47　交流・電磁場中の粒子

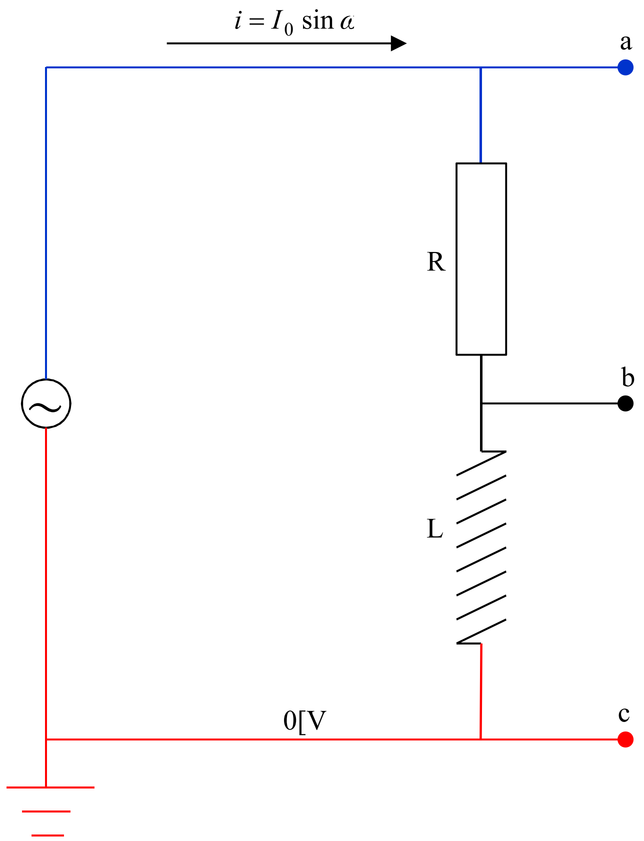


図 1 の閉回路を時計回りに流れる電流を正とする。

抵抗 R の抵抗値を R，コイル L の自己インダクタンスを L とする。

c に対する a の電位を v_{ca} とし，これを交流電源の電位とする。

また，b に対する a の電位を v_{ba}，c に対する b の電位を v_{cb} とする。

v_{ba} について

$$v_{ba} = iR$$
$$= I_0 R \sin \omega t \qquad \cdots ①$$

v_{cb} について

レンツの法則により，

$\dfrac{di}{dt} > 0$ のとき起電力の向きは c→b となるから $v_{cb} > 0$

$\dfrac{di}{dt} < 0$ のとき起電力の向きは b→c となるから $v_{cb} < 0$

よって，

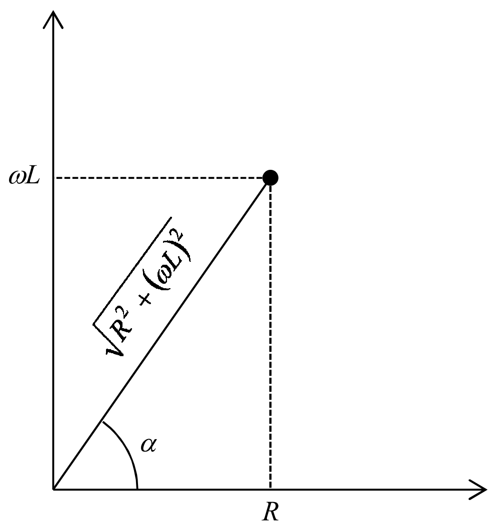
$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{cb}} &= L\frac{di}{dt} \\
&= L\frac{d}{dt}\left(I_0 \sin \omega t\right) \\
&= I_0 \omega L \cos \omega t \qquad \cdots ②
\end{aligned}
$$

v_{ca} （交流電源の電位）について

①，②より，

$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{ca}} &= v_{\mathrm{ba}} + v_{\mathrm{cb}} \\
&= I_0\left(R \sin \omega t + \omega L \cos \omega t\right) \\
&= I_0\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\sin(\omega t + \alpha) \quad \left(\cos\alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}},\ \sin\alpha = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\right) \qquad \cdots ③
\end{aligned}
$$

また， $\cos\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}, \sin\alpha = \dfrac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$ の関係は下図のようになる。



よって，

$v_{\mathrm{ba}}, v_{\mathrm{cb}}, v_{\mathrm{ca}}$ の最大値をそれぞれ $V_{\mathrm{ba}}, V_{\mathrm{cb}}, V_{\mathrm{ca}}$ とおくと，

$$V_{\mathrm{ba}} = I_0 R = I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cos\alpha \qquad \cdots ④$$

$$V_{\mathrm{cb}} = I_0 \omega L = I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\sin\alpha \qquad \cdots ⑤$$

$$V_{\mathrm{ca}} = I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2} \qquad \cdots ⑥$$

X を a に，X’を b につないだとき $-a \leq x \leq a$ が光るということについて

・$-V_{\mathrm{ba}} \leq v_{\mathrm{ba}} \leq V_{\mathrm{ba}}$

・X を a に，X’を b につないだ

・蛍光面で光る点の座標は極板間電圧に比例するとしてよい

したがって，④より，

$V_{\mathrm{ba}} = I_0\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\cos\alpha$ と $x=a$　・・・⑦　が対応する。

X を a に，X’を c につないだとき $-2a \leq x \leq 2a$ が光るということについて

同様に，$-V_{\mathrm{ca}} \leq v_{\mathrm{ca}} \leq V_{\mathrm{ca}}$ より，

$V_{\mathrm{ca}} = \sqrt{R^2+(\omega L)^2}$ と $x=2a$　・・・⑧　が対応する。

α について

蛍光面で光る点の座標は極板間電圧に比例するとしてよいことから，

⑦と⑧より，$\dfrac{V_{\mathrm{ba}}}{V_{\mathrm{ca}}} = \dfrac{a}{2a}$

これと $\dfrac{V_{\mathrm{ba}}}{V_{\mathrm{ca}}} = \cos\alpha$ より，$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$　$\therefore \alpha = \dfrac{\pi}{3}$　・・・⑨

(1)

$-V_{\mathrm{cb}} \leq v_{\mathrm{cb}} \leq V_{\mathrm{cb}}$

⑤，⑥，⑨より，$V_{\mathrm{cb}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}V_{\mathrm{ca}}$

X を b に, X’を c につないだことと⑧および蛍光面で光る点の座標は極板間電圧に比例するとしてよいことから V_{cb} と $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2a = \sqrt{3}a$ が対応する。

よって，光る部分は $-\sqrt{3}a \leq x \leq \sqrt{3}a$　・・・(答)

(2)

$v_{\mathrm{ba}} = I_0 R\sin\omega t$，$v_{\mathrm{cb}} = 2I_0 R\sin\omega t$，$v_{\mathrm{ca}} = v_{\mathrm{ba}} + v_{\mathrm{cb}} = 3I_0 R\sin\omega t = V_{\mathrm{ca}}\sin\omega t$

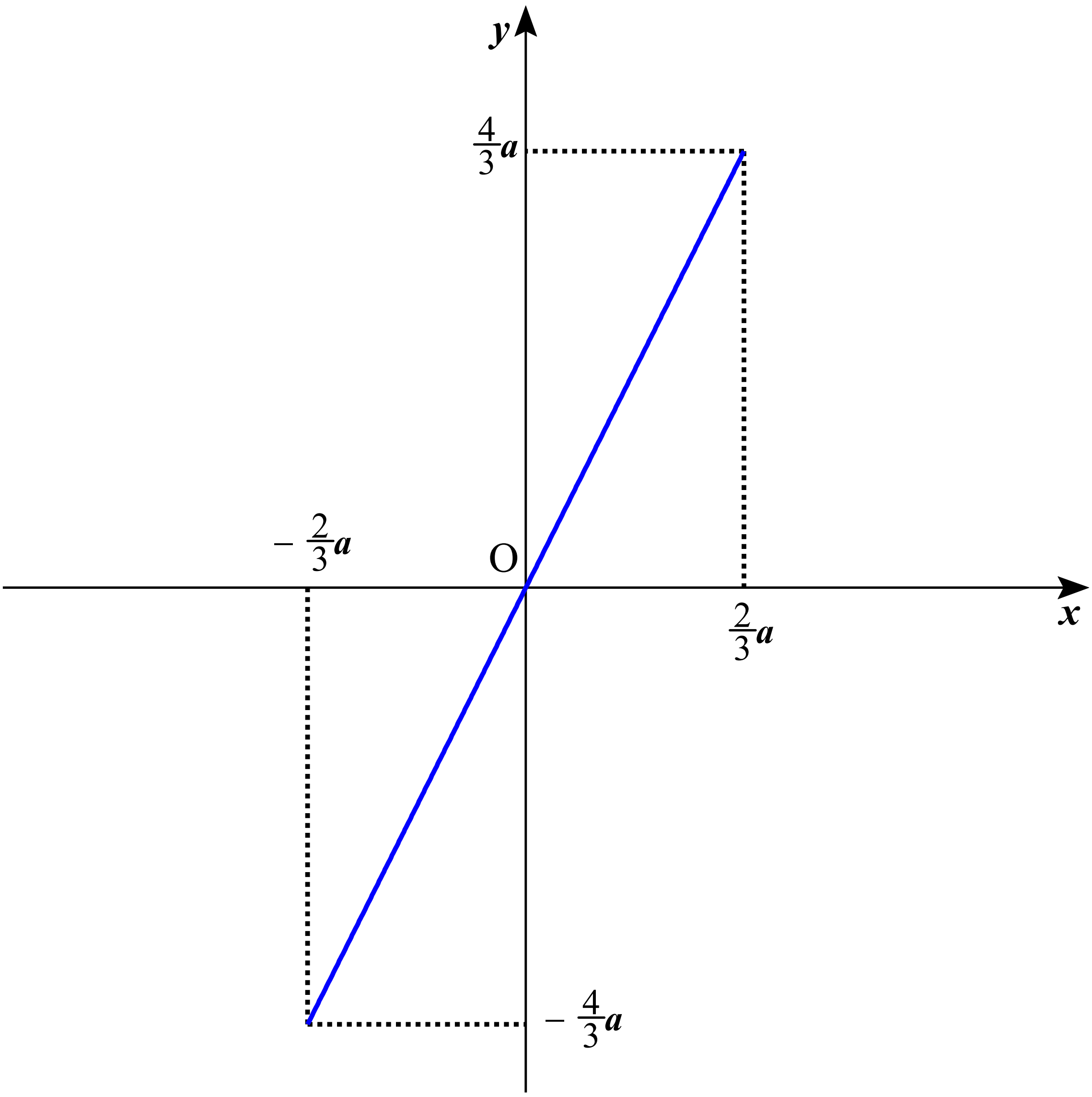
より，$v_{\mathrm{ba}} = \dfrac{1}{3}V_{\mathrm{ca}}\sin\omega t$，$v_{\mathrm{cb}} = \dfrac{2}{3}V_{\mathrm{ca}}\sin\omega t$

これと，V_{ca} は x 軸上または y 軸上の座標 $2a$ と対応することから，

$\dfrac{1}{3}V_{\mathrm{ca}}$，$\dfrac{2}{3}V_{\mathrm{ca}}$ はそれぞれの座標軸上の座標 $\dfrac{2}{3}a$，$\dfrac{4}{3}a$ と対応する。

よって，$(x,\ y) = \left(\dfrac{2}{3}a\sin\omega t,\ \dfrac{4}{3}a\sin\omega t\right)$

$\therefore y = 2x\ \left(-\dfrac{2}{3}a \leq x \leq \dfrac{2}{3}a\right)$　・・・(答)


y
$\frac{4}{3}a$
$-\frac{2}{3}a$
O
x
$\frac{2}{3}a$
$-\frac{4}{3}a$

(3)

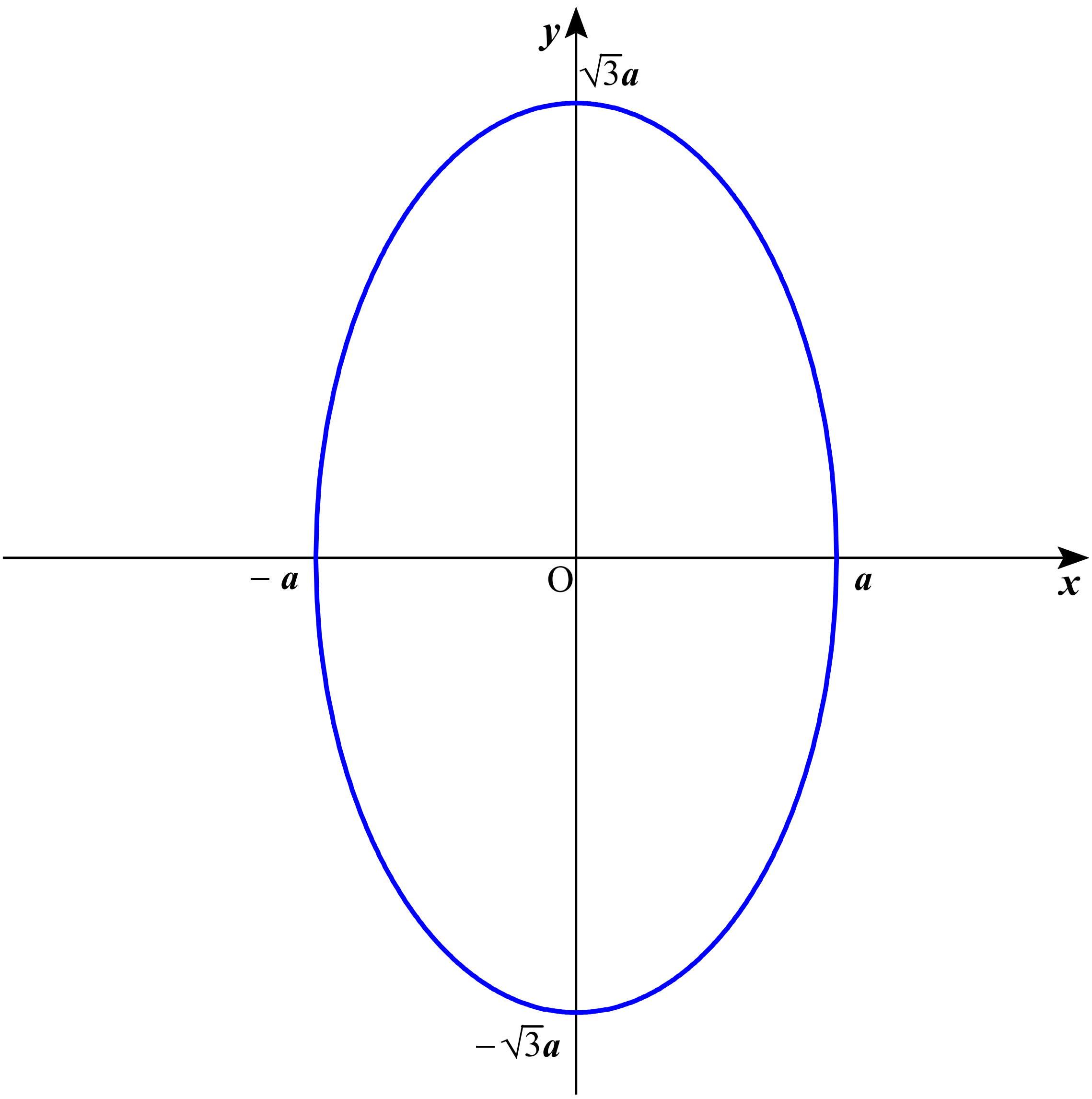
①，④，⑥，⑨より，$v_{\mathrm{ba}}=V_{\mathrm{ba}}\sin\omega t=V_{\mathrm{ca}}\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\omega t=\dfrac{1}{2}V_{\mathrm{ca}}\sin\omega t$

②，⑤，⑥，⑨より，$v_{\mathrm{cb}}=V_{\mathrm{cb}}\cos\omega t=V_{\mathrm{ca}}\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\omega t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}V_{\mathrm{ca}}\cos\omega t$

これと，V_{ca} は x 軸上または y 軸上の座標 $2a$ と対応することから，(2)と同様にして，

$(x,\ y)=\left(a\sin\omega t,\ \sqrt{3}a\cos\omega t\right)$　　$\therefore \sin\omega t=\dfrac{x}{a},\ \cos\omega t=\dfrac{y}{\sqrt{3}a}$

ゆえに，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{3a^2}=1$　・・・(答)



(4)

角振動数をω'にしたとき円が現れたとすると，

④～⑥において，

$v_{\mathrm{ba}}=V_{\mathrm{ba}}\sin\omega' t=V_{\mathrm{ca}}\cos\alpha\sin\omega' t$

$v_{\mathrm{cb}}=V_{\mathrm{cb}}\cos\omega' t=V_{\mathrm{ca}}\sin\alpha\cos\omega' t$

これと，V_{ca}はx軸上またはy軸上の座標$2a$と対応することから，

$(x,\ y)=(2a\cos\alpha\sin\omega' t,\ 2a\sin\alpha\cos\omega' t)$

したがって，点$(x,\ y)$の軌跡が半径rの円ならば，$r=2a\cos\alpha=2a\sin\alpha$

よって，$r=\sqrt{2}a$　・・・(答)

また，このとき$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$より，$\dfrac{\omega' L}{R}=\tan\dfrac{\pi}{4}$

一方，(3)のとき，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$より，$\dfrac{\omega L}{R}=\tan\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\dfrac{\omega'}{\omega}=\dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4}}{\tan\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$より，$\omega'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\omega$

角振動数と周波数は比例関係にあるから，周波数を$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$倍　・・・(答)　にした。