29　直流回路

(4)

別解 1

$P=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$ より，$P(R+r)^2=RE^2$

これを R について整理すると，

R の 2 次方程式 $PR^2+\left(2rP-E^2\right)R+r^2P=0$ が得られる。

判別式を D とすると，R は実数だから，$D\geq 0$

これと

$$D=\left(2rP-E^2\right)^2-4r^2P^2=E^2\left(E^2-4rP\right)$$

より，$E^2-4rP\geq 0$

よって，$P\leq\dfrac{E^2}{4r}$

これより，P の最大値は $\dfrac{E^2}{4r}$ $[\mathrm{W}]$であり，

$\dfrac{E^2}{4r}=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$ より，$(R-r)^2=0$　$\therefore R=r$

別解 2

$P=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$ より，

$$\frac{1}{P}=\frac{(R+r)^2}{RE^2}=\frac{R^2+2rR+r^2}{RE^2}=\frac{R}{E^2}+\frac{2r}{E^2}+\frac{r^2}{RE^2}=\left(\frac{R}{E^2}+\frac{r^2}{RE^2}\right)+\frac{2r}{E^2}$$

ここで，$\dfrac{R}{E^2}>0$，$\dfrac{r^2}{RE^2}>0$ より，

$$\frac{1}{P}\geq 2\sqrt{\frac{R}{E^2}\cdot\frac{r^2}{RE^2}}+\frac{2r}{E^2}=\frac{4r}{E^2}$$

$$\therefore P\leq\frac{E^2}{4r}$$

等号成立は $\dfrac{R}{E^2}=\dfrac{r^2}{RE^2}$ のとき，すなわち $R=r$ のとき

以上より，

$R=r$ のとき P は最大値 $\dfrac{E^2}{4r}$ $[\mathrm{W}]$をとる。