載されている $E=k\dfrac{Q}{r^2}$ が得られる。

しかし，電界の強さを統一的に理解する上で大事なのは，
電界の強さ E は，単位面積あたりに受ける光の強さに対応するということである。

つまり，式 $E=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{S}$ が重要である。点電荷の場合， $S=4\pi r^2$ を代入したに過ぎない。



また， $+Q$ の点電荷から距離 r にある電荷 $+q$ の位置エネルギーについては，
万有引力の場合と同様，無限遠を基準とする約束になっている。
よって，電荷 $+q$ を無限遠から距離 r まで移動させるときに，外力がする仕事と等しい。
電荷の変位と外力の向きが等しいから，

外力がする微小の仕事は， $dW=\vec{F}\cdot d\vec{x}=\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right|\cos 0^\circ=\left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right|>0$ より，

位置エネルギー＝外力がする仕事＞0 となればよい。

$$\left|\int_r^\infty dW\right|=\left|\int_r^\infty k\frac{Qq}{x^2}dx\right|=\left|\left[-k\frac{Qq}{x}\right]_r^\infty\right|=k\frac{Qq}{r}$$

よって，電荷 $+q$ の位置エネルギー $U=k\dfrac{Qq}{r}$

とくに，電荷が $+1\,\mathrm{C}$ の単位電荷の位置エネルギーを電位と呼ぶ。

点電荷$+Q$がつくる電界中の電位$V=k\dfrac{Q}{r}$

電荷 Q が線電荷のとき

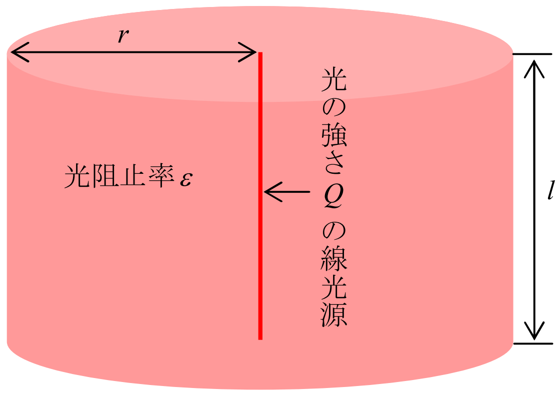
同様に，光の強さQの線光源で照らされたときの明るさをイメージすればよい。

線光源の長さをlとすると，線光源からの垂直距離rの空間，

つまり長さl，半径rの円柱の側面の明るさは同じであり，その面積をSとすると，

$S=2\pi rl$だから，その明るさは，$E=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{S}=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{2\pi rl}$

これから，電界の強さ$E=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{S}=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{2\pi rl}$が得られる。



電荷 Q が平板電荷のとき

同様に，光の強さ Q の平板光源で照らされたときの明るさをイメージすればよい。

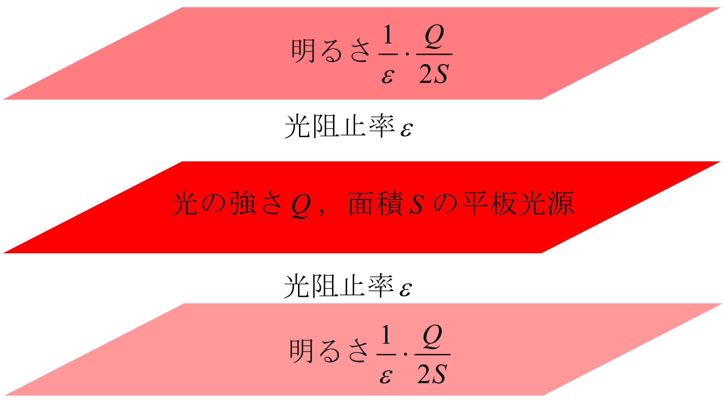
平板の面積を S とすると，光線は，平板の両側から平板に垂直に出るから，広がらない。

よって，平板から垂直にいくら距離をとっても光を受ける面積は $S+S=2S$ である。

ゆえに，その明るさは，$E=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{2S}$

これから，電界の強さ $E=\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{Q}{2S}$ が得られる。

これは，平板コンデンサーの極板間の電界の強さを理解する鍵となる。



また，

電荷 $+q$ を $+Q$ の平板電荷の方へ距離 d 移動させたときの位置エネルギー変化は，

外力がする仕事 qEd と等しいから，$\Delta U=qEd$

とくに，電荷が +1 C の単位電荷のとき，

その位置エネルギー変化の大きさを電位差と呼ぶ。

$\Delta V=Ed$