

1. 放物運動

(5)

P, Q の速度をそれぞれ \vec{v}_P , \vec{v}_Q とし, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}_x \\ \vec{v}_y \end{pmatrix}$ の形で成分表示すると,

$$\vec{v}_P = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta - gt \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -gt \end{pmatrix} \text{ より,}$$

Q から見た P の速度の成分表示は $\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \begin{pmatrix} v_0 \cos \theta \\ v_0 \sin \theta \end{pmatrix}$ となる。

つまり, Q から見ると P は,

その速度の x 成分と y 成分がそれぞれ常に $v_0 \cos \theta$, $v_0 \sin \theta$ の

速さ $\sqrt{(v_0 \cos \theta)^2 + (v_0 \sin \theta)^2} = v_0$ の等速直線運動をする。

とくに P と Q が衝突する場合の Q から見た P は,

P は $\tan \theta = \frac{b}{a}$ の向きに, すなわち Q に向かって投げ出されるから,

Q に向かっての等速直線運動となる。

これと P が投げ出された瞬間 (時刻 $t=0$) の PQ 間の距離が $\sqrt{a^2 + b^2}$ であることから,

このとき P と Q が衝突するまでの時間 t_0 は $t_0 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0}$ である。

t_0 の別解

投げ出された P が, $x = a$ を横切る時刻 $t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta}$

P が Q と衝突するためには $\tan \theta = \frac{b}{a}$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta, \quad \cos \theta > 0 \text{ より,}$$

$$\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

よって,

$$t_0 = \frac{a}{v_0 \cos \theta} = \frac{a}{v_0} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{v_0}$$